FÍSICA

Problemas y ejercicios resueltos

Olga Alcaraz i Sendra
Titular de Universidad
Departamento de Física e Ingeniería Nuclear de la UPC

José López López
Catedrático de Escuela Universitaria
Departamento de Física e Ingeniería Nuclear de la UPC

Vicente López Solanas
Catedrático de Física
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica de Barcelona de la UPC

PEARSON
Prentice Hall

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

FÍSICA
Problemas y ejercicios resueltos
ALCARAZ I SENDRA, O.; LÓPEZ LÓPEZ, J.; LÓPEZ SOLANAS, V.

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2006

ISBN 10: 84-205-4447-7
ISBN 13: 978-84-205-4447-2
MATERIA: Física, 53

Formato: 195 × 270 mm Páginas: 808

Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

FÍSICA
Problemas y ejercicios resueltos
ALCARAZ I SENDRA, O.; LÓPEZ LÓPEZ, J.; LÓPEZ SOLANAS, V.

ISBN 10: 84-205-4447-7
ISBN 13: 978-84-205-4447-2
Depósito Legal: TO-556-2006

PEARSON PRENTICE HALL es un sello autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S. A.

Equipo editorial
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Director: José A. Clares
Técnico: Isabel Muñoz

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Composición: JOSUR TRATAMIENTO DE TEXTOS, S.L.
Impreso por: GRAFILLES, S.L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

ÍNDICE

PARTE III

ELECTROMAGNETISMO

PRÓLOGO

Frecuentemente, los profesores de diversas disciplinas nos encontramos con que los estudiantes no saben qué hacer con los conocimientos que han adquirido en un momento determinado. En el caso de la Física y de otras asignaturas científicas y técnicas, los estudiantes se encuentran con dificultades a la hora de aplicar estos conocimientos a casos concretos, aunque sea a la resolución de problemas sencillos. Una de las causas puede ser que no han integrado todavía estos conocimientos en su estructura mental.

Creemos que en el proceso de enseñanza-aprendizaje sucede que a medida que uno va aplicando sus conocimientos, los va depurando a la vez que se da cuenta de aspectos que hasta entonces habían pasado desapercibidos. El hecho de tener que utilizar los conceptos obliga a comprenderlos mejor.

Basándonos en la idea de que el esfuerzo que debe efectuar el estudiante en el proceso de su formación es indispensable y fundamental, este libro, que va dirigido principalmente a los estudiantes de primer año de las Facultades de Ciencias y de Escuelas Técnicas, ha sido diseñado de forma que éstos, una vez hayan asistido a clase y hayan adquirido la información pertinente, puedan trabajar solos.

Tras un capítulo de introducción, los capítulos de este libro están estructurados de la siguiente forma:

1. **Breve introducción teórica.** Aquí aparecen resumidos los conocimientos y el menor número posible de demostraciones que el lector debe tener presentes para pasar a los apartados siguientes. Al iniciar el estudio de cada capítulo recomendamos una lectura atenta de este apartado.
2. **Problemas resueltos.** Hemos seleccionado un conjunto de problemas que sirven de modelo para la resolución de otros. Este apartado no consiste en una mera exposición de cálculos, sino que en cada caso hemos procurado explicar cada uno de los pasos que conducen al resultado final.
3. **Cuestiones.** Se trata de una serie de cuestiones con cuatro respuestas de las cuales sólo una es correcta. El objetivo de este apartado es doble. Por una parte, estas cuestiones han de servir al estudiante como ejercicio de autoevaluación, para averiguar si ha comprendido lo que ha estudiado en los apartados anteriores. Por otro lado, como cada vez se utilizan más las preguntas tipo test en las pruebas de evaluación, conviene que el estudiante se acostumbre a trabajar con ellas. Atendiendo a la idea repetida hasta la saciedad de que la Física no sólo es fórmulas, hemos procurado que algunas de estas cuestiones puedan ser contestadas sin necesidad de utilizar ni calculadora ni bolígrafo. Dentro de las cuestiones que requieren un cálculo numérico, hay casos en que estos cálculos son lo suficientemente sencillos como para que pueden realizarse mentalmente. El uso abusivo de la

calculadora ha hecho que se deje de desarrollar una habilidad tan interesante como es el cálculo mental, tan necesario en las ocasiones en que no se dispone de ninguna herramienta de cálculo. Estas cuestiones han de servir de acicate para que el estudiante revise aquellos puntos confusos y subsane a tiempo aquellas deficiencias que haya observado.

4. Problemas propuestos. Recomendamos una lectura atenta del problema antes de proceder a su resolución. Si tras esta lectura el estudiante no consigue resolverlo, es conveniente que estudie con más detalle la teoría que está relacionada con el mismo. Dado que cuando medimos una magnitud física le asignamos un número y una unidad, la solución del problema debe darse mediante un número con las cifras significativas adecuadas y su correspondiente unidad. No se debe caer en el error de pensar que uno ya sabe resolver el problema y que, por tanto, no es necesario proceder a ello. Más de una vez, todos nos hemos encontrado con que lo que creíamos que se puede resolver fácilmente no es tan trivial y es necesario reconsiderar nuestras suposiciones iniciales. Nosotros también insistimos en la idea de que en muchas ocasiones el hacer un dibujo es una gran ayuda para resolver un problema. En algunos ejercicios, una vez se han escrito y simplificado convenientemente las expresiones matemáticas, los cálculos numéricos son tan sencillos que pueden realizarse mentalmente. Recomendamos que la resolución de estos problemas no sea una simple reproducción de algún problema resuelto que sea muy similar, es preciso ir más allá y acabar de comprender los fenómenos y las teorías físicas.

Confiamos en que este texto sea un buen auxiliar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física y contribuya a que el estudiante tenga un aprendizaje significativo que le permita aplicar los conocimientos a situaciones concretas para resolver determinados problemas.

Los autores

PARTE I

MECÁNICA

CAPÍTULO

1

MEDIDA DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

1.1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1.1.1. UNIDADES

Los físicos constantemente efectúan medidas de las magnitudes físicas. Cuando medimos cualquier magnitud física le asignamos *un número y una unidad*. Para establecer el número, comparamos con una cantidad de la misma magnitud que se toma como unidad. Como muchas magnitudes están interrelacionadas, se escoge un determinado número de unidades, denominadas *unidades fundamentales*, y a partir de estas se definen las demás, estas son las *unidades derivadas*. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil acostumbramos a darla en km/h; esto es a partir de una unidad de longitud y una unidad de tiempo, se trata de una unidad derivada. El conjunto de unidades fundamentales y derivadas constituye un sistema de unidades. Nosotros, normalmente, utilizaremos el *Sistema Internacional de Unidades*, SI. Se trata del sistema más extensamente utilizado en la actualidad. En el SI cada unidad tiene su símbolo. Los nombres de las unidades pueden escribirse en singular y en plural. Pero los símbolos sólo pueden escribirse en singular y sin punto final, por ejemplo m, kg.

1.2. UNIDADES FUNDAMENTALES DEL SI

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro *Definición:* el metro es la longitud que recorre la luz en el vacío en 1/299 792 458 s.	m
Masa	kilogramo *Definición:* el kilogramo es la masa del prototipo de platino iridio que se conserva en el Pabellón de Breteuil, de Sévres.	kg
Tiempo	segundo *Definición:* el segundo es la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio *Definición:* el amperio es la intensidad de una corriente eléctrica constante que, mantenida en dos conductores paralelos rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados en el vacío a una distancia de un metro uno del otro, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud.	A
Temperatura termodinámica	kelvin *Definición:* el kelvin, unidad de temperatura termodinámica, es la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.	K
Intensidad luminosa	candela *Definición:* la candela es la intensidad luminosa, en la dirección perpendicular, de una superficie de 1/600000 m^2 de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino, bajo la presión de 101325 Pa.	cd

1.1.2. MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS

Hay ocasiones en las que la unidad que se ha adoptado para una magnitud no es adecuada, porque resulta demasiado grande o demasiado pequeña. Por ello se ha definido un conjunto de múltiplos y submúltiplos. Para obtener un múltiplo o un submúltiplo se agrega el prefijo correspondiente al nombre de la unidad. Por ejemplo, si agregamos el prefijo kilo (símbolo k) a metro obtenemos un múltiplo 1000 veces mayor, el kilómetro (símbolo km).

No se recomienda el uso de los prefijos hecto y deca.

Al utilizar los prefijos SI se observarán las reglas siguientes:

a) Los símbolos de los prefijos se escriben sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad.

b) Si un símbolo que contiene un prefijo está afectado de un exponente, éste indica que el múltiplo o el submúltiplo de la unidad está elevado a la potencia que expresa el exponente; por ejemplo, 1 $cm^3 = 10^{-6}\,m^3$; 1 $cm^{-1} = 10^{-2}\,m^{-1}$.

c) No se admiten los prefijos compuestos formados por la yuxtaposición de varios prefijos del SI; por ejemplo, 1 nm, pero no 1 mμm.

Potencia de 10	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

1.3. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

1.3.1. INCERTIDUMBRE EN LAS MEDIDAS

Debemos tener presente que el valor exacto de una magnitud es imposible de conocer, siempre hay una cierta incertidumbre que depende de los aparatos de medida, de los métodos empleados en la medición, de la persona que realiza la medida y de un cierto número de errores aleatorios que pueden surgir en el momento de efectuar la medición. Lo que sí podemos conocer es un intervalo dentro del cual podemos afirmar, con una razonable seguridad, se encuentra el valor de una magnitud, es lo que se conoce como *intervalo de incertidumbre.* Por ejemplo, podemos decir que la masa de un objeto está comprendida entre 53,2 g y 53,6 g; entonces, nosotros a la medida de esta masa le asignamos el valor medio del intervalo que es 43,4 g y, para indicar que está comprendido entre 53,2 g y 53,6 g, escribimos (53,4 ± 0,2) g. El valor 0,2 g es lo que se conoce como cota del error absoluto o simplemente *error absoluto.* Podemos suponer que, de estas tres cifras, las dos primeras, el 5 y el 3, es muy probable que sean ciertas y que la tercera, el 4, sea aproximada. Pero no podemos decir nada respecto a las cifras que vienen detrás del 4.

1.3.2. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

La medida del ejemplo anterior la hemos expresado con tres cifras significativas. El 5, que es la de mayor orden de magnitud, es la más significativa; y el 4, que es la de menor orden de magnitud, es la menos significativa. El número de cifras significativas es igual al número de cifras conocidas más una aproximada.

El 1, 2, 3....9 son siempre cifras significativas. El caso del cero es algo más complicado.

— Un cero situado entre dos cifras significativas es siempre una cifra significativa. Por ejemplo, el número 10,7 cm tiene tres cifras significativas.
— Un cero a la derecha de coma decimal es también una cifra significativa. Por ejemplo, el número 20,50 g tiene cuatro cifras significativas.
— El cero no es una cifra significativa, cuando sólo sirve para indicar el orden de magnitud de una determinada cifra. Por ejemplo, hemos medido la masa de un objeto y resulta ser 27 g, si deseamos expresar esta masa en kg escribiremos 0,027 kg; estos ceros no son significativos ya que sólo sirven para situar la coma decimal. Si esta medida deseamos expresarla en mg, escribiremos 27000 mg; estos tres ceros tampoco son significativos, sólo sirven para indicar que el 7 es del orden de las unidades de millar.

1.3.3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para evitar las posibles confusiones que pueden originar los ceros no significativos es útil emplear la notación científica en la que el número se expresa como el producto de un número comprendido entre 1 y 10, que contiene todas las cifras significativas, por la potencia de 10 precisa. Por ejemplo, los valores anteriores los expresaremos:

$2{,}7 \cdot 10^{-2}$ kg y $2{,}7 \cdot 10^{4}$ mg respectivamente.

El exponente negativo indica el número de lugares que hemos corrido la coma hacia la derecha, 2 en este caso. El exponente positivo indica el número de lugares que hemos corrido la coma hacia la izquierda, 4 en este caso.

1.3.4. REDONDEO

Para escribir un número con el número de cifras significativas deseado a veces hay que eliminar las innecesarias, esto se hace por redondeo. Para ello hay que fijarse en el dígito de mayor orden de magnitud que se elimina.

— Si este dígito es 5 o superior a 5, el dígito de menor orden de magnitud que se conserva se aumenta en una unidad. Por ejemplo, para redondear el número 3,136 a dos cifras escribiremos 3,14. Al redondear a dos cifras el número 8,75, se obtiene 8,8. El número 4,97 nos da 5,0.
— Si el dígito de mayor orden de magnitud que hay que eliminar es inferior a 5, el último dígito que se conserva se deja igual. Por ejemplo, al redondear a dos cifras el número 9,74, resulta 9,7. El número 8,93, nos da 8,9.

1.3.5. MANEJO DE LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Si utilizamos números que tienen una incertidumbre para calcular los valores de otras magnitudes, los valores que obtengamos también serán inciertos. Existe un conjunto de reglas para el cálculo de errores. Pero hay ocasiones en que no se da el error, sino que el valor de una magnitud se indica con el número de cifras significativas adecuado. En estos casos o sencillamente para evitar el cálculo de errores, se utilizan las *reglas de manejo de las cifras significativas.*

Sumas y restas

El resultado de una suma o de una resta debe expresarse de forma que la cifra menos significativa sea del mismo orden de magnitud que la menos significativa de los números que se suman o se restan. Por ejemplo, la suma de 104,75 g, 0,346 g, 70,3 g será:

$$\begin{array}{r} 104{,}75\ \ \text{g} \\ 0{,}346\ \text{g} \\ \underline{70{,}3\ \ \ \ \text{g}} \\ 175{,}396\ \text{g} \end{array}$$

El número que tiene la cifra menos significativa de menor orden de magnitud es 70,3, cuya cifra menos significativa es el 3 que es del orden de las décimas. La suma se redondea de forma que su cifra menos significativa sea también del orden de las décimas, por tanto, la suma será 175,4 g.

Esta norma puede comprenderse con la siguiente prueba. Designaremos con una x las cifras totalmente desconocidas.

$$\begin{array}{r} 45{,}654\ \text{g} \\ 134{,}81\text{x}\ \text{g} \\ \underline{32{,}1\text{xx}\ \text{g}} \\ 212,\ 5\text{xx}\ \text{g} \end{array}$$

Al efectuar la suma como ordinariamente hacemos veríamos que sale 212,564 g, siguiendo el criterio que hemos establecido para las cifras significativas que sólo puede haber una cifra incierta, el valor de esta suma lo redondearíamos a 212,5 g.

Es posible que en una resta el resultado tenga menos cifras significativas que el minuendo y el sustraendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2{,}34\ \text{g} \\ \underline{-\ 1{,}9\ \ \text{g}} \\ 0{,}44\ \text{g} \end{array}$$

El resultado de esta resta es 0,4 g, que tiene una sola cifra significativa.

Para sumar o restar números expresados en notación exponencial es necesario que estén escritos en la misma potencia de 10.

Multiplicación y división

En una multiplicación y en una división el número de cifras significativas es igual al de la cantidad que tenga menos cifras significativas. Ejemplo: 2,354 m/s × 1,6 s.

$$\begin{array}{r} 2{,}354 \\ \underline{\times\ \ \ 1{,}6} \\ 14124 \\ \underline{2354\ } \\ 3{,}7664 \end{array}$$

Como el factor que tiene menos cifras significativas tiene dos, el resultado será 3,8 m. Hay ocasiones que se puede escribir una cifra significativa más, pero, por mantener un criterio uniforme, no consideraremos esta posibilidad.

Funciones trascendentes

En las operaciones en las que intervienen funciones trascendentes como las funciones trigonométricas y la función exponencial, el resultado se da con un número de cifras significativas igual a las que tiene el argumento. Por ejemplo, sen 32° = 0,53; cos 45.0° = 0,707; arcsen 0,41 = 24°; log 65 = 1,8; antlog 1,20 = 15,8; $e^{1,25} = 3{,}49$.

Los números y fracciones que aparecen en las ecuaciones no están sujetos a las reglas de las cifras significativas. Por ejemplo, el volumen de una esfera viene dado por la expresión:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

El 4 y el 3 son exactamente estos valores. Por lo que respecta al número π, normalmente la calculadora nos lo da con el suficiente número de cifras significativas como para no influir en el número que se obtiene en el cálculo. En un cálculo manual, habría que tomarlo con un número de cifras significativas tal que este número no influya en el número de cifras significativas del resultado final.

Cálculos intermedios

En cálculos intermedios en los que los resultados obtenidos se han de utilizar en otro cálculo posterior, es conveniente utilizar una cifra más que las que correspondería aplicando las reglas de manejo de cifras significativas. Ejemplo: se ha medido el radio y la masa de una esfera de cobre y se han obtenido los valores 8,3 cm y 21,27 kg, respectivamente. ¿Cuál es la densidad del cobre?

Obtendremos la densidad dividiendo la masa por el volumen.

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3;\ V = \frac{4}{3}\pi\,(8{,}3\ \text{cm})^3 = 2{,}39 \cdot 10^3\ \text{cm}^3$$

La densidad será:

$$\rho = \frac{m}{V};\ \rho = \frac{21{,}27\ \text{kg}}{2{,}39 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3} = 8{,}89 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Como el radio de la esfera lo hemos dado con dos cifras significativas, el resultado final deberá tener también dos cifras significativas. Por tanto, diremos que la densidad del cobre es:

$$8{,}9 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$$

1.4. ECUACIÓN DE DIMENSIONES

Una ecuación de dimensiones es una expresión simbólica que expresa la dependencia entre una magnitud y las magnitudes fundamentales a partir de las que se ha definido. En una ecuación de dimensiones, las magnitudes fundamentales se representan mediante letras mayúsculas y la magnitud derivada encerrada entre corchetes. Así, la masa, la longitud y el tiempo se representan por L, M y T, respectivamente. Por ejemplo, el volumen de una esfera viene dado por la expresión $V = 4/3\ \pi r^3$. La ecuación de dimensiones del volumen será:

$$[V] = L^3$$

El radio es una longitud y 4/3 y π no tienen unidades. Por tanto la dimensión del volumen es una longitud al cubo. Lo mismo obtendríamos si utilizásemos la expresión del volumen de cualquier otro cuerpo.

Para que una fórmula física sea correcta debe ser *homogénea*, lo que quiere decir que los dos miembros deben tener las mismas ecuaciones de dimensiones. Por ejemplo, la expresión de la posición en un movimiento rectilíneo y uniforme es: $x = x_0 + vt$. La velocidad es el desplazamiento por unidad de tiempo (v/t), por tanto la ecuación de dimensiones de la velocidad será:

$$[V] = LT^{-1}$$

En la ecuación propuesta tendremos:

$$L = L + LT^{-1}\,T;\ \ L = L + L$$

Esta ecuación es dimensionalmente correcta. Cuando una expresión tiene distintos sumandos, las dimensiones de cada uno de ellos han de ser las mismas. Es lo mismo que decir que sólo podemos sumar metros y metros, o kilogramos y kilogramos, o metros por segundo y metros por segundo, etc.

CUESTIONES

1.1. El prefijo nano indica:

a) 10^{-6} *b)* 10^{6} *c)* 10^{-12} *d)* 10^{-9}

1.2. 4,0 10^2 Pm equivalen a:

a) $4{,}0 \cdot 10^{11}$ Mm *b)* $4{,}0 \cdot 10^{3}$ Em *c)* $4{,}0 \cdot 10^{7}$ Gm *d)* $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km

1.3. 3,0 fs equivalen a:

a) $3{,}0 \cdot 10^{3}$ s *b)* $3{,}0 \cdot 10^{5}$ ms *c)* $3{,}0 \cdot 10^{3}$ ns *d)* $3{,}0 \cdot 10^{-15}$ s

1.4. Señalar cuál de las formas siguientes en que hemos expresado la cantidad $2{,}0 \cdot 10^{-9}$ m no es correcta:

a) 2,0 nm *b)* 2,0 mμm *c)* $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ μm *d)* $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ mm

1.5. El cero no puede ser una cifra significativa cuando:

a) Va delante de la coma decimal.
b) Sirve para situar la coma decimal.
c) Está entre dos cifras que no sean ceros.
d) Es la última cifra del número.

1.6. Indicar de cuál de los siguientes números podemos decir que se da con tres cifras significativas:

a) 0,056 m *b)* 2,21 m *c)* 120 m *d)* 0,002 m

1.7. El producto $8{,}202 \cdot 10^2$ cm × $4{,}30 \cdot 10^3$ deberemos darlo con:

a) Dos cifras significativas.
b) Cuatro cifras significativas.
c) Tres cifras significativas.
d) Siete cifras significativas.

1.8. El resultado de la operación $\frac{(9 \cdot 10^2)\ (2{,}8 \cdot 10^6)}{(6{,}3 \cdot 10^4)}$ es:

a) $4{,}0 \cdot 10^{4}$ *b)* $4 \cdot 10^{4}$ *c)* $1 \cdot 10^{5}$ *d)* $8 \cdot 10^{4}$

1.9. El error relativo se define como la relación entre el error absoluto y la medida. Al medir el volumen de un objeto hemos encontrado un valor de 25,21 cm², con un error de 0,02 cm². El error relativo vendrá expresado en:

a) cm² *b)* cm³ *c)* no tiene unidades *d)* cm

1.10. Si expresamos el radio de la Tierra y el radio de Júpiter en las mismas unidades, la relación entre estos dos radios depende:

a) De los valores de los radios y de las unidades en que vienen expresados.
b) Sólo de las unidades en que vienen expresados.
c) No depende de nada.
d) De los valores de los radios.

1.11. Indicar cuál de la siguientes expresiones es dimensionalmente incorrecta:

a) $v^2 = 2\,ax$ *b)* $v = v_0 + at$ *c)* $v^2 = v^3 + at$ *d)* $x = v^2/a$

V indica la velocidad, *a* la aceleración y *t* el tiempo.

1.12. La aceleración de un móvil viene dada por la expresión $a = k\,t$; donde *k* es una constante y *t* el tiempo. Las dimensiones de k son:

a) LT^{-3} *b)* No tiene dimensiones. *c)* L^2 *d)* LT^{-2}

SOLUCIONES

1.1. *d)*	**1.5.** *b)*	**1.9.** *c)*
1.2. *a)*	**1.6.** *b)*	**1.10.** *d)*
1.3. *d)*	**1.7.** *c)*	**1.11.** *c)*
1.4. *b)*	**1.8.** *b)*	**1.12.** *a)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **El radio de Bohr del átomo de hidrógeno es igual a $5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m. Expresar este valor en pm.**

Sol.: 52,9 pm

2 **La masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Expresar este valor en Pg.**

Sol.: $5{,}98 \cdot 10^{12}$ Pg

¿Cuántas cifras significativas se dan en las siguientes cantidades?

a) 454 g
b) 0,042 cm
c) $1{,}18 \cdot 10^{-4}$ m
d) 0,20 mm
e) 1.030 cm/s
f) 2.300

Sol.: a) 3; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 1 ó 2; *e)* 3 ó 4; *f)* 2, 3 ó 4

4 **Redondear los siguientes números a tres cifras significativas y escribirlos utilizando la notación científica:**

a) 4,831 g
b) 126,7 cm
c) 5,675 km
d) 0,0674 m
e) 1534 s
f) 674,12 km/h
g) 39,329 s

Sol.: a) 4,83 g; *b)* $1{,}27 \cdot 10^2$ cm; *c)* 5,68 km; *d)* $6{,}74 \cdot 10^{-2}$ m; *e)* $1{,}53 \cdot 10^3$ s; *f)* $6{,}74 \cdot 10^2$ km/h; *g)* $3{,}93 \cdot 10$ s

Expresar los siguientes números en notación ordinaria:

a) $2{,}24 \cdot 10^{-2}$ m
b) $1{,}56 \cdot 10^3$ g
c) $5{,}67 \cdot 10^{-3}$g
d) $0{,}059 \cdot 10^4$ m/s
e) $2{,}72 \cdot 10^5$ g

Sol.: a) 0,0224 m; *b)* 1560 g; *c)* 0,00567 g; *d)* 590 m/s; *e)* 272000 g

6 **Efectuar las operaciones siguientes y redondear al número correcto de cifras significativas:**

a) 20,6 g + 25,12 g + 15,032 g
b) 28,2 m + 505 m + 1,732 m
c) 415,5 g + 3,64 g + 0,238 g
d) 7,26 s − 0,2 s
e) 25 kg − 0,20 kg
f) 2,31 km − 1,74 km
g) 2,00 m/s × 102,14 s
h) 1,293 g/cm^3 × 3,27 cm^3
i) 2,21 m/s^2 × 0,3 s
j) 107,87m × 0,610 m
k) 7,24 cm × 8,6 cm
l) 97,52 m/2,54 s
m) 14,28 m^2/0,714 m
n) 0,032 m^2/0,004 m
o) $(4{,}25 \cdot 10^8\ \text{m}^2)^{1/2}$

Sol.: a) 60,8 g; *b)* 535 m; *c)* 419,4 g; *d)* 7,1 s; *e)* 25 kg; *f)* 0,57 km; *g)* 204 m; *h)* 4,23 g; *i)* 0,7 s; *j)* 65,8 m^2; *k)* 62 cm^2; *l)* 38,4 m/s; *m)* 20,0 m; *n)* 8 m; *o)* $2{,}06 \cdot 10^4$ m

7 **Efectuar las sumas siguientes expresando los sumandos en notación exponencial y dar los resultados utilizando la notación científica:**

a) $2{,}25 \cdot 10^6$ m $+ 64 \cdot 10^6$ m
b) $7{,}89 \cdot 10^{-2}$ km $- 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ km
c) $2{,}58 \cdot 10^3$ g $+ 6{,}7 \cdot 10^4$ g
d) $4{,}56 \cdot 10^4$ g $+ 8{,}9 \cdot 10^6$ g

Sol.: a) $6{,}6 \cdot 10^7$ m; *b)* $3{,}4 \cdot 10^{-2}$ km; *c)* $7{,}0 \cdot 10^4$ g; *d)* $8{,}9 \cdot 10^6$ g

8 **Dar los valores de las funciones siguientes con las cifras significativas adecuadas:**

a) sen 60°
b) tg 50,1
c) lg 3205
d) ln 0,12
e) e^2

Sol.: a) 0,87; *b)* 1,20; *c)* 3,506; *d)* −2,1; *e)* 7

9 **La componente normal de la aceleración de un movimiento circular viene dada por la expresión $a_n = v^2/R$; siendo v la velocidad y R el radio de la circunferencia. Demostrar que esta expresión es dimensionalmente correcta.**

10 **El período de un péndulo ideal es proporcional a alguna potencia de la longitud y a alguna potencia de la aceleración de la gravedad. Determinar los exponentes de estas potencias.**

Sol.: $L^{1/2}$, $g^{-1/2}$

CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

2.1. CINEMÁTICA

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento sin ocuparse de las causas que lo originan.

2.2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una línea recta se dice que tiene un movimiento rectilíneo o en una sola dimensión.

POSICIÓN

Para indicar la posición de la partícula, se toma un punto de referencia O sobre la línea y un sentido positivo a lo largo de la línea. Habitualmente, si el movimiento tiene dirección horizontal, se considera positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda; si el movimiento tiene dirección vertical se toma sentido positivo hacia arriba y negativo hacia abajo. Si es más conveniente para la resolución del problema, estos criterios pueden modificarse. La posición del móvil se da mediante la distancia al origen con su correspondiente signo, es lo que se denomina coordenada de posición. La unidad en el SI es el metro. Por ejemplo, en la Figura 1, la posición del punto P es +2 m, y la del punto P′ es −3 m.

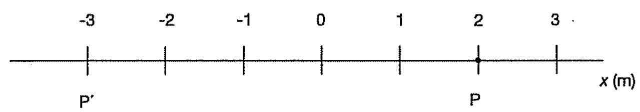


Figura 1

Cuando una partícula se mueve respecto al punto de referencia 0, la coordenada de posición es una función del tiempo, $x = f(t)$. Se denomina desplazamiento al cambio de posición. Si en un cierto instante t_1, el móvil ocupa la posición x_1 y en un instante posterior t_2, ocupa la posición x_2, el desplazamiento d vale $d = \Delta x = x_2 - x_1$, Figura 2.

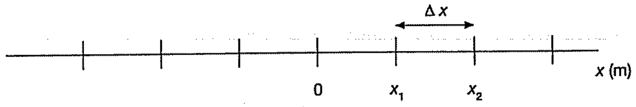


Figura 2

VELOCIDAD

La *velocidad media*, v_m, en un intervalo de tiempo Δt es el desplazamiento medio por unidad de tiempo en este intervalo de tiempo.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

v_m es la velocidad media y Δx es el desplazamiento. La unidad en el SI es el m/s.

La *velocidad instantánea, v*, es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero. En el SI se mide también en m/s.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A este límite se le denomina derivada de x respecto a t y se escribe:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Cuando la velocidad es positiva quiere decir que el móvil se mueve en sentido positivo, un valor negativo de la velocidad indica que el movimiento tiene sentido negativo.

El módulo de la velocidad se denomina *celeridad.*

De (2) se deduce: $x = \int v\, dt$ (3)

ACELERACIÓN

La *aceleración media* en un intervalo de tiempo Δt es la variación media de la velocidad por unidad de tiempo en este intervalo de tiempo.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4}$$

Δv es la variación de velocidad. La unidad de medida de la aceleración en el SI es el m/s^2.

La *aceleración instantánea* es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero. La aceleración instantánea en el SI también se mide en m/s^2.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a = \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

De (2) se deduce: $x = \int a\, dt$ (6)

CASOS PARTICULARES

Movimiento con velocidad constante

Si la aceleración es cero $a = 0$, se trata de un movimiento con velocidad constante.

La posición viene dada por la ecuación:

$$x = x_0 + vt \tag{7}$$

x_0 es la posición inicial, es decir, la posición en el momento de empezar a contar el tiempo.

Movimiento rectilíneo con aceleración constante

Cuando la aceleración es constante, la aceleración media y la aceleración instantánea coinciden.

Las ecuaciones de la velocidad y de la posición son:

$$v = v_0 + at \tag{8}$$

$$x = x_0 + v_0 t + 1/2\, a\, t^2 \tag{9}$$

v_0 es la velocidad cuando $t = 0$ o velocidad inicial, x_0 es la posición para $t = 0$.

El desplazamiento viene dado por $d = v_0\, \Delta t + 1/2\ a\, \Delta t^2$.

Caída libre de los cuerpos

En el movimiento de caída de un cuerpo intervienen una serie de factores como son la fuerza de la gravedad, la fricción con el aire y el empuje del aire. En muchos movimientos de caída en la superficie de la Tierra, la influencia de estos dos últimos factores es poco significativa, por ello, al estudiar estos movimientos, únicamente se tiene en cuenta la acción de la gravedad y, además, no se considera su variación con la altura. Este movimiento es lo que se denomina *movimiento de caída libre;* se trata de un movimiento ideal. La aceleración de un cuerpo que cae libremente es la aceleración de la gravedad. En las proximidades de la Tierra se supone que la aceleración de la gravedad es constante y de módulo aproximadamente igual a 9,81 m/s^2, esta aceleración está dirigida hacia abajo y se representa por g. Habitualmente se toma sentido positivo hacia arriba, en cuyo caso la aceleración será $g = -9{,}81$ m/s^2. Si se toma sentido positivo hacia abajo, entonces $g = 9{,}81$ m/s^2. Esta aceleración es la misma tanto para un cuerpo que se mueve hacia arriba, como para un cuerpo que se mueve hacia abajo, como para un cuerpo que se suelta desde el reposo.

El movimiento de caída libre es un movimiento con aceleración constante y como tal debe tratarse. En consecuencia las ecuaciones de la velocidad y de la posición son:

$$v = v_0 + g\, t \tag{10}$$

$$y = y_0 + v_0 t + 1/2\ a\, t^2 \tag{11}$$

Movimiento relativo

Como se ha indicado anteriormente, para describir el movimiento de un objeto es necesario un sistema de referencia. Hasta ahora hemos referido el movimiento a un sistema en reposo respecto a la Tierra, y se ha considerado que era un sistema fijo. A veces conviene referir el movimiento a un sistema que se encuentra en movimiento respecto a la Tierra, es lo que se denomina un sistema móvil.

Consideremos dos partículas A y B que se mueven en una trayectoria rectilínea, si las respectivas coordenadas respecto a un punto 0 de la recta son x_A y x_B (Figura 3), la coordenada de B respecto a A se representa por x_{BA} y cumple:

$$x_B = x_A + x_{BA}$$
$$x_{BA} = x_B - x_A \tag{12}$$

Si x_{AB} es positiva quiere decir que B se encuentra a la derecha de A; si es negativa, B se encuentra a la izquierda de A.

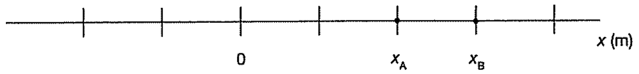


Figura 3

Derivando (12) respecto al tiempo:

$$v_B = v_A + v_{BA} \quad (13)$$

v_{BA} representa la velocidad relativa de B respecto a A:

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

Si A y B se mueven en el mismo sentido, el módulo de v_{BA} es la diferencia del módulo de v_B y del módulo de v_A. Si A y B se mueven en sentidos contrarios, el módulo de v_{BA} es la suma del módulo de v_B y del módulo de v_A. Por ejemplo, si se aproximan dos automóviles, ambos con una celeridad de 80 km/h respecto al suelo, la celeridad de uno respecto al otro será 160 km/h. Si los dos automóviles se mueven en el mismo sentido, desde un automóvil se ve que el otro está siempre a la misma distancia y la celeridad de uno respecto al otro es cero.

La derivada temporal de (13) nos da:

$$a_B = a_A + a_{BA} \quad (14)$$

a_{BA} es la aceleración relativa de B respecto a A:

$$a_{BA} = a_B - a_A$$

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. En Inglaterra, los velocímetros de los automóviles suelen indicar la celeridad en mi/h (millas por hora).

a) Hallar el factor de conversión de mi/h a m/s.
b) Convertir 60 mi/h en m/s.

Dato: 1 mi = 1,61 km

Solución

a) Factor de conversión de mi/h a m/s. Como 1 mi = 1,61 km y 1 h = 3 600 s, podemos escribir:

$$1 \text{ mi/h} \cdot \frac{1{,}61 \cdot 10^3}{1 \text{ mi}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 0{,}447 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ mi/h} = 0{,}447 \text{ m/s}$$

b) Conversión de 60 mi/h a m/s.

$$60 \text{ mi/h} \cdot \frac{0{,}447 \text{ m/s}}{1 \text{ mi/h}} = 26{,}82 \text{ mi/h}$$

$$60 \text{ mi/h} = 27 \text{ m/s}$$

2.2. Una barcaza cruza un río de 360 m de ancho en 1 min 20 s. El viaje de regreso lo efectúa en 1 min 30 s.

a) ¿Cuál es la velocidad media en el viaje de ida?
b) ¿Cuál es la velocidad media del viaje de vuelta?
c) ¿Cuál es la velocidad media del viaje de ida y vuelta?

Solución

La velocidad media viene dada por la expresión: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Tomaremos como punto de referencia para indicar posiciones el punto de partida de la barca en el viaje de ida y sentido positivo hacia la otra orilla del río.

a) Velocidad media en el viaje de ida.

El desplazamiento en este viaje es: $\Delta x = 360 \text{ m} - 0 = 360 \text{ m}$.

El intervalo de tiempo que ha transcurrido es $\Delta t = 80$ s.

Sustituimos en la expresión anterior:

$$v = \frac{360 \text{ m}}{80 \text{ s}} = 4{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_m = 4{,}5 \text{ m/s}$$

b) Velocidad media en el viaje de vuelta.

El desplazamiento en el viaje de vuelta es $\Delta x = 0 - 360 \text{ m} = -360$. El signo menos indica que la barca se ha movido en el sentido que hemos tomado como negativo. El tiempo que emplea en el viaje de vuelta es 90 s.

$$v_m = \frac{-360 \text{ m}}{90 \text{ s}} = -4{,}0 \text{ m/s}$$

$$v_m = -4{,}0 \text{ m/s}$$

c) Velocidad media en el viaje de ida y vuelta.

La barcaza regresa al punto de partida, por tanto el desplazamiento en el viaje de ida y vuelta es $\Delta x = 0$. En consecuencia:

$$v_m = 0$$

2.3. Una partícula se encuentra en el punto $x = 4{,}0$ m en el momento de empezar a contar el tiempo ($t = 0$) y se mueve con una velocidad constante de 8,0 m/s.

a) Escribir la ecuación de la posición en función del tiempo.
b) ¿En qué posición se encontrará al cabo de 10 s?
c) ¿Qué desplazamiento habrá efectuado en este intervalo de tiempo?

Solución

a) Ecuación de la posición.

Como se trata de un movimiento uniforme:

$$x = 4{,}0 \text{ m} + 8{,}0 \text{ m/s } t \quad (1)$$

b) Posición cuando t = 10 s.

Para $t = 10$ s en (1), tenemos:

$$x_{10} = 4{,}0 \text{ m} + 8{,}0 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 84 \text{ m}$$

$$x_{10} = 84 \text{ m}$$

c) Desplazamiento desde $t = 0$ a $t = 10$ s.

En el instante $t = 0$ la partícula ocupa la posición $x_0 = 4{,}0$ m y a $t = 10$ s se encuentra en $x_{10} = 84$ m. El desplazamiento será:

$$\Delta x = 84 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m} = 80 \text{ m}$$

$$\Delta x = 80 \text{ m}$$

2.4. La distancia media de la Tierra al Sol es de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m y el módulo de la velocidad de la luz es de $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. ¿Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

Solución

La ecuación de la posición es:

$$x = v\,t \quad (1)$$

Tomaremos como punto de referencia el Sol.

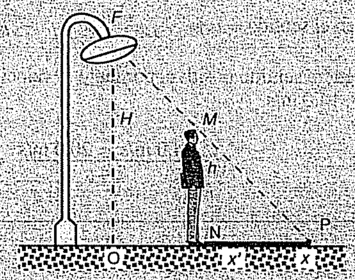
$$x = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m \text{ y } v = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

En (1) tenemos:

$$1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s t} \quad t = 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ s}$$

Tarda $5{,}0 \cdot 10^2$ s = 8,8 min

2.5. Un hombre de altura $h = 1{,}80$ m se desplaza a la velocidad de 1,2 m/s alejándose de una farola. La farola está a una altura $H = 4{,}2$ m, respecto al suelo. Calcular la velocidad v' de P, extremo de la sombra del hombre en el suelo.



Solución

Tomaremos como punto de referencia para indicar posiciones el pie de la vertical que pasa por la farola, O.

Los triángulos OFP y NMP son semejantes, ya que el lado OF del primero es paralelo al lado NM del segundo.

Por tanto podemos escribir:

$$\frac{x}{H} = \frac{x - x'}{h}; \quad hx = Hx - Hx'; \quad x = \frac{H}{H - h}\, x'$$

La posición x de la sombra es igual a la posición x' del hombre multiplicada por un factor constante $H/H-h$.

La velocidad del hombre es:

$$v' = \frac{dx'}{dt}$$

La velocidad de la sombra será:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{H}{H-h}\, x'\right)}{dt} = \frac{H}{H-h}\,\frac{dx'}{dt} = \frac{H}{H-h}\, v'$$

Es decir, las respectivas velocidades guardarán la misma relación que las posiciones.

$$v = \frac{4{,}20}{4{,}20 - 1{,}80} \cdot 1{,}20 \text{ m/s} = 2{,}10 \text{ m/s}$$

La velocidad de la sombra es $v = 2{,}10$ m/s.

2.6. La celeridad de un móvil disminuye de 20,0 m/s a 14,0 m/s en 2,5 s. Determinar la aceleración media.

a) Si el movimiento tiene lugar en el sentido $+x$.
b) Si el movimiento tiene lugar en el sentido $-x$.

Solución

Ecuación que expresa la aceleración media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

a) Movimiento en el sentido $+x$:

La velocidad tendrá sentido positivo, por tanto la velocidad inicial será $v_1 = 20{,}0$ m/s y la velocidad final será $v_2 = 14{,}0$ m/s.

$$a_m \frac{14{,}0 \text{ m/s} - 20{,}0 \text{ m/s}}{2{,}4 \text{ s}} = -2{,}5 \text{ m/s}^2$$

La aceleración media es $a_m = -2{,}5$ m/s.

b) Movimiento en el sentido $-x$:

La velocidad tendrá sentido negativo, por tanto la velocidad inicial será $v_1 = -20{,}0$ m/s y la velocidad final será $v_2 = -14{,}0$ m/s.

$$a_m \frac{-14{,}0 \text{ m/s} - (-20{,}0 \text{ m/s})}{2{,}4 \text{ s}} = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

La aceleración media es $a_m = 2{,}5$ m/s.

2.7. Un automóvil que marcha a 54 km/h acelera durante 20 s con una aceleración constante de 2,5 m/s². Calcular:

a) La velocidad al cabo de los 20 s.
b) El desplazamiento del automóvil durante el tiempo que ha acelerado.

Solución

$$54 \text{ km/h} \cdot 1000 \text{ m/1 km} \cdot 1 \text{ h/3600 s} = 15 \text{ m/s}$$

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$v = v_0 + at$ $\qquad v = 15 \text{ m/s} + 2{,}5 \text{ m/s}^2\, t$ (1)

$x = v_0\, t + 1/2\, a\, t^2$ $\qquad x = 15 \text{ m/s}\, t + 1/2\; 2{,}5 \text{ m/s}^2\, t^2$ (2)

Tomaremos como punto de referencia para indicar posiciones el punto donde empieza a acelerar.

a) Velocidad.

Haciendo $t = 20$ s en (1)

$$v_{20} = 15 \text{ m/s} + 2{,}5 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 65 \text{ m/s}$$

$$v_{20} = 65 \text{ m/s}$$

b) Desplazamiento.

Haciendo $t = 20$ s en (2) tenemos:

$$x_{20} = 15 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} + 1/2\; 2{,}5 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \text{ s})^2 = 300 \text{ m} + 500 \text{ m} = 800 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_{20} - x_0\,;\ \Delta x = 800 \text{ m} - 0 \text{ m} = 800 \text{ m}$$

Desplazamiento d $= 8{,}0 \cdot 10^2$ m.

2.8. Los fabricantes de una marca de automóviles anuncian que un determinado modelo de su marca se acelera de 30 km/h a 120 km/h en 8,0 s. Calcular la aceleración en m/s² y la distancia recorrida por el automóvil durante el tiempo de aceleración. Suponer constante la aceleración.

Solución

$$30 \text{ km/h} \cdot 1\,000 \text{ m/1 km} \cdot 1 \text{ h/3.600 s} = 8{,}33 \text{ m/s}$$

$$120 \text{ km/h} \cdot 1\,000 \text{ m/1 km} \cdot 1 \text{ h/3.600 s} = 33{,}33 \text{ m/s}$$

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$v = v_0 + at$ $\qquad v = 8{,}33 \text{ m/s} + a\, t$ (1)

$x = v_0\, t + 2\, a\, t^2$ $\qquad x = 8{,}33 \text{ m/s t} + 1/2\, a\, t^2$ (2)

Tomaremos como punto de referencia para indicar posiciones el punto de partida del automóvil.

Aceleración.

Haciendo $v = 33{,}33$ m/s y $t = 8{,}0$ s en (1) resulta:

$$33{,}33 \text{ m/s} = 8{,}33 \text{ m/s} + a \cdot 8{,}0 \text{ s};\ a = 3{,}12 \text{ m/s}^2$$

Distancia recorrida

De (2) resulta $x = 8{,}33 \text{ m/s } 8{,}0 \text{ s} + 1/2\; 3{,}12 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}0 \text{ s})^2;\ x = 166$ m

Aceleración: $a = 3{,}1$ m/s²
Distancia recorrida: $1{,}7 \cdot 10^2$ m

2.9. La rampa de aceleración de una autopista tiene una longitud de 360 m. Un automovilista desea entrar en la autopista a una velocidad de 100 km/h. ¿Qué aceleración hay que aplicar al vehículo para que tenga esta velocidad al llegar al final de la rampa?

Solución

$$100 \text{ km/h} \cdot 1000 \text{ m/km} \cdot 1\text{h}/3600 \text{ s} = 27{,}77 \text{ m/s}$$

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v = v_0 + at \qquad 27{,}77 \text{ m/s} = a\,t \qquad (1)$$

$$x = v_0\,t + 1/2\,a\,t^2 \qquad 360 \text{ m} = 1/2\,a\,t^2 \qquad (2)$$

Tomaremos como punto de referencia para indicar posiciones el origen de la rampa.
Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Como nos interesa averiguar la aceleración despejamos el tiempo en (1) y los sustituimos en (2)

$$t = \frac{27{,}7 \text{ m/s}}{a}; \; 360 \text{ m} = 1/2\,a\left(\frac{27{,}7 \text{ m/s}}{a}\right)^2$$

$$a = 1{,}07 \text{ m/s}^2$$

2.10. Una motocicleta sale de un punto A con una aceleración de 0,60 m/s^2 y alcanza una velocidad de 12 m/s. Continúa a esta velocidad hasta que se encuentra a 276 m de A, frena con una deceleración que supondremos constante y se detiene en B, situado a 318 m de A. ¿Qué tiempo tardó la motocicleta en ir desde A hasta B?

Solución

Primera etapa

Sigue un movimiento uniformemente acelerado.

Ecuaciones de la velocidad y del desplazamiento:

$$v = v_0 + a\,t \qquad v = 0{,}60 \text{ m/s}^2\,t \qquad (1)$$

$$d = v_0\,\Delta t + 1/2\,a\,\Delta t^2 \qquad d = 1/2\;0{,}60 \text{ m/s}^2\,\Delta t^2 \qquad (2)$$

Hemos tomado como origen de tiempos el momento en que sale la motocicleta.
Haciendo $v = 12$ m/s en (1) tenemos:

$$12 \text{ m/s} = 0{,}60 \text{ m/s}^2\,t;\; t = 20 \text{ s}$$

Para $t = 20$ s en (2) tenemos:

$$d = 1/2\;0{,}60 \text{ m/s}^2\,(20 \text{ s})^2 = 120 \text{ m}$$

El tiempo que ha durado la primera etapa es $t_1 = 20$ s.

Segunda etapa

Sigue un movimiento uniforme.

Ecuación del desplazamiento:

$$d = v\,\Delta t \qquad d = 12 \text{ m/s}\,\Delta t \qquad (3)$$

Tomamos como origen de tiempos el momento en que se inicia esta segunda etapa.
La posición inicial en esta segunda etapa es 120 m y la posición final es 276 m. El desplazamiento en esta segunda etapa es:

$$d = 276 \text{ m} - 120 \text{ m} = 156 \text{ m}$$

Haciendo $d = 156$ m en (3) resulta:

$$156 \text{ m} = 12 \text{ m/s}\,t;\; t = 13 \text{ s}$$

El tiempo que ha durado la segunda etapa es $t_2 = 13$ s.

Tercera etapa

Sigue un movimiento uniformemente acelerado, pero en este caso la aceleración es negativa.

Ecuaciones de la velocidad y del desplazamiento:

$$v = v_0 + a\,t \qquad v = 12 \text{ m/s} + a\,t \qquad (4)$$

$$d = v_0\,\Delta t + 1/2\,a\,\Delta t^2 \qquad d = 12 \text{ m/s}\,\Delta t + 1/2\,a\,\Delta t^2 \qquad (5)$$

Tomamos como origen de tiempos el momento en que comienza la tercera etapa, por tanto, t y Δt coinciden.

Haciendo $v = 0$ en (4) y $d = 318 \text{ m} - 276 \text{ m} = 42$ m en (5), tenemos:

$$0 = 12 \text{ m/s} + a\,t \qquad (6)$$

$$42 \text{ m} = 12 \text{ m/s}\,t + 1/2\,a\,t^2 \qquad (7)$$

Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Despejaremos a en (6) y lo sustituiremos en (7):

$$a = \frac{-12 \text{ m/s}}{t};\; 42 \text{ m} = 12 \text{ m/s}\,t + 1/2\left(\frac{-12 \text{ m/s}}{t}\right)t^2;\; t = 7{,}0 \text{ s}$$

El tiempo que ha durado la tercera etapa es $t_3 = 7{,}0$ s.

El tiempo total es $t = 20 \text{ s} + 13 \text{ s} + 7{,}0 \text{ s} = 40$ s.

2.11. La posición de un móvil viene dada por la ecuación $x = t^3 - 6{,}0\,t^2 - 15\,t + 40$, donde x está expresado en metros y t en segundos. Hallar:

a) El instante en que la velocidad se anula.
b) La posición en este instante.
c) La aceleración en este instante.
d) El desplazamiento efectuado por el móvil desde el momento inicial hasta que se anula la velocidad.

Solución

Ecuaciones de la posición de la velocidad y de la aceleración:

$$x = t^3 - 6{,}0\,t^2 - 15\,t + 40 \qquad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt}\,;\ v = 3t^2 - 12t - 15 \qquad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt}\,;\ a = 6t - 12 \qquad (3)$$

a) Instante en que se anula la velocidad.

Haciendo $v = 0$ en (2):

$$0 = 3t^2 - 12t - 15$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado resulta $t = -1{,}0$ y $t = 5{,}0$ s. De estas dos soluciones sólo nos interesa $t = 5{,}0$ s que corresponde a un instante posterior al de inicio del movimiento.

$$t = 5{,}0 \text{ s}$$

b) Posición en el instante en que se anula la velocidad.

Haciendo $t = 5{,}0$ s en (1):

$$x_5 = (5{,}0)^3 - 6{,}0\,(5{,}0)^2 - 15\,(5{,}0) + 40 = -\,60 \text{ m}$$

$$x_5 = -60 \text{ m}$$

c) Aceleración en el instante en que se anula la velocidad.

Haciendo $t = 5{,}0$ s en (3):

$$a_5 = 6\,(5{,}0) - 12 = 18 \text{ m/s}^2$$

$$a = 18 \text{ m/s}^2$$

d) Desplazamiento efectuado por el móvil.

$$x_0 = 40 \text{ m},\ x_5 = -60 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_5 - x_0;\ \Delta x = -60 \text{ m} - 40 \text{ m} = -100\ m$$

$$\Delta x = -\,100 \text{ m}$$

2.12. La velocidad de un móvil que describe una trayectoria rectilínea viene dada por la expresión $v = 40 - 8{,}0\,t$, SI. Cuando $t = 2{,}0$ s, el móvil dista 80 m del origen. Determinar:

a) La expresión general de la distancia al origen.
b) La posición inicial.
c) La aceleración.
d) La posición en el instante en que se anula la velocidad.

Solución

a) Ecuación de la distancia al origen.

$$x = \int v\,dt;\ x = \int 40 - 8{,}0\,t\,dt = 40\,t - 4{,}0\,t^2 + C;\ x = 40\,t - 4{,}0\,t^2 + C$$

C es una constante de integración que hay que determinar; para ello haremos $x = 80$ m y $t = 2{,}0$ s en la ecuación anterior:

$$80 = 40 \cdot 2 - 4{,}0 \cdot 2^2 + C;\ \ C = 16$$

$$x = 40\,t - 4{,}0\,t^2 + 16 \qquad (1)$$

b) Posición inicial.

Haciendo $t = 0$ en (1)

$$x_0 = 16$$

Posición inicial $x_0 = 16$ m.

c) Aceleración.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad a = \frac{d\,(40 - 8{,}0\,t)}{dt} = -8{,}0$$

Aceleración $a = -\,8{,}0$ m/s².

d) Posición en el instante en que se anula la velocidad.

La ecuación de velocidad es $v = 40 - 8{,}0\,t$.

Haciendo $v = 0$ en esta ecuación resulta:

$$0 = 40 - 8{,}0\,t;\quad t = 5{,}0 \text{ s}$$

Haciendo $t = 5{,}0$ s en (1):

$$x_5 = 40 \cdot 5 - 4{,}0 \cdot 5{,}0^2 + 16;\ x_5 = 116 \text{ m}$$

Posición en el instante en que se anula la velocidad $x_5 = 1{,}2 \cdot 10^2$ m.

CAÍDA LIBRE

2.13. Una pelota cae desde una torre de 125 m de altura. Calcular:

a) El tiempo que tarda en llegar al suelo.
b) La velocidad en el momento de llegar al suelo.

Solución

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v = gt \qquad v = -9{,}81 \text{ m/s}^2\ t \qquad (1)$$

$$y = y_0 + 1/2\ g\ t^2 \qquad y = 125 \text{ m} - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t^2 \qquad (2)$$

Hemos tomado el pie de la torre como punto de referencia para indicar posiciones, y positivo hacia arriba.

a) Tiempo de caída.

Cuando la pelota llega al suelo $y = 0$, por tanto, haciendo $y = 0$ en (2) tenemos:

$$0 = 125 \text{ m} - 1/2\, 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad t = 5{,}048 \text{ s}$$

$$t = 5{,}05 \text{ s}$$

b) Velocidad al llegar al suelo.

Haciendo $t = 5{,}048$ s en (1):

$$v = -9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 5{,}048 \text{ s} = -49{,}52 \text{ m/s}$$

$$v = -49{,}5 \text{ m/s}$$

2.14. Un niño lanza una pelota desde una ventana situada a 20 m del suelo con una velocidad dirigida hacia arriba de 14,7 m/s. Hallar:

a) La máxima altura alcanzada por la pelota.
b) La velocidad de la pelota a los 1,0 s y a los 2,5 s después de su lanzamiento.
c) El tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo y la velocidad correspondiente.

Solución

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v = 14{,}7 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad (1)$$

$$y = 20 \text{ m} + 14{,}7 \text{ m/s}\, t - 1/2\, 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (2)$$

Tomaremos el suelo como punto de referencia para indicar posiciones y sentido positivo hacia arriba.

a) Altura máxima.

Para calcular la posición mediante (2), necesitamos el tiempo. En el instante en que la pelota alcanza la altura máxima, la velocidad se anula. Haciendo $v = 0$ en (1)

$$0 = 14{,}7 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \text{t} \qquad t = 1{,}498 \text{ s}$$

$$y = 20 \text{ m} + 14{,}7 \text{ m/s} \cdot 1{,}498 - 1/2\, 9{,}81 \text{ m/s}^2\, (1{,}498 \text{ s})^2 = 31 \text{ m}$$

Altura máxima $y = 31$ m.

b) Velocidad para $t = 1{,}0$ s y para $t = 3{,}0$ s.

Haciendo $t = 1{,}0$ s en (1):

$$v_{1,0} = 14{,}7 \text{ m/ s}^2 - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0 \text{ s} = 4{,}9 \text{ m/s}$$

Haciendo $t = 2{,}5$ s en (1):

$$v_{2,5} = 14{,}7 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}5 \text{ s} = -9{,}8 \text{ m/s}$$

Al cabo de 1,0 s la pelota tiene velocidad positiva, es decir, está subiendo y al cabo de 2,5 s la velocidad es negativa, esto quiere decir que ya ha alcanzado la altura máxima, y ya está bajando.

c) Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad en este momento.

Cuando llega al suelo $y = 0$, haciendo $y = 0$ en (2).

$0 = 20 \text{ m} + 14{,}7 \text{ m/s t} - 1/2\, 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2$, al resolver esta ecuación resulta $t = -1{,}01$ s y $t = 4{,}01$ s. Sólo nos interesa la solución $t = 4{,}01$ s que corresponde a un instante después de lanzar la pelota.

En (1):

$$v = 14{,}7 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, 4{,}01 = -24{,}6 \text{ m/s}$$

$$t = 4{,}0 \text{ s} \quad v = -25 \text{ m/s}$$

2.15. Desde una ventana de un «castillo encantado» de un parque de atracciones un «mago» deja caer pequeños paquetes que contienen juguetes sobre un tren descubierto que pasa por debajo de la ventana. El «mago» suelta un paquete cada 1,0 s desde una altura de 3,5 m por encima de los niños que han de recogerlos. Cuando un niño recoge el primer paquete, el tren lleva una velocidad de 9,0 km/h y una aceleración de 0,60 m/s². ¿A qué distancia de este niño, medida horizontalmente en la dirección del tren, se encuentra el niño que recoge el segundo paquete?

Solución

El tiempo que transcurre desde que el primer niño recoge el paquete hasta que el segundo niño recoge su paquete es el intervalo de tiempo que media desde que el «mago» lanza el primer paquete y el segundo paquete. Durante este tiempo el tren se ha desplazado una distancia d, como el tren sigue un movimiento con aceleración constante, la ecuación que nos da el desplazamiento es:

$$d = v_0\, \Delta t + 1/2 \text{ a}\, \Delta t^2$$

$$9{,}0 \text{ km/h} \cdot 1\,000 \text{ m/km} \cdot 1\text{h}/3.600 \text{ s} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Para $\Delta t = 1{,}0$ s, el desplazamiento será:

$$d = 2{,}5 \text{ m/s} \cdot 1{,}0 \text{ s} + 1/2\, 0{,}60 \text{ m/s}^2 \cdot (1{,}0 \text{ s})^2 = 2{,}8 \text{ m}$$

Distancia 2,8 m.

2.16. Se lanza una pelota con una velocidad de 12 m/s dirigida verticalmente hacia arriba desde la ventana de un edificio. ¿En qué momento alcanzará otra ventana situada 7,0 m por encima del punto donde se ha lanzado la pelota y qué velocidad tendrá la pelota en este instante?

Solución

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad (1)$$

$$y = 12 \text{ m/s}\, t - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (2)$$

Hemos tomado como punto de referencia para indicar posiciones el punto de la ventana desde donde se lanza la pelota, sentido positivo hacia arriba. Empezamos a contar el tiempo en el momento en que se lanza la pelota.

Cuando la pelota alcanza la segunda ventana, $y = 7{,}0$ m, en (2) tenemos

$$7{,}0 \text{ m} = 12 \text{ m/s}\, t - 1/2\;\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado resulta $t = 0{,}960$ s y $t = 1{,}48$ s. La pelota pasa en dos momentos distintos por el mismo punto, uno es a la subida y el otro a la bajada.

La velocidad en cada uno de estos instantes es

$$v_1 = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}960 \text{ s} = 2{,}58 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}48 \text{ s} = -2{,}51 \text{ m/s}$$

Cuando $t = 0{,}960$ s, la velocidad es positiva, quiere decir que la pelota está subiendo. Cuando $t = 1{,}48$ s, la velocidad es negativa, la pelota está bajando, corresponde a un momento posterior al que la pelota ha alcanzado la altura máxima, se ha detenido instantáneamente y ha iniciado el descenso.

$$t_1 = 0{,}96 \text{ s} \qquad t_2 = 1{,}5 \text{ s}$$

$$v_1 = 2{,}6 \text{ m/s} \qquad v_2 = -2{,}5 \text{ m/s}$$

2.17. Desde un globo que asciende a una velocidad constante de 12 m/s se suelta un lastre. Al cabo de 10 s y referido al lastre:

a) ¿Qué velocidad tendrá?
b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se encontrará?
c) ¿Qué distancia, medida sobre la trayectoria, habrá recorrido?

Solución

Ecuaciones de la velocidad y del desplazamiento: el lastre sale del globo con la misma velocidad que lleva éste, por tanto $v_0 = 12$ m/s.

$$v = v_0 + g\, t \qquad v = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad (1)$$

$$d = v_0\, \Delta t + 2\, g\, \Delta t^2 \qquad d = 12 \text{ m/s}\, \Delta t - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, \Delta t^2 \qquad (2)$$

Hemos tomado como punto de referencia para indicar posiciones la posición del globo en el momento en que se suelta el lastre, positivo hacia arriba. Como origen de tiempos se toma el momento en que sale el lastre del globo.

a) Velocidad para $t = 10$ s.

Haciendo $t = 10$ s en (1) escribimos:

$$v_{10} = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ s} = -86{,}1 \text{ m/s}$$

$$v_{10} = -86 \text{ m/s}$$

b) Haciendo $\Delta t = 10$ s en (2) tenemos:

$$d = 12 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (10 \text{ s})^2 = -371 \text{ m}$$

Distancia del punto de partida $3{,}7 \cdot 10^2$ m, por debajo del punto de lanzamiento.

c) Distancia recorrida sobre la trayectoria.

La velocidad del lastre al salir del globo es 12 m/s, al cabo de 10 s es -86 m/s, esto quiere decir, de acuerdo con el criterio de signos adoptado, que al principio el lastre asciende, se detiene y luego desciende.

Tiempo de ascenso. Haciendo $v = 0$ en (1) tenemos:

$$0 = 12 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad t = 1{,}22 \text{ s} \qquad t_1 = 1{,}22 \text{ s}$$

Desplazamiento durante el ascenso:

$$d_1 = 12 \text{ m/s} \cdot 1{,}22 \text{ s} - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (1{,}22 \text{ s})^2 = 7{,}32 \text{ m}$$

Tiempo de descenso:

$$t_2 = 10\, s - 1{,}22 \text{ s} = 8{,}78 \text{ s}$$

Desplazamiento durante el descenso. Cuando inicia el descenso la velocidad inicial es cero, por tanto

$$d_2 = -1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}78 \text{ s})^2 = -378{,}1 \text{ m}$$

Distancia recorrida sobre la trayectoria = 7,32 m + 378,1 m = 385,42 m.

Distancia recorrida $3{,}9 \cdot 10^2$ m.

2.18. Una pelota que desciende pasa por delante de una ventana de 1,40 m de altura durante 0,10 s.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el punto más bajo de la ventana?
b) ¿De qué altura proviene? (La velocidad inicial de la pelota es cero.)

Solución

a) Velocidad de la pelota.

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v = v_0 + g \text{ m/s}^2\, t \qquad (1)$$

$$y = v_0\, t + 1/2\; g \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (2)$$

Tomaremos como origen para fijar posiciones la parte superior de la ventana, sentido positivo hacia abajo.
Para calcular la velocidad en (1) no conocemos la velocidad inicial. Podemos calcularla en (2), haciendo $y = 1{,}40$ m y $t = 0{,}10$ s.

$$1{,}40 \text{ m} = v_0\, 0{,}10 \text{ s} + 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}10 \text{ s})^2$$

$$v_0 = 13{,}5 \text{ m/s}$$

Esta es la velocidad cuando la pelota pasa por la parte superior de la ventana.
La ecuación de la velocidad es, por tanto:

$$v = 13{,}5 \text{ m/s} + 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t$$

Cuando la pelota pasa por la parte inferior de la ventana han transcurrido 0,10 s, la velocidad en este momento será:

$$v = 13{,}5 \text{ m/s} + 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}10 \text{ s} = 14{,}4 \text{ m/s}$$

$$v = 14 \text{ m/s}$$

b) Altura de donde proviene la pelota.

Tomaremos ahora como referencia para fijar posiciones el punto de partida de la pelota y sentido positivo hacia abajo. Las ecuaciones del movimiento son:

$$v = 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad (3)$$

$$y = 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (4)$$

Para averiguar el tiempo que ha tardado la pelota en llegar al borde superior de la ventana, habrá que tener en cuenta que cuando llega a este punto la velocidad es 13,5 m/s. En (3) tenemos:

$$13{,}5 \text{ m/s} = 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad t = 1{,}376 \text{ s}$$

Haciendo $t = 1{,}376$ s en (4) resulta:

$$y_{(1{,}38)} = 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (1{,}376 \text{ s})^2 = 9{,}28 \text{ m}$$

La pelota cae desde una altura de 9,3 m por encima de la parte superior de la ventana.

CAÍDA DE UNA GOTA DE AGUA

2.19. Si no tenemos en cuenta el empuje ejercido por el aire, pero sí la fricción con el aire, la aceleración de una gota de lluvia, supuesta esférica, viene dada por la expresión $a = g - bv$, (se ha tomado sentido positivo hacia abajo), b es una constante que depende del radio de la gota. Determinar:

a) La expresión de la velocidad en función del tiempo.
b) Demostrar que la velocidad alcanza un valor límite y calcular este valor para una gota de 1 mm de diámetro, para la que $b = 0{,}33$ s^{-1}. Suponer que para $t = 0$, $v_0 = 0$.

Solución

a) Expresión de la velocidad.

Obsérvese que en este caso la aceleración no viene expresada en función del tiempo, sino que está expresada en función de la velocidad.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad g - bv = \frac{dv}{dt}$$

Se trata de una ecuación diferencial de variables separadas, que podemos escribir:

$$\frac{dv}{g - bv} = dt$$

Integrando resulta:

$$\frac{\ln (g - bv)}{-b} = t + C$$

C es una constante de integración que podemos calcular fácilmente si tenemos en cuenta que para $t = 0$, $v_0 = 0$.

$$\frac{\ln g}{-b} = C\text{:} \quad \frac{\ln (g - bv)}{-b} = t + \frac{\ln g}{-b}\text{;} \ \ln (g - bv) - \ln g = -bt\text{;} \ \ln \frac{g - bv}{g} = -bt$$

Que podemos expresar en forma exponencial:

$$v = \frac{g}{b}(1 - e^{-bt}) \qquad (1)$$

b) Velocidad límite.

En (1), cuando t tiende a infinito, e^{-bt} tiende a cero.

La velocidad límite será $v = \frac{g}{b}$.

Haciendo $b = 0{,}33$ s^{-1}, tenemos:

$$v = \frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}33 \text{ s}^{-1}} = 29{,}7 \text{ m/s}$$

Velocidad límite $v = 30$ m/s.

La velocidad límite puede calcularse de otra forma.
Para que la velocidad no varíe, es necesario que la aceleración se anule.

$$a = g - b\,v \qquad 0 = g - b\,v \qquad v = \frac{g}{b}$$

Que coincide con el valor calculado.

MOVIMIENTO RELATIVO

2.20. Un automóvil A circula por una avenida a 35 km/h respecto a la calle. ¿Cuál será su velocidad respecto a otro automóvil B que va delante de él a 50 km/h?

Solución

La ecuación que relaciona las velocidades referidas a dos puntos de referencia, uno en movimiento respecto al otro es:

$$v_A = v_B + v_{AB}$$

Sustituimos y resulta:

$$35 \text{ km/h} = 50 \text{ km/h} + v_{AB} \qquad v_{AB} = -15 \text{ km/h}$$

Desde el automóvil B se ve moverse al automóvil A a 15 km/h en sentido contrario al de su movimiento, el automóvil se está alejando.

2.21. El conductor de un coche que sale de una curva a 85 km/h observa que a una distancia de 40 m hay un camión que acaba de salir de un camino y que circula a una velocidad de 30 km/h en el mismo sentido que el automóvil. Como se acerca un cambio de rasante, el automóvil no puede adelantar al camión y para no colisionar debe frenar. Calcular la aceleración de frenado del automóvil.

Solución

Para que el coche no choque con el camión es suficiente que cuando llegue a la altura del camión ambos tengan la misma velocidad respecto a la carretera. Parece, por tanto, que es mejor referir el movimiento del automóvil al camión en lugar de referirlo a la carretera.

Al salir de la curva la velocidad del automóvil respecto al camión es:

$$v_a = v_{ac} + v_c \qquad (1)$$

v_a es la velocidad del automóvil respecto a la carretera, v_{ac} es la velocidad del automóvil respecto al camión y v_c es la velocidad del camión respecto a la carretera.

En (1)

$$v_{ac} = 85 \text{ km/h} - 30 \text{ km/h} = 55 \text{ km/h}$$

Este problema puede plantearse de la siguiente forma: ¿con qué aceleración debe frenar el automóvil cuando va a 55 km/h respecto al camión para que no choque con el camión que se encuentra a una distancia de 40 m? O lo que es lo mismo, para que cuando llegue a la altura del camión, la velocidad del automóvil respecto al camión sea cero.

$$55 \text{ km/h} = 15{,}2 \text{ m/s}$$

Ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$$v_{ac} = v_{a\,c(0)} + a_{ac}\, t \qquad v_{ac} = 15{,}2\ m/s + a_{ac}\, t \qquad (2)$$

$$x_{ac} = x_{ac\,(0)} + v_{ac(0)}\, t + 1/2\, a_{ac}\, t^2 \qquad x_{ac} = -40 \text{ m} + 15{,}2 \text{ m/s}\, t + 1/2\, a_{ac}\, t^2 \qquad (3)$$

Hemos tomado como referencia la posición del camión, sentido positivo el del movimiento del automóvil y del camión.

De (2) y (3) se obtiene:

$$0 = 15{,}2 \text{ m/s} + a_{ac}\, t \qquad (4)$$

$$0 = -40 \text{ m} + 15{,}2 \text{ m/s}\, t + 1/2\, a_{ac}\, t^2 \qquad (5)$$

Despejamos el tiempo en (4)

$$t = \frac{-15 \text{ m/s}}{a_{ac}}$$

y sustituimos en (5)

$$0 = -40 \text{ m} + 15{,}2 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{-15 \text{ m/s}}{a_{ac}}\right) + \frac{1}{2}\, a_{ac} \left(\frac{-15 \text{ m/s}}{a_{ac}}\right)^2$$

Al resolver esta ecuación resulta:

$$a_{ac} = -2{,}88 \text{ m/s}^2$$

La aceleración del automóvil respecto a la carretera es:

$$a_a = a_{ac} + a_c$$

Como la aceleración del camión respecto a la carretera es cero:

$$a_a = a_{ac} \qquad a_a = -2{,}88 \text{ m/s}^2$$

$$a = -2{,}9 \text{ m/s}^2$$

2.22. Desde un montacargas sin techo que sube a la velocidad de 2,0 m/s respecto al suelo, se lanza un objeto hacia arriba con una celeridad de 19,5 m/s respecto al suelo. ¿Cuánto habrá subido el ascensor respecto al suelo cuando el objeto caiga de nuevo al ascensor?

Solución

Este problema que aparece como propuesto con el número 1.27, puede resolverse también considerando el movimiento del objeto respecto al montacargas.

Es un movimiento de caída libre; como el montacargas no está acelerado, la aceleración del objeto respecto al montacargas es la misma que la aceleración del objeto respecto al suelo. Ecuación de la posición:

$$y_{Om} = v_{Om\,(0)}\, t + 1/2\, g\, t^2 \qquad (1)$$

y_{Om} es la posición del objeto respecto al montacargas, $v_{Om\,(0)}$ es la velocidad inicial del objeto respecto al montacargas. Tomaremos sentido positivo hacia arriba.

Velocidad de salida del objeto respecto a la plataforma:

$$v_O = v_{Om} + v_m$$

v_O y v_m representan la velocidad del objeto y del montacargas respecto al suelo, respectivamente. Sustituimos y resulta:

$$19{,}5 \text{ m/s} = v_{Om(0)} + 2{,}0 \text{ m/s} \qquad v_{Om(0)} = 17{,}5 \text{ m/s}$$

Cuando el objeto vuelve al montacargas $y_{Om} = 0$. En (1) tenemos:

$$0 = 17{,}5 \text{ m/s}\, t - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2$$

Al resolver esta ecuación

$$t = 0 \qquad t = 3{,}567 \text{ s}$$

La primera solución corresponde al momento de partida. El objeto tarda 3,56 s en volver al montacargas. Durante este intervalo de tiempo, el montacargas ha subido:

$$\Delta y = 2{,}0 \text{ m/s} \cdot 3{,}567 \text{ s} = 7{,}13 \text{ s}$$

El montacargas ha subido 7,1 m.

CUESTIONES

2.1. Una chica parte de la puerta de su casa y se dirige a un buzón de correos que está al final de la avenida a una distancia b y vuelve a la puerta de su casa. El desplazamiento de esta chica es:

a) 2b *b)* b/2 *c)* Cero. *d)* No se puede decir nada sin más datos.

2.2. Una barcaza efectúa un viaje de ida y vuelta cruzando un río de 360 m de ancho. En la ida tarda 80 s. El regreso lo realiza en 90 s. La velocidad media de este viaje vale:

a) 4,5 m/s *b)* 6,0 m/s *c)* 8,0 m/s *d)* 0

2.3. Si representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo en un movimiento rectilíneo y uniforme resulta:

a) Una parábola.

b) Una recta de pendiente igual a la velocidad.

c) Una recta paralela al eje x.

d) Una curva diferente en cada caso.

2.4. Si representamos gráficamente las posiciones frente a los tiempos en un movimiento rectilíneo y uniforme resulta:

a) Una parábola.

b) Una recta de pendiente igual a la velocidad.

c) Una recta paralela al eje x.

d) Una curva diferente en cada caso.

2.5. Un móvil que se mueve por una trayectoria rectilínea avanza 6,0 m hacia la derecha en 1,5 s, 3,0 m hacia la izquierda en 1,0 s, 4,0 m hacia la derecha en 2,0 s y 1,0 m hacia la izquierda en 0,50 s. Tomando sentido positivo hacia la derecha, la velocidad media es:

a) 2,8 m/s *b)* 6,0 m/s *c)* 5,2 m/s *d)* 1,2 m/s

2.6. La velocidad media en un intervalo de tiempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, es igual a la media aritmética de las velocidades v_2 y v_1, correspondientes a los instantes t_2 y t_1, respectivamente:

a) Siempre.

b) Sólo en el movimiento rectilíneo y uniforme.

c) En el movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

d) Sólo si la aceleración es constante y positiva.

2.7. Un movimiento rectilíneo en el que los desplazamientos son proporcionales a los tiempos es:

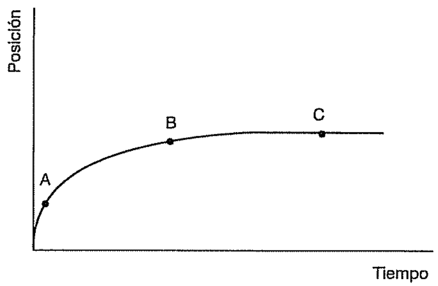
a) Un movimiento de velocidad variable.

b) Un movimiento uniforme.

c) Un movimiento uniformemente acelerado.

d) Un movimiento de aceleración variable.

2.8. La figura representa la posición frente al tiempo de un móvil que sigue un movimiento rectilíneo. Podemos afirmar:



a) Las velocidades en los puntos A, B y C son iguales.

b) En el punto B, el móvil está detenido.

c) La velocidad en el punto B es mayor que en los otros dos puntos.

d) La velocidad en el punto A es mayor que en el punto B.

2.9. En un gráfico se representa la velocidad frente al tiempo. La pendiente de la tangente a la curva en un punto es igual a:

a) La aceleración en este punto.

b) La velocidad inicial.

c) La velocidad en este punto.

d) La distancia recorrida en el instante correspondiente al punto en el que se ha trazado la tangente.

2.10. Cuando aumenta el módulo de la velocidad de un objeto que tiene una velocidad negativa y que tiene un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, podemos decir que la aceleración es:

a) Nula. *b)* Positiva. *c)* Negativa. *d)* Igual a 3 m/s^2.

2.11. Para que se detenga un móvil que se mueve en la zona de posiciones positivas y en sentido negativo es necesario que:

a) La aceleración sea positiva.

b) No es posible que se dé una situación así.

c) La aceleración tenga un valor muy elevado.

d) Que la aceleración sea negativa.

2.12. En una caída libre partiendo del reposo, los desplazamientos son:

a) Proporcionales a los tiempos al cuadrado.

b) Proporcionales a los tiempos.

c) Inversamente proporcionales a los tiempos.

d) Proporcionales a la raíz cuadrada de los tiempos.

2.13. Al representar gráficamente las posiciones frente al tiempo de una pelota que hemos lanzado verticalmente y que al bajar recogemos en la mano, resulta:

a) Una recta paralela al eje *y*.

b) Una parábola que presenta un máximo.

c) Una recta de pendiente igual a la velocidad.

d) Una recta paralela al eje *x*.

2.14. Cuando lanzamos una piedra hacia arriba, alcanza una altura máxima, se detiene y luego desciende. La aceleración en el punto de altura máxima es:

a) Cero.

b) La de la gravedad, pero dirigida hacia arriba.

c) La de la gravedad, pero dirigida hacia abajo.

d) El doble de la de la gravedad.

2.15. Al lanzar verticalmente hacia arriba un balón con una velocidad de 20 m/s, alcanza una altura máxima de:

a) 12 m *b)* 14 m *c)* 20 m *d)* 35 m

2.16. Un objeto que cae libremente desde una altura de 20 m recorre, en el último segundo de caída, una distancia de:

a) 20 m *b)* 15 m *c)* 10 m *d)* 5 m

2.17. En un ascensor que sube con una aceleración de 3,0 m/s^2 dirigida hacia arriba, cae la lámpara. Un observador situado en el ascensor la verá caer con una aceleración de módulo:

a) 7 m/s^2 *b)* 10 m/s^2 *c)* 3,0 m/s^2 *d)* 13 m/s^2

2.18. Imaginemos una persona que se encuentre en un ascensor en caída libre, si suelta un llavero, la aceleración del llavero respecto a esta persona será:

a) La de la gravedad.

b) El doble de la gravedad.

c) La mitad de la gravedad.

d) Cero.

2.19. Un automóvil A va por una carretera detrás de otro B que va más deprisa. Consideraremos positivo el sentido del movimiento de los automóviles. La velocidad de A vista desde B:

a) Es positiva, por eso parece que se está acercando.

b) Es negativa y parece que se aleja.

c) Es positiva y parece que se aleja.

d) Es negativa y parece que se acerca.

SOLUCIONES

2.1. *c)*	**2.6.** *b)*	**2.11.** *a)*	**2.16.** *b)*
2.2. *d)*	**2.7.** *b)*	**2.12.** *a)*	**2.17.** *d)*
2.3. *c)*	**2.8.** *d)*	**2.13.** *b)*	**2.18.** *d)*
2.4. *b)*	**2.9.** *a)*	**2.14.** *c)*	**2.19.** *b)*
2.5. *d)*	**2.10.** *c)*	**2.15.** *c)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

1. **Un avión recorre 2 000 km con una velocidad de 800 km/h. A causa del viento aumenta su velocidad hasta 1 200 km/h durante los siguientes 1 800 km. ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo que tarda en recorrer estas dos distancias?**

Sol.: 950 km/h

2. **Por una autopista de dos carriles circulan los automóviles en caravana a una velocidad de 80 km/h separados por una distancia de 65 m. ¿Cuántos automóviles circulan por hora por un determinado punto de la autopista? Considerar la longitud media de los coches igual a 4,2 m.**

Sol.: 2 314 automóviles por hora

3. **Un policía municipal observa un automóvil que circula por una calle en la que la velocidad de circulación está limitada a 40 km/h. El policía supone que el automóvil sobrepasa el límite de velocidad permitido e inicia rápidamente su persecución. Desde el momento en que el automóvil pasó a la altura del agente hasta que éste arranca la motocicleta han pasado 5 s, tiempo que tarda en subir a la moto y ponerla en marcha. El agente tarda 20 s más en dar alcance al automóvil y lo hace en un punto situado a 420 m del punto de partida. ¿A qué velocidad iba el automóvil?**

Sol.: 60 km/h

4. **Un barco A que se encuentra a 600 m del embarcadero lleva una velocidad de 15 m/s respecto al embarcadero. En el mismo instante, otro barco B se encuentra a 200 m del embarcadero y lleva una velocidad de 10 m/s también respecto al embarcadero. ¿A qué distancia de B se encontrará el barco A al cabo de 30 s?**

Sol.: $5{,}5 \cdot 10^2$ m

Sugerimos al lector que intente resolver el problema refiriendo el movimiento del barco B al barco A.

5. **Un automóvil circula a 45 km/h por una calle de una ciudad y observa que un semáforo se pone en ámbar. El semáforo está regulado de forma que el ámbar dura 3,0 s. El tiempo que transcurre desde que un conductor medio percibe una señal y aprieta el freno es de 0,70 s.**

a) ¿Qué deceleración mínima habrá que aplicar al automóvil para detenerlo antes de que el semáforo se ponga en rojo?

b) ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer el automóvil sin saltarse el semáforo en rojo?

Sol.: a) 5,4 m/s²; *b)* 23 m

6. **Una persona situada en el andén de una estación de ferrocarril, a la altura de la parte delantera de la locomotora de un tren de 100 m de longitud, observa cómo arranca el tren con una aceleración de 2,0 m/s². ¿Con qué velocidad verá pasar el extremo posterior del último vagón?**

Sol.: 20 m/s

7. **Un automóvil que sale de una estación de servicio de una autopista entra en la autopista a una velocidad de 90 km/h. Sigue acelerando con una aceleración constante de 1,5 m/s². ¿Qué distancia a lo largo de la autopista habrá recorrido el automóvil cuando su velocidad sea de 120 km/h?**

Sol.: $1{,}6 \cdot 10^2$ m

8. **Un coche eléctrico puede alcanzar una velocidad máxima de 108 km/h. La aceleración máxima es de 2,0 m/s² y la deceleración máxima es de 5,0 m/s². ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 1,0 km, si inicia el movimiento a partir del reposo y acelera con la máxima aceleración posible hasta alcanzar la velocidad de 108 km/h, y termina el recorrido con velocidad cero, habiendo frenado lo más rápidamente posible?**

Sol.: 44 s

9. **Una bala penetra en una tabla de 200 mm de espesor con una velocidad de 430 m/s y sale con una velocidad de 310 m/s.**

a) ¿Qué deceleración supuesta constante ha ejercido la tabla sobre la bala?

b) ¿Qué espesor debe tener como mínimo esta tabla para que la bala quede detenida en ella?

Sol.: a) $222 \cdot 10^3$ m/s²; 416 mm

10. **Un automóvil está detenido ante un semáforo. En el momento en que salta el verde y arranca el automóvil, éste es rebasado por un camión que circula por el carril de al lado a una velocidad de 36 km/h, el automóvil inicia el movimiento con una aceleración constante de 5,0 m/s² hasta que llega a una velocidad de 45 km/h y continúa con esta velocidad.**

a) ¿Cuánto tiempo tardará el automóvil en alcanzar el camión?

b) ¿A qué distancia del semáforo ocurrirá?

Sol.: a) 6,3 s; *b)* 63 m

11. **La posición de un objeto está relacionada con el tiempo por $x = At^2 - Bt + C$, donde $A = 8$ m/s², $B = 6$ m/s y $C = 4$ m.**

a) ¿Es un movimiento uniformemente acelerado? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la velocidad al cabo de 1 s?

Sol.: a) Sí; *b)* 10 m/s

12. **La ecuación que nos da la posición de un móvil viene dada por la expresión $x = 6t^3 - 2t^2 + 5$, SI.**

a) Calcular la posición en el instante $t = 3$ s.

b) Calcular el desplazamiento y la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 2$ s y $t = 4$ s.

Sol.: a) 149 m; *b)* 312 m y 156 m/s

13. **Un móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia al origen viene dada por la ecuación $x = 6t - t^2$, SI. Calcular:**

a) ¿En qué instante cambia el sentido del movimiento?

b) La posición del móvil en este instante.

Sol.: a) 3 s; *b)* 9 m

14 **La ecuación del movimiento de un cuerpo que se desplaza sobre una recta es $x = 8t - 3t^2$, SI.**

a) Calcular la velocidad media en los intervalos de $t = 0$ a $t = 1$ s y de $t = 0$ a $t = 4$ s.

b) Hallar la expresión de la velocidad media para el intervalo t, a $t + \Delta t$.

c) ¿Cuál es el valor límite de esta expresión cuando Δt tiende a cero?

Sol.: a) 5 m/s; −4 m/s; *b)* $8 - 6t - 3\,\Delta t$; *b)* $v = 8 - 6t$

15 **La velocidad de un móvil que describe una trayectoria rectilínea viene dada por la expresión $v = 40 - 8{,}0\,t$, SI. Cuando $t = 2{,}0$ s, el móvil dista 80 m del origen. Determinar:**

a) La expresión general de la distancia al origen.

b) La posición inicial.

c) La aceleración.

d) El instante en que la velocidad se anula y la posición en el mismo.

Sol.: a) $x = 40\,t - 4{,}0\,t^2 + 16$; *b)* 16 m; *c)* −8,0 m/s²; *d)* 5,0 s, $1{,}2 \cdot 10^2$ m

16 **Un móvil se mueve sobre el eje Ox de tal manera que la posición viene dada por $x = a + bt + ct^2$, donde $a = 2{,}25$ m, $b = 4{,}0$ m/s y $c = -1{,}0$ m/s².**

a) ¿En qué instante está parado (velocidad nula)?

b) ¿Cuándo pasa por el origen?

c) ¿Cuál es el alejamiento máximo del origen en sentido positivo?

Sol.: a) 2,0 s; *b)* 4,5 s; *c)* 6,3 m

17 **La aceleración de un objeto que está descendiendo puede expresarse $a = g - bv$ donde b es una constante y v la velocidad (se ha tomado sentido positivo el del movimiento, es decir, hacia abajo). Determinar:**

a) La expresión de la velocidad en función del tiempo.

b) La velocidad límite.

c) El momento en que alcanza la velocidad límite.

d) La ecuación de la posición en función del tiempo.

Sol.: a) $g/b\,(1 - e^{-bt})$; *b)* g/b; *c)* $t = \infty$; *d)* $g/b\,[1/b\,(e^{-bt} - 1) + t)]$.

CAÍDA LIBRE

18 **Se lanza una piedra hacia arriba con una velocidad de 20 m/s.**

a) ¿A qué altura llegará?

b) ¿Cuánto tiempo ha estado en el aire?

Hacer una gráfica velocidad-tiempo del movimiento de la piedra, desde que se lanza hasta que hayan pasado 6 s.

Sol.: a) 20 m; *b)* 2,0 s

19 **Un objeto en caída libre está descendiendo y al pasar por un determinado punto tiene una celeridad de 60,2 m/s. Calcular la velocidad al cabo de 5,0 s.**

a) Resolver el problema tomando sentido positivo hacia arriba.

b) Resolver el problema tomando sentido positivo hacia abajo.

Sol.: a) $-1{,}0 \cdot 10^2$ m/s; *b)* $1{,}0 \cdot 10^2$ m/s

20 **Resolver el problema anterior suponiendo que el objeto está subiendo.**

Sol.: a) 11 m/s; *b)* −11 m/s

21 **Desde una plataforma situada a 10 m del suelo se lanza verticalmente hacia arriba dos proyectiles con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 80 m/s y el segundo con una velocidad inicial de 100 m/s.**

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo a partir del lanzamiento del primero se encontrarán ambos a la misma altura?

b) ¿A qué altura sucederá?

c) ¿Qué velocidad tendrá cada uno en este momento?

Sol.: a) 5,5 s; *b)* 303 m; *c)* 26 m/s y 65 m/s

22 **Desde un globo que desciende con una celeridad constante de 12 m/s se suelta un lastre. Al cabo de 10 s:**

a) ¿Qué velocidad tendrá?

b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se encontrará?

c) ¿Qué distancia medida sobre la trayectoria habrá recorrido?

Sol.: a) $-1{,}1 \cdot 10^2$ m/s; *b)* $6{,}1 \cdot 10^2$ m/s; *c)* $6{,}1 \cdot 10^2$ m/s

23 **Un estudiante que quiere determinar la aceleración de la gravedad se deja caer, cronómetro en mano, desde la terraza de un edificio situada a una altura de 320 m del suelo. Un «Superman», que ha observado lo que sucede, desea salvar al estudiante y 5,0 s después, se lanza desde la misma terraza. ¿Con qué velocidad mínima deberá lanzarse el «Superman» para alcanzar al estudiante antes de que llegue al suelo?**

Sol.: 89 m/s hacia abajo.

24 **Desde un montacargas sin techo, que sube a la velocidad de 2,0 m/s respecto al suelo, se lanza un objeto hacia arriba con una celeridad de 19,5 m/s respecto al suelo. ¿Cuánto habrá subido el ascensor respecto al suelo cuando el objeto caiga de nuevo al ascensor?**

Sol.: 7,1 m

MOVIMIENTO RELATIVO

25 **Un avión lleva una velocidad respecto al aire de 800 km/h. El viento sopla de cola a una velocidad de 80 km/h.**

a) ¿Cuál es la velocidad del avión respecto a la torre de control?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer una distancia de 6 600 km?

Sol.: a) 880 km/h; *b)* 7,50 h

26 **Un marinero es capaz de nadar a una velocidad de 1,50 m/s respecto al agua. La corriente del río lleva una velocidad de 0,80 m/s. Este marinero nada 140 m río abajo y luego vuelve al punto de partida.**

a) Determinar la velocidad respecto a la orilla del río, del viaje de ida y del viaje de vuelta.

b) ¿Cuánto tiempo ha tardado en ir y volver?

Sol.: a) 2,40 m/s, 0,70 m/s; *b)* $2.6 \cdot 10^2$ s

27 **Un móvil A, que lleva una velocidad de 5,0 m/s y una aceleración de 1,0 m/s², se encuentra a una distancia de 180 m de otro móvil B que se mueve en sentido contrario por la misma trayectoria a 4,0 m/s y una aceleración de 2,0 m/s² en el sentido del movimiento. Determinar:**

a) El tiempo que tardarán en colisionan.

b) La distancia del punto en el que tiene lugar la colisión a la posición inicial de A.

c) Las respectivas velocidades en el momento de la colisión.

Sol.: a) 12 s; *b)* 132 m; *c)* 17 m/s y 28 m/s

28 **Un agente de la policía de tráfico situado en un determinado punto de una gran avenida observa mediante el radar que un automóvil se acerca a una velocidad de 90 km/h. El agente inicia la persecución del automóvil 4 s después de que pase a su altura, el vehículo conducido por el agente marcha con una aceleración de 3 m/s².**

a) ¿Cuánto tiempo tardará éste en dar alcance al automóvil?

b) ¿A qué distancia del punto donde se hallaba el agente lo habrá alcanzado?

Sol.: a) $2,0 \cdot 10^2$ s; *b)* $6 \cdot 10^2$ m

Este problema puede resolverse también gráficamente de una forma muy sencilla. Para ello basta representar en un mismo gráfico la curva posición-tiempo de cada vehículo, el punto de intersección de ambas curvas indica el tiempo empleado por el agente en dar alcance al automóvil y el lugar donde se ha producido.

CAPÍTULO 3

CINEMÁTICA. MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

3.1. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Consideraremos el movimiento de una partícula que se mueve en un plano, a este movimiento se le denomina movimiento bidimensional.

VECTOR DE POSICIÓN

Para indicar la posición de una partícula en el plano, que supondremos es el plano xy, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares. La posición de la partícula en un momento dado viene determinada por un vector que tiene su origen en el origen de coordenadas, punto O, y el extremo en el punto donde se halla la partícula, punto P, es el llamado vector de posición $\vec{r}$, Figura 1. Las componentes del vector de posición son las coordenadas del punto.

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son dos vectores unitarios dirigidos según el eje x y el eje y respectivamente.

La componente según un eje del vector de posición, y en general de cualquier vector, es igual al producto escalar del vector por un vector unitario dirigido según el eje, así por ejemplo, Figura 1,

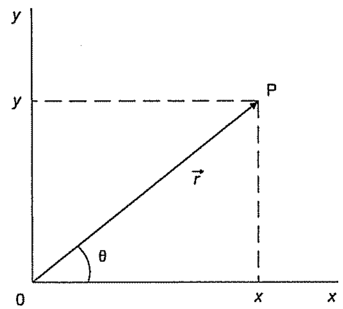


Figura 1

$$x = \vec{r} \cdot \hat{\imath} = r \cos \theta$$

Cuando una partícula se mueve respecto al punto de referencia O, el vector de posición es una función del tiempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Las componentes de $\vec{r}$ son también función del tiempo:

$$x = x \quad (t)$$

$$y = y \quad (t)$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas* o *ecuaciones del movimiento*. A partir de estas ecuaciones podemos conocer la posición del móvil. También podemos calcular a partir de estas ecuaciones la ecuación de la trayectoria que describe el móvil; para ello basta despejar el tiempo en una de ellas, por ejemplo la primera, y sustituirlo luego en la segunda. Se obtiene una ecuación del tipo $y = f(x)$.

VECTOR DESPLAZAMIENTO

Podemos dar el cambio de posición de un móvil mediante el *vector desplazamiento* Δr. Si en un cierto instante t_1, el móvil ocupa la posición $\vec{r}_1$ y en un instante posterior t_2, ocupa la posición $\vec{r}_2$ (Figura 2), el vector desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

El vector desplazamiento indica el cambio que ha tenido lugar tanto en el módulo de $\vec{r}$ como en la dirección del movimiento.

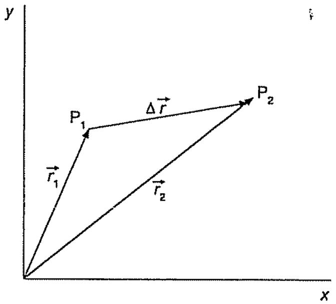


Figura 2

VELOCIDAD

Velocidad media

La velocidad media es un vector de la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{r}$ y módulo igual al cociente del módulo de $\Delta\vec{r}$ y Δt, Figura 3:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

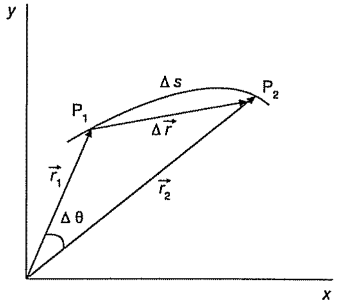


Figura 3

Velocidad instantánea

La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero. Se obtiene derivando el vector de posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocidad instantánea en el punto P_1 es un vector tangente a la trayectoria en este punto, sentido el del movimiento y su módulo es el módulo de la derivada del vector de posición respecto al tiempo, Figura 4.

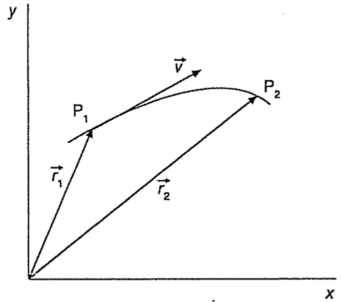


Figura 4

El módulo de la velocidad, denominado celeridad, puede calcularse de otra forma. El módulo de $\Delta\vec{r}$ es decir la longitud del segmento P_1P_2 (Figura 3) tiende a la longitud del arco P_1P_2, ΔS, cuando Δt tiende a cero; en efecto, cuando el ángulo $\Delta\theta$ se va haciendo más pequeño, la cuerda y el arco se van acercando, en el límite, cuando el tiempo tiende a cero, coinciden y podemos escribir:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Es decir, la celeridad puede obtenerse derivando respecto al tiempo la ecuación que nos da la longitud del arco descrito por el móvil en función del tiempo. Para escribir esta ecuación que será de la forma $S = S(t)$, habrá que tomar un punto de referencia en la propia curva, Figura 5.

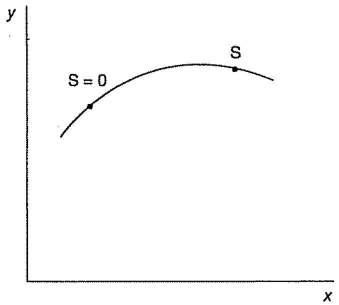


Figura 5

Componentes rectangulares de la velocidad

Al derivar el vector de posición $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$, como x e y son función del tiempo e $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son constantes, resulta:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\,(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\,\hat{i} + v_y\hat{j}$$

v_x y v_y son las componentes rectangulares de la velocidad, que podemos expresar:

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\hat{j}$$

ACELERACIÓN

Aceleración media

La aceleración media en un intervalo de tiempo Δt es el cociente entre la variación de velocidad $\Delta\vec{v}$ en este intervalo de tiempo y el intervalo de tiempo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La aceleración media es un vector de la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{v}$ y módulo igual al cociente del módulo de $\Delta\vec{v}$ y Δt (Figura 6). El vector $\Delta\vec{v}$ indica el cambio en la dirección y en el módulo de $\vec{v}$.

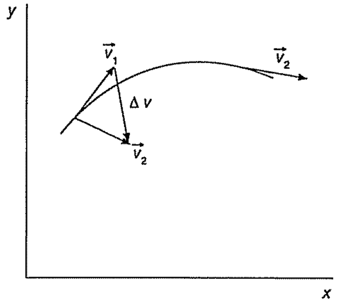


Figura 6

La aceleración instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

De la Figura 6 se deduce que el vector aceleración instantánea siempre se encuentra en la parte cóncava de la trayectoria curva, Figura 7.

Componentes rectangulares de la aceleración. Al derivar la velocidad $\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\hat{j}$, como v_x y v_y son función del tiempo e $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son constantes, resulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\,(v_x\hat{i} + v_y\,\hat{j})}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = a_x\,\hat{i} + a_y\hat{j}$$

a_x y a_y son las componentes rectangulares de la aceleración, que escribimos:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\hat{j}$$

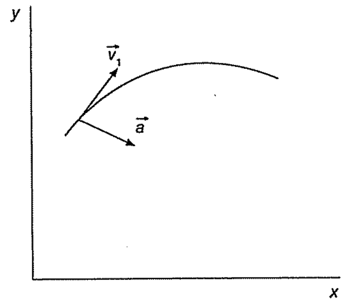


Figura 7

CASOS PARTICULARES

Movimiento de proyectiles

Cuando se lanza un objeto al aire en una dirección diferente a la vertical, este objeto sigue un movimiento que, si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, la aceleración es igual a la aceleración de la gravedad, se trata, por tanto, de un movimiento con aceleración constante. Consideraremos la componente horizontal positiva hacia la derecha y la componente vertical positiva hacia arriba.

$$a_x = 0 \qquad\qquad a_y = -g$$

Es decir el movimiento horizontal es uniforme y el movimiento vertical uniformemente acelerado. Si la velocidad de lanzamiento es $\vec{v}_0 = v_{x(0)}\,\hat{i} + v_{y(0)}\,\hat{j}$, las ecuaciones de la velocidad y de la posición serán:

$$v_x = v_{x(0)} \quad (1) \qquad\qquad v_y = v_{y(0)} - g\,t \quad (2)$$

$$x = v_{x(0)}\,t \quad (3) \qquad\qquad y = v_{y(0)}\,t - 1/2\,g\,t^2 \quad (4)$$

De estas ecuaciones se deduce que el objeto se mueve en el plano xy.

Objeto lanzado horizontalmente

Si el objeto se lanza en la dirección horizontal, la velocidad inicial sólo tiene una componente, la componente x.

$$\vec{v}_0 = v_{x(0)}\,\hat{i}$$

Las ecuaciones (3) y (4) se escriben:

$$x = v_{x(0)}\,t \qquad\qquad y = 1/2\,g\,t^2$$

Podemos deducir fácilmente que la ecuación de la trayectoria es:

$$y = \frac{g}{2v^2_{x(0)}}\,x^2$$

Que corresponde a una parábola (Figura 8).

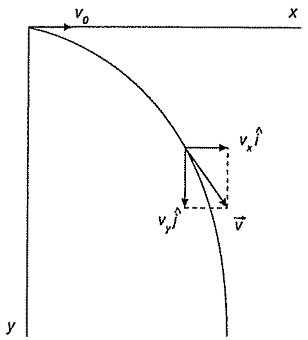


Figura 8

En el movimiento horizontal hemos tomado sentido positivo hacia la derecha y en el movimiento vertical hemos tomado sentido positivo hacia abajo. En la resolución de problemas puede modificarse este criterio cuando parezca más conveniente.

Objeto lanzado formando un ángulo con la horizontal

De la Figura 9 se deduce:

$v_{x(0)} = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_{y(0)} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se escriben:

$v_x = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g\,t$

$x = v_0\,t \cos\theta_0 \qquad y = v_0\,t \operatorname{sen}\theta_0 - 1/2\,g\,t^2$

El objeto también sigue una trayectoria parabólica (Figura 9), cuya ecuación es:

$$y = x \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

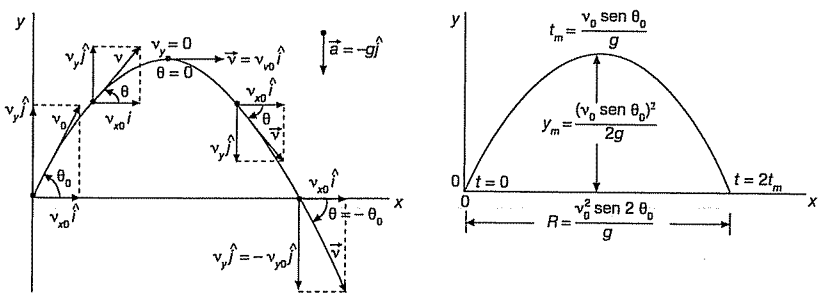


Figura 9

La altura máxima se alcanza en el instante en que se anula la componente vertical de la velocidad. La altura máxima viene dada por la ecuación:

$$y_m = \frac{(v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2}{2g}$$

La altura máxima se alcanza en el instante:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}$$

El desplazamiento horizontal correspondiente al punto en el que el objeto retorna a la altura de partida se denomina alcance, viene dado por la ecuación:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse analíticamente de forma muy sencilla, por lo que no es necesario recordarlas de memoria.

En el movimiento horizontal hemos tomado sentido positivo hacia la derecha y en el movimiento vertical hemos tomado sentido positivo hacia arriba. En la resolución de problemas puede modificarse este criterio cuando parezca más conveniente.

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento circular se da cuando la trayectoria que describe un objeto es una circunferencia. El vector velocidad es en todo instante tangente a la circunferencia.

Componentes intrínsecas de la aceleración

Cuando un punto describe un movimiento circular, la dirección de la velocidad varía en cada instante, por tanto, aunque el módulo de la velocidad de un movimiento circular sea constante, habrá aceleración. Por supuesto, también puede variar el módulo de la velocidad.

Estos aspectos pueden describirse descomponiendo la aceleración, Figura 10, en una componente paralela a la tangente a la circunferencia denominada *componente tangencial de la aceleración*, a_t, y otra *componente normal* a ésta, a_n; se denominan componente tangencial y componente normal de la aceleración, respectivamente. La aceleración vendrá expresada de la forma:

$$\vec{a} = a_t\,\hat{u}_t + a_n\,\hat{u}_n$$

$\hat{u}_t$ es un vector unitario tangente a la curva y sentido el del movimiento, $\hat{u}_n$ es un vector unitario de dirección normal a la curva y sentido hacia la parte cóncava de la trayectoria.

a_t y a_n se denominan componentes intrínsecas de la aceleración.

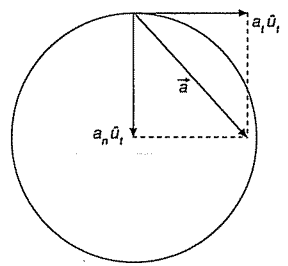


Figura 10

La componente tangencial es la derivada del módulo de la velocidad:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Para un movimiento circular la componente tangencial es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (5)$$

R representa el radio de la circunferencia.

Cuando el módulo de la velocidad es constante y, por tanto, su derivada es cero, la componente tangencial de la aceleración es cero. Se dice que el movimiento es circular uniforme. En un movimiento circular uniforme, la aceleración sólo tiene la componente normal.

Si la trayectoria es una línea recta, el radio es infinito, por tanto $a_n = 0$

La componente tangencial de la aceleración nos indica cómo varía el módulo de la velocidad en un punto determinado.

La componente normal de la aceleración nos indica cómo varía la dirección de la velocidad en un punto determinado.

En general, para cualquier movimiento en el que la trayectoria es una línea curva, Figura 11, la componente normal de la aceleración vale:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ representa el radio de curvatura de la trayectoria en el punto donde se calcula la componente tangencial de la aceleración.

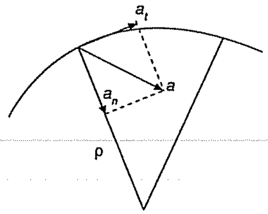


Figura 11

MAGNITUDES ANGULARES

Cuando la trayectoria de un punto es una circunferencia, podemos fijar su posición por medio del ángulo θ que forma el radio OB (Figura 12), trazado en el punto donde se halla el móvil, con el radio OA, trazado en el punto de referencia A, es lo que se denomina posición angular o coordenada angular. Se acostumbra a adoptar el criterio de que los ángulos girados en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj son positivos y negativos los girados en el sentido del movimiento de las agujas del reloj. En el SI, la posición angular se mide en radianes, símbolo rad.

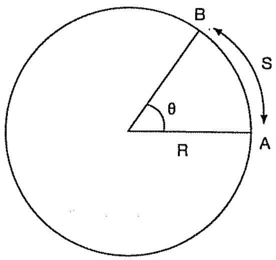


Figura 12

El arco y el radio están relacionados por: S = R θ.

Cuando una partícula se mueve desde un punto B a otro punto C (Figura 13) describiendo un arco ΔS, este arco está relacionado con el desplazamiento angular Δθ por:

$$\Delta\theta = \Delta S/R$$

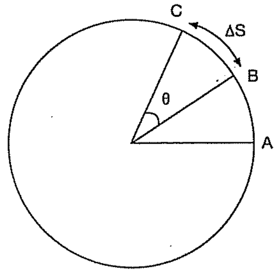


Figura 13

La velocidad angular media, ω_m, se define como el cociente entre el desplazamiento angular, Δθ, y el intervalo de tiempo Δt:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular, ω, es el límite de la velocidad angular media cuando el intervalo de tiempo, Δt, tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

En el SI la velocidad angular se mide en rad/s. Un valor positivo de la velocidad angular indica que el giro tiene lugar en el sentido positivo. Un valor negativo de la velocidad angular indica que el móvil gira en sentido contrario al que hemos fijado como positivo.

Como $\theta = S/R$, podemos escribir:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\frac{S}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R} \qquad (6)$$

La aceleración angular media, α_m, en un intervalo de tiempo Δt es el cociente entre la variación de velocidad angular y el intervalo de tiempo:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular α es el límite de la aceleración angular media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

En el SI la aceleración angular se mide en rad/s².

La aceleración angular está relacionada con la componente tangencial de la aceleración por:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(\frac{v}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{R}$$

Téngase en cuenta que la derivada del módulo de la velocidad es la componente tangencial de la aceleración.

Movimiento circular uniforme

En un movimiento circular uniforme el módulo de la velocidad permanece constante, por tanto, $a_t = 0$ y, en consecuencia, la aceleración angular también es cero, $\alpha = 0$, y la velocidad angular es constante.

En el movimiento circular uniforme se cumple:

$$\theta = \theta_0 + \omega\, t$$

θ_0 representa la posición angular en el momento de empezar a contar el tiempo. La expresión anterior es análoga a la correspondiente en el movimiento rectilíneo uniforme.

Otra forma de escribir la componente normal de la aceleración:

$$a_n = \omega^2 R$$

Periodo y frecuencia del movimiento circular uniforme

Una característica del movimiento circular uniforme es que es periódico. Se dice que un movimiento es periódico cuando a intervalos regulares de tiempo, denominados periodo, se repiten todas las características del movimiento. Cada vez que un móvil que sigue un movimiento circular uniforme ocupa una posición cualquiera tiene la misma velocidad y la misma aceleración, que varían de una posición a otra. El periodo T es el tiempo que el móvil tarda en dar un vuelta completa (2π rad). El periodo está relacionado con la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

El número de vueltas efectuadas por el móvil en una unidad de tiempo es la frecuencia. La frecuencia f es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

Movimiento circular con aceleración angular constante

Cuando la aceleración angular es constante, la aceleración angular media tiene siempre el mismo valor, cualquiera que sea el intervalo de tiempo que se considere y coincide con la aceleración instantánea. La velocidad angular y la posición angular vienen dadas por expresiones análogas a la velocidad y la posición en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + 1/2\, \alpha\, t^2$$

θ_0 y ω_0 representan la posición y la velocidad angular al empezar a contar el tiempo, respectivamente.

MOVIMIENTO RELATIVO

Las expresiones que relacionan las distintas magnitudes cuando vienen referidas a diferentes sistemas de referencia son análogas a las del movimiento en una dimensión. Pero hay que tener en cuenta que, en el caso de dos dimensiones, hay que utilizar la notación vectorial. Sean dos partículas A y B (Figura 14), si los respectivos vectores de posición respecto a un sistema Oxyz son r_A y r_B, y el vector de posición de B respecto a un sistema $Ax'y'$ con origen en A es r_{BA}, se cumple:

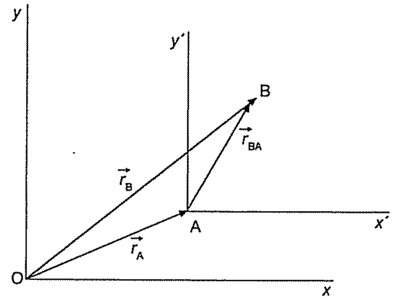


Figura 14

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$$

Y las respectivas relaciones entre las velocidades y las aceleraciones son:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad \text{y} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

3.2 MOVIMIENTO EN TRES DIMENSIONES

Para indicar la posición de un punto en el espacio tridimensional son necesarias tres coordenadas. En un sistema de coordenadas rectangulares (Figura 15), el vector de posición tendrá tres componentes, y se expresará de la forma:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

k es un vector unitario orientado según el eje z.

Cuando las referimos a un sistema de tres coordenadas rectangulares, la velocidad y la aceleración también tienen tres componentes:

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$$

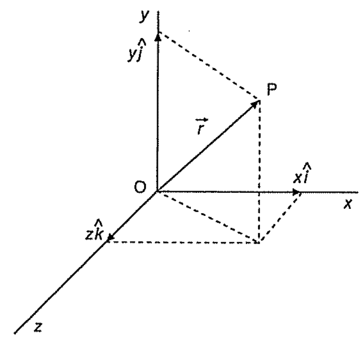


Figura 15

PROBLEMAS RESUELTOS

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Problemas generales

3.1. Un automóvil que se encuentra estacionado en una calle que está orientada de este a oeste arranca y avanza 720 m hacia el este, llega a un cruce y gira hacia el norte y recorre 340 m más. El tiempo invertido en este movimiento ha sido 1,5 min. Determinar:

a) El desplazamiento efectuado por el automóvil.
b) La velocidad media.

Solución

a) Desplazamiento.

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de partida del automóvil, el eje x dirigido haci: el este y el eje y dirigido hacia el norte. El automóvil parte del origen y avanza 720 m a lo largo de eje x en sentido positivo y luego 540 m paralelamente al eje y también en sentido positivo, por tanto

Posición inicial $\quad r_1 = 0$

Posición final $\quad \vec{r}_2 = 720 \text{ m } \hat{i} + 540 \text{ m } \hat{j}$

$\Delta\vec{r} = 720 \text{ m } \hat{i} + 540 \text{ m } \hat{j}.$

Desplazamiento $\Delta\vec{r} = 720 \text{ m } \hat{i} + 540 \text{ m } \hat{j}$

b) Velocidad media.

La expresión de la velocidad media es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1$$

Haciendo $\Delta\vec{r} = 720 \text{ m } \hat{i} + 540 \text{ m } \hat{j}$ y $\Delta t = 90$ s en (1) tenemos:

$$\vec{v}_m \frac{720 \text{ m } \hat{i} + 540 \text{ m } \hat{j}}{90\ s} = 8{,}0 \text{ m/s } \hat{i} + 6{,}0 \text{ m/s } \hat{j}$$

$$v_m = \sqrt{(8{,}0 \text{ m/s})^2 + (6{,}0 \text{ m/s})^2} = 10 \text{ m/s}$$

Velocidad media $\quad \vec{v}_m = 8{,}0 \text{ m/s } \hat{i} + 6{,}0 \text{ m/s } \hat{j}$
$\vec{v}_m = 10$ m/s

3.2. El vector de posición de un móvil es $\vec{r} = (2t - 1)\,\hat{i} + (t + 2)\,\hat{j}$, SI. Determinar:

a) La posición inicial del móvil.
b) La distancia al origen en el instante $t = 2$ s.
c) La ecuación de la velocidad.

Solución

a) La posición inicial. Para $t = 0$:

$$\vec{r}_0 = (2 \times 0 - 1)\,\hat{i} + (0 + 2)\,\hat{j} = -\,\hat{i} + 2\,\hat{j}$$

b) La distancia al origen en el instante $t = 2$ s.

$$\vec{r}_2 = (2 \times 2 - 1)\,\hat{i} + (2 + 2)\,\hat{j} = 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j};\ x = 3\ m,\ y = 4\ m$$

La distancia al origen es el módulo del vector de posición:

$$d = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

Dista del origen 5 m.

c) La ecuación de la velocidad.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt};\ \vec{v} = \frac{d\left((2t - 1)\,\hat{i} + (t + 2)\,\hat{j}\right)}{dt} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

La ecuación de la velocidad es $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$.

3.3. Un objeto se mueve en el plano xy con una aceleración $a_x = 8{,}0 \text{ m/s}^2$, mientras que la componente a_y es nula. En el instante $t = 2{,}0$ s se encuentra en el punto $x = 4{,}6$ m, $y = -1{,}2$ m y la velocidad tiene una componente x de 6,8 m/s y una componente y de 8,4 m/s.

a) Escribir las ecuaciones de la aceleración, de la velocidad y de la posición.
b) Determinar la velocidad y la posición en el instante $t = 5{,}0$ s.

Solución

a) Ecuaciones.

$$\vec{a} = 8{,}0 \text{ m/s}^2\,\hat{i}$$

$$v_x = \int a_x\,dt \quad v_x = \int 8{,}0 \text{ m/s}^2\,dt = 8{,}0 \text{ m/s}^2\,t + C$$

Para hallar la constante de integración haremos $v_x = 6{,}8$ m/s y $t = 2{,}0$ s.

$$6{,}8 \text{ m/s} = 8{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}0 \text{ s} + C;\ C = -9{,}2 \text{ m/s}$$

$$v_x = 8{,}0 \text{ m/s}^2\,t - 9{,}2 \text{ m/s}$$

Como la componente y de la aceleración es nula, v_y es constante, por tanto su valor será:

$$v_y = 8{,}4 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = (8{,}0 \text{ m/s}^2\,t - 9{,}2 \text{ m/s})\,\hat{i} + 8{,}4 \text{ m/s}\,\hat{j} \qquad (1)$$

$$x = \int v_x\,dt;\ \ y = \int (8{,}0 \text{ m/s}^2\,t - 9{,}2 \text{ m/s})\,t\,dt;\ x = 40 \text{ m/s}^2\,t^2 - 9{,}2 \text{ m/s}\,t + C$$

Para hallar la constante de integración haremos $x = 4{,}6$ m y $t = 2{,}0$ s.

$$4{,}6 \text{ m} = 4{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot (2{,}0 \text{ s})^2 - 9{,}2 \text{ m/s} \cdot 2{,}0 \text{ s} + C;\ C = 7{,}0 \text{ m}$$

$$x = 4{,}0 \text{ m/s}^2\,t^2 - 9{,}2 \text{ m/s}\,t + 7{,}0 \text{ m}$$

$$y = v_y\,dt;\ y = 8{,}4 \text{ m/s}\,dt = 8{,}4 \text{ m/s}\,t + C$$

Para hallar la constante de integración haremos $y = -1{,}2$ m y $t = 2{,}0$ s.

$$-1{,}2 \text{ m} = 8{,}4 \text{ m/s} \cdot 2{,}0 \text{ s} + C;\ C = -18 \text{ m}$$

$$y = 8{,}4 \text{ m/s } t - 18 \text{ m}$$

$$\vec{r} = (4{,}0 \text{ m/s}^2\, t^2 - 9{,}2 \text{ m/s } t + 7{,}0\ m)\,\hat{i} + (8{,}4 \text{ m/s } t - 18 \text{ m})\,\hat{j} \qquad (2)$$

b) Para $t = 5{,}0$ s.

Velocidad. Haciendo $t = 5{,}0$ s en (1):

$$\vec{v}_{5,0} = (8{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot 5{,}0 \text{ s} - 9{,}2 \text{ m/s})\,\hat{i} + 8{,}4 \text{ m/s}\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_{5,0} = 30{,}8 \text{ m/s}\,\hat{i} + 8{,}4 \text{ m/s}\,\hat{j};\ v_{5,0} = \sqrt{(30{,}8 \text{ m/s})^2 + (8{,}4 \text{ m/s})^2} = 32 \text{ m/s}$$

Posición. Haciendo $t = 5{,}0$ s en (2):

$$\vec{r}_{5,0} = (4{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot (5{,}0 \text{ s})^2 - 9{,}2 \text{ m/s} \cdot 5{,}0 \text{ s} + 7{,}0 \text{ m})\,\hat{i} + (8{,}4 \text{ m/s} \cdot 5{,}0 \text{ s} - 18 \text{ m})\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_{5,0} = 61 \text{ m}\,\hat{i} + 24 \text{ m}\,\hat{j};\ r = \sqrt{(61 \text{ m})^2 + (24 \text{ m})^2} = 66 \text{ m}$$

$$\vec{v}_{5,0} = 31 \text{ m/s}\,\hat{i} + 8{,}4 \text{ m/s}\,\hat{j}$$
$$v_{5,0} = 32 \text{ m/s}$$
$$r_{5,0} = (61 \text{ m})\,\hat{i} + (24 \text{ m})\,\hat{j}$$
$$r_{5,0} = 66 \text{ m}$$

3.4. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son $x = 3{,}0 - 2{,}0\,t + 1{,}0\,t^2$, $y = 7{,}0 - 4{,}0\,t + 1{,}0\,t^2$, SI. Hallar:

a) Las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración.
b) La velocidad y la aceleración para $t = 2{,}0$ s.

Solución

a) Ecuaciones de la velocidad y de la aceleración.

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt};\ a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$v_x = \frac{d\,(3{,}0 - 2{,}0\,t + 1{,}0\,t^2)}{dt} = -2{,}0 + 2{,}0\,t;\ v_y = \frac{d\,(7{,}0 - 4{,}0\,t + 1{,}0\,t^2)}{dt} = -4{,}0 + 2{,}0\,t$$

$$a_x = \frac{d\,(-2{,}0 + 2{,}0\,t)}{dt} = 2{,}0;\ a_y = \frac{d\,(-4{,}0 + 2{,}0\,t)}{dt} = 2{,}0$$

$$\vec{v} = (-2{,}0 + 2{,}0\,t)\,\hat{i} + (-4{,}0 + 2{,}0\,t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = (2{,}0\,\hat{i} + 2{,}0\,\hat{j})$$

b) Para $t = 2{,}0$ s.

$$\vec{v}_{2,0} = (-2{,}0 + 2{,}0 \cdot 2{,}0)\,\hat{i} + (-4{,}0 + 2{,}0 \cdot 2{,}0)\,\hat{j} = 2{,}0\,\hat{i};\ v_{2,0} = 2{,}0 \text{ m/s}\,\hat{i}$$

$$\vec{a}_{2,0} = 2{,}0\,\hat{i} + 2{,}0\,\hat{j};\ a_{2,0} = \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}0^2} = 2{,}8 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}_{2,0} = 2{,}0 \text{ m/s}\,\hat{i};\ v_{2,0} = 2{,}0 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{2,0} = 2{,}0 \text{ m/s}^2\,\hat{i} + 2{,}0 \text{ m/s}^2\,\hat{j};\ a_{2,0} = 2{,}8 \text{ m/s}^2$$

3.5. Desde la terraza de un edificio se lanza horizontalmente una pelota con una celeridad de 30 m/s. Llega al suelo al cabo de 2,7 s. Despreciando el rozamiento con el aire, determinar:

a) La distancia entre la base del edificio y el punto donde cae la pelota.
b) La altura del edificio.
c) La velocidad de la pelota en el momento en que llega al suelo.

Solución

Ecuaciones de la velocidad y de la posición.

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento de la pelota.

Movimiento horizontal

El movimiento horizontal es un movimiento con velocidad constante. Tomaremos sentido positivo el de la velocidad inicial de la pelota que supondremos hacia la derecha.

$$v_x = 30 \text{ m/s} \qquad (1)$$

$$x = 30 \text{ m/s } t \qquad (2)$$

Movimiento vertical

Tomaremos sentido positivo hacia abajo.

$$v_y = 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \qquad (3)$$

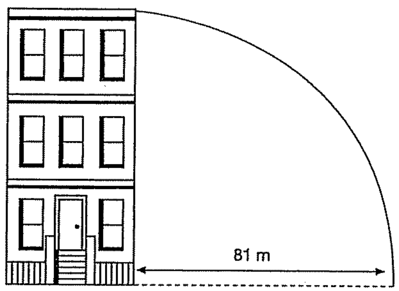
$$y = 2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (4)$$

a) Distancia entre la base y el punto de caída.

La distancia a la base es la distancia horizontal que recorre la pelota.

Hacemos $t = 2{,}7$ s en (2):

$$x_{2,7} = 30 \text{ m/s} \cdot 2{,}7 \text{ s} = 81 \text{ m/s}$$



Distancia a la base: 81 m.

b) Altura del edificio.

La altura del edificio es la distancia vertical recorrida por la pelota.

Hacemos t = 2,7 s en (4):

$$y_{2,7} = 1/2\ 9{,}81\ \text{m/s}^2\ (2{,}7\ \text{s})^2 = 35{,}7\ \text{m}$$

Altura del edificio 36 m.

c) Velocidad al llegar al suelo.

Como el movimiento horizontal mantiene la velocidad constante:

$$v_{x(2,7)} = 30\ \text{m/s}$$

Para calcular $v_{y(2,7)}$, hacemos t = 2,7 s en (3).

$$v_{y(2,7)} = 9{,}81\ \text{m/s} \cdot 2{,}7\ \text{s} = 26{,}4\ \text{m/s}$$

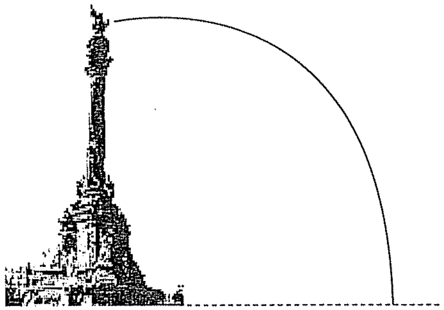
$$v_{2,7} = \sqrt{(30\ \text{m/s})^2 + (26{,}4\ \text{m/s})^2} = 39{,}9\ \text{m/s}$$

$$v_{2,7} = 30\ \text{m/s}\ i + 26\ \text{m/s}\ j$$
$$v_{2,7} = 40\ \text{m/s}$$

3.6. Desde el mirador del monumento a Colón en Barcelona se lanza horizontalmente una flecha con una celeridad de 40 m/s y toca al suelo en un punto situado a 130 m del pie del monumento. ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra el mirador?

Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento de la flecha.



Movimiento horizontal

El movimiento horizontal es un movimiento con velocidad constante. Tomaremos como sentido positivo el de la velocidad inicial de la flecha que supondremos hacia la derecha.

$$v_{x(0)} = 40\ \text{m/s}$$

$$v_x = 40\ \text{m/s} \qquad (1)$$

$$x = 40\ \text{m/s}\ t \qquad (2)$$

Movimiento vertical

Se trata de un movimiento con aceleración constante. Tomaremos sentido positivo hacia abajo.

$$v_{y(0)} = 0$$

$$v_y = 9{,}81\ \text{m/s}\ t \qquad (3)$$

$$y = 1/2\ 9{,}81\ \text{m/s}^2\ t^2 \qquad (4)$$

Para calcular la altura utilizando la ecuación (3) necesitamos conocer el tiempo de caída.

Haciendo x = 130 m en (2):

$$130\ m = 40\ \text{m/s}\ t\ ;\ t = 3{,}25\ \text{s}$$

En (4) tenemos:

$$y = 29{,}81\ \text{m/s}^2\ (3{,}25\ \text{s})^2 = 51{,}8\ \text{m}$$

Altura 52 m.

3.7. Un futbolista lanza un balón con una componente horizontal de la velocidad de 25 m/s y una componente vertical de 15 m/s. Determinar:

a) La velocidad y la posición al cabo de 1,0 s y al cabo de 2,0 s.
b) El tiempo necesario para alcanzar el punto más elevado de su trayectoria.
c) El tiempo que tarda en volver a la altura inicial.
d) La distancia horizontal recorrida en este tiempo.

Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento de la pelota.

Movimiento horizontal

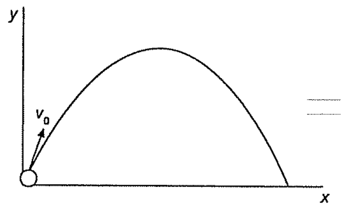
El movimiento horizontal es un movimiento con velocidad constante. Tomaremos el sentido positivo hacia la derecha que supondremos que es hacia donde se ha lanzado la pelota.

$$v_x = 25\ \text{m/s} \qquad (1)$$

$$x = 25\ \text{m/s}\ t \qquad (2)$$

Movimiento vertical

Se trata de un movimiento con aceleración constante. Tomaremos sentido positivo hacia arriba.



$$v_y = 15\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2\ t \qquad (3)$$

$$y = 15\ \text{m/s}\ t - 1/2\ 9{,}81\ \text{m/s}^2\ t^2 \qquad (4)$$

a) Velocidad y posición para t = 1,0 s. Haciendo t = 1,0 s en las ecuaciones anteriores:

$$v_x = 25\ \text{m/s}$$

$$x_{1,0} = 25\ \text{m/s} \cdot 1{,}0\ \text{s} = 25\ \text{m}$$

$$v_{y(1,0)} = 15\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{s} = 5{,}19\ \text{m/s}$$

$$y_{1,0} = 15\ \text{m/s} \cdot 1{,}0\ \text{s} - 1/2\ 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}0\ \text{s})^2 = 10{,}0\ \text{m}$$

Velocidad y posición para $t = 2{,}0$ s. De la misma forma, haciendo $t = 2{,}0$ s:

$$v_x = 25 \text{ m/s}$$

$$x_{2,0} = 25 \text{ m/s} \cdot 2{,}0 \text{ s} = 50 \text{ m}$$

$$v_{y(2,0)} = 15 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}0 \text{ s} = -4{,}62 \text{ m/s}$$

$$y_{2,0} = 15 \text{ m/s} \cdot 2{,}0 \text{ s} - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (2{,}0 \text{ s})^2 = 10{,}3 \text{ m}$$

En el instante $t = 1{,}0$ s la componente vertical de la velocidad es positiva, esto quiere decir que la pelota está subiendo. En $t = 2{,}0$, dicha componente es negativa, luego la pelota ya ha alcanzado la altura máxima y está descendiendo.

$$\vec{v}_{1,0} = 25 \text{ m/s}\,\hat{i} + 5{,}2 \text{ m/s}\,\hat{j}$$
$$v_{1,0} = 26 \text{ m/s}$$
$$\vec{r}_{1,0} = 25 \text{ m}\,\hat{i} + 10 \text{ m}\,\hat{j}$$
$$r_{1,0} = 30 \text{ m}$$
$$\vec{v}_{2,0} = 25 \text{ m/s}\,\hat{i} - 4{,}6 \text{ m/s}\,\hat{j}$$
$$v_{2,0} = 25 \text{ m/s}$$
$$\vec{r}_{2,0} = 50 \text{ m}\,\hat{i} + 10 \text{ m}\,\hat{j}$$
$$r_{2,0} = 51 \text{ m}$$

b) Tiempo necesario para alcanzar el punto más elevado.

En el instante en que la pelota alcanza la altura máxima, $v_y = 0$. Igualando a cero la expresión (3):

$$0 = 15 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t;\ t = 1{,}52 \text{ s}$$

Este resultado es coherente con el apartado anterior, en el que hemos podido comprobar que al cabo de 1,0 s la pelota estaba subiendo y al cabo de 2,0 s ya descendía.

$$t = 1{,}5 \text{ s}$$

c) Tiempo que tarda en volver al suelo.

Cuando la pelota está en el suelo $y = 0$. Igualando a cero la expresión (4):

$$0 = 15 \text{ m/s}\, t - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2\ ;\ t = 0 \text{ y } t = 3{,}05 \text{ s}$$

Efectivamente, en el momento inicial la pelota se encuentra en el suelo y vuelve a estar de nuevo en el suelo al cabo de un tiempo doble del que ha tardado en alcanzar la altura máxima, lo que está de acuerdo con la simetría de la curva que describe la pelota.

De las dos soluciones de la ecuación anterior, sólo nos interesa la segunda.

$$t = 3{,}1 \text{ s}$$

d) Distancia horizontal.

Haciendo $t = 3{,}05$ en (2):

$$x = 20 \text{ m/s} \cdot 3{,}05\ s = 61 \text{ m}$$

$$x = 61 \text{ m}$$

3.8. Un obús de mortero sale disparado con una velocidad de 250 m/s y con una inclinación sobre la horizontal de 53°.

a) ¿Cuál es el alcance horizontal?
b) ¿Qué radio de curvatura presenta la trayectoria en el punto más alto?
c) ¿En qué inclinación sobre la horizontal se consigue el alcance máximo?; ¿qué alcance máximo puede lograrse modificando únicamente la inclinación del tiro?

Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento del obús.

Movimiento horizontal

El movimiento horizontal es un movimiento con velocidad constante. Tomaremos sentido positivo hacia la derecha que supondremos que es hacia donde se ha lanzado el obús.

$$v_{x(0)} = 250 \text{ m/s} \cos 53° = 150 \text{ m/s}$$

$$v_x = 150 \text{ m/s} \qquad (1)$$

$$x = 150 \text{ m/s}\ t \qquad (2)$$

Movimiento vertical

Se trata de un movimiento con aceleración constante. Tomaremos sentido positivo hacia arriba.

$$v_{y(0)} = 250 \text{ m/s sen } 53° = 199 \text{ m/s}$$

$$v_y = 199 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t \qquad (3)$$

$$y = 199 \text{ m/s}\ t - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t^2 \qquad (4)$$

a) Alcance horizontal.

Cuando llega al suelo $y = 0$. Igualando a cero la expresión (4):

$$0 = 199 \text{ m/s}\ t - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t^2;\ t = 0 \text{ y } t = 40{,}5 \text{ s}$$

La primera solución corresponde al momento de partida y la segunda al momento en que vuelve al suelo.

Haciendo $t = 40{,}5$ s en (2):

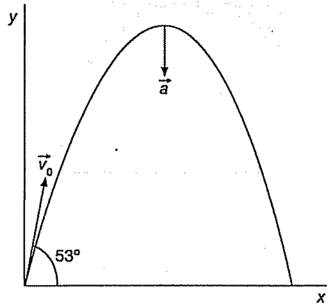
$$x = 150 \text{ m/s} \cdot 40{,}5\ s = 6\,075 \text{ m}$$

Alcance $6{,}1 \cdot 10^3$ m.

b) Radio de curvatura.

En el punto más elevado de la trayectoria $v_y = 0$, en consecuencia el movimiento del obús en este instante tiene una dirección horizontal, la componente normal de la aceleración normal será la gravedad.

$$a_n = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$



Como

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

donde v es el módulo de la velocidad y ρ es el radio de curvatura.
Como v_x es constante e igual a 150 m/s:

$$9{,}81 \text{ m/s}^2 = \frac{(150 \text{ m/s}^2)^2}{\rho}; \ \rho = 2{,}293 \text{ m}$$

Radio de curvatura $2{,}3 \cdot 10^3$ m.

c) Alcance máximo.

Volveremos a escribir las ecuaciones de la velocidad y de la posición:

$v_{x(0)} = v_0 \cos \theta_0 \qquad v_x = v_0 \cos \theta_0$

$$x = v_0\, t \cos \theta_0 \tag{5}$$

$v_{y(0)} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - g\, t$

$$y = v_0\, t \operatorname{sen} \theta_0 - 1/2\, g\, t^2 \tag{6}$$

El alcance es cuando $y = 0$. Igualando a cero la expresión (6):

$$0 = v_0\, t \operatorname{sen} \theta_0 - 1/2\, g\, t^2 ;\ t = 0 \text{ y } t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

Sólo nos interesa la segunda solución que corresponde al momento en que el mortero vuelve al suelo.

En (5) tenemos:

$$x = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

donde x ahora es el alcance, que representaremos por R.
Como $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\,\theta$, podemos escribir:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\,\theta_0}{g} \tag{7}$$

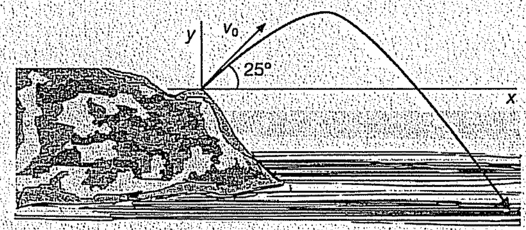
Para una velocidad inicial dada, el alcance será máximo cuando lo sea $\operatorname{sen} 2\,\theta_0$, es decir si $\operatorname{sen} 2\,\theta_0 = 1$; lo cual sucede cuando $2\,\theta = 90°$. Por tanto, R es máximo para $\theta_0 = 45°$.
Modificando únicamente el ángulo de tiro se puede llegar como máximo:

$$R = \frac{(250 \text{ m/s})^2}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 6\,371 \text{ m}$$

Ángulo para el cual el alcance es máximo $\theta_0 = 45°$.
Alcance para $\theta_0 = 45°$, $R = 6{,}37 \cdot 10^3$ m.

3.9. Desde el borde de un acantilado de 150 m de altura se dispara un proyectil con un ángulo de inclinación de 25° y una celeridad inicial de 200 m/s. Determinar:

a) El tiempo que permanece el proyectil en el aire.
b) La altura máxima que alcanza el proyectil respecto al suelo.
c) Distancia horizontal del punto de lanzamiento al punto donde el proyectil toca al agua.



Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el punto de partida del proyectil.

Movimiento horizontal

El movimiento horizontal es un movimiento con velocidad constante. Tomaremos sentido positivo hacia la derecha que supondremos que es hacia donde se ha lanzado el proyectil.

$$v_{x(0)} = 200 \text{ m/s} \cos 25° = 181 \text{ m/s}$$

$$v_x = 181 \text{ m/s} \tag{1}$$

$$x = 181 \text{ m/s}\ t \tag{2}$$

Movimiento vertical

Se trata de un movimiento con aceleración constante. Tomaremos sentido positivo hacia arriba.

$$v_{y(0)} = 200 \text{ m/s} \operatorname{sen} 25° = 84{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_y = 84{,}5 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \tag{3}$$

$$y = 84{,}5 \text{ m/s}\, t - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \tag{4}$$

a) Tiempo que permanece en el aire.

Cuando el proyectil toca al agua $y = -150$ m. En (4) tenemos:

$$-150 \text{ m} = 84{,}5 \text{ m/s } t - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t^2$$

Resolvemos la ecuación y resulta:

$$t = -1{,}61 \text{ s},\ t = 18{,}8 \text{ s}$$

$$t = 19 \text{ s}$$

b) Altura máxima.

Cuando el proyectil alcanza la altura máxima $v_y = 0$. Igualando a cero la expresión (3):

$$0 = 84{,}5 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\ t\ ;\ t = 8{,}61 \text{ s}$$

Haciendo $t = 8{,}61$ s en (4):

$$y = 84{,}5 \text{ m/s} \cdot 8{,}61 \text{ s} - 1/2\ 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}61 \text{ s})^2\ ;\ y = 363 \text{ m}$$

$$\text{Altura máxima } y = 3{,}6 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

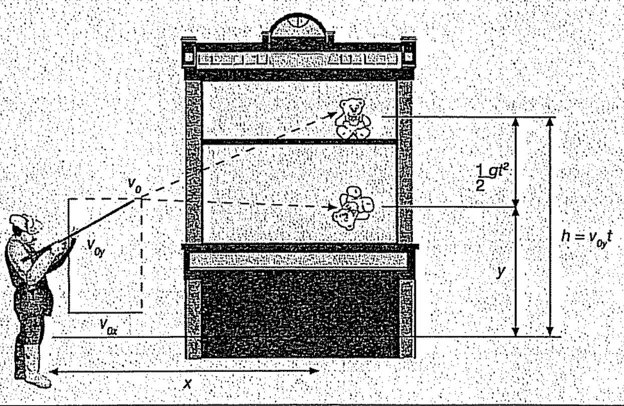
c) Punto de impacto.

Haciendo $t = 18{,}8$ s en (2):

$$x = 181 \text{ m/s} \cdot 18{,}8 \text{ s} = 3\,402 \text{ m}$$

$$\text{Punto de impacto } x = 3{,}4 \cdot 10^2 \text{ m}$$

3.10. En una barraca de feria hay una atracción que consiste en disparar con una escopeta que lanza un proyectil con una celeridad v_0 a un muñeco de goma que se encuentra a una cierta altura. La dificultad reside en que este muñeco está dotado de un mecanismo que hace que caiga en el preciso instante en que sale el proyectil del cañón. ¿Es conveniente apuntar al muñeco para hacer blanco?



Solución

Tomaremos como origen de coordenadas el punto donde el proyectil abandona el cañón de la escopeta.

Movimiento del muñeco

Sea y_0 la coordenada inicial del muñeco.

$$y_m = y_0 - 1/2 \text{ g } t^2 \tag{1}$$

Movimiento del proyectil

Sea v_0 la celeridad con que sale el proyectil del cañón y θ_0 el ángulo que forma la dirección del movimiento con la horizontal.

$$v_{x(0)} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0$$

$$xp = v_0\, t \cos \theta_0 \tag{2}$$

$$v_{y(0)} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$$

$$vy = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - \text{g } t$$

$$yp = v_0\, t \operatorname{sen} \theta_0 - 1/2 \text{ g } t2 \tag{3}$$

Para hacer blanco es necesario que en un momento dado coincidan el muñeco y el proyectil en la misma posición, es decir, que haya un instante en que las coordenadas de ambos sean iguales.

El momento en que las respectivas coordenadas del muñeco y del proyectil son iguales, $y_m = y_p$, se puede calcular igualando los segundos miembros de (1) y (3):

$$y_0 - 1/2 \text{ g } t^2 = v_0\, t \operatorname{sen} \theta_0 - 1/2 \text{ g } t^2\ ;\ y_0 = v_0\, t \operatorname{sen} \theta_0$$

$$t = \frac{y_0}{v_0 \operatorname{sen} \theta_0}$$

Sustituyendo este tiempo en (2):

$$x_p = v_0 \frac{y_0}{v_0 \operatorname{sen} \theta_0} \cos \theta_0$$

$$x_p = y_0 \operatorname{cotg} \theta_0$$

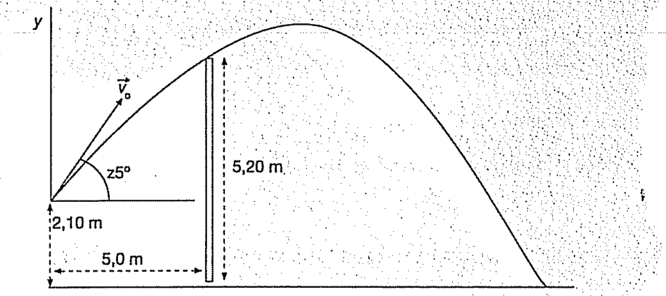
La coordenada x_m del muñeco es todo el rato la misma, si se apunta hacia el muñeco se cumple (véase figura):

$$x_m = y_0 \operatorname{cotg} \theta_0$$

Es decir, en el instante en que coinciden las coordenadas y, también coinciden las coordenadas x.

Conclusión: Para hacer blanco hay que apuntar al muñeco.

3.11. Un muchacho, que puede levantar la mano hasta una altura de 2,10 m, lanza una piedra con una celeridad inicial de 12 m/s bajo un ángulo de 45° con la horizontal con la idea de que pase por encima de una valla de 5,20 m de altura que se encuentra a una distancia de 5,0 m. ¿Este muchacho logrará su propósito?



Solución

Para que la piedra pase por encima de la valla, es necesario que cuando la pelota llegue a la valla se encuentre a una altura superior a la de ésta. Es decir, si tomamos como origen de coordenadas el punto donde se lanza la piedra, debe cumplirse que para $x = 5{,}0$ m, $y > 5{,}20$ m $- 2{,}10 = 3{,}10$ m.

Movimiento horizontal

$$v_{x(0)} = 12 \text{ m/s} \cos 45° = 8{,}48 \text{ m/s}$$

$$v_x = 8{,}48 \text{ m/s}$$

$$x = 8{,}48 \text{ m/s } t \qquad (1)$$

Movimiento vertical

$$v_{y(0)} = 12 \text{ m/s} \cos 45° = 8{,}48 \text{ m/s}$$

$$v_y = 8{,}48 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t$$

$$y = 8{,}48 \text{ m/s } t - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t^2 \qquad (2)$$

Para saber el momento en que la piedra llega a la posición de la valla hacemos $x = 5{,}0$ m en (1):

$$5{,}0 \text{ m} = 8{,}48 \text{ m/s } t;\; t = 0{,}589 \text{ s}$$

Haciendo $t = 0{,}589$ s en (2):

$$y = 8{,}48 \text{ m/s} \cdot 0{,}589 - 1/2\; 9{,}81 \text{ m/s}^2\, t \times (0{,}589 \text{ s})^2 = 3{,}29 \text{ m}$$

La piedra pasará por encima de la valla.

Componentes intrínsecas de la aceleración

3.12. Un automóvil se mueve por una pista circular, de radio 600 m. En un cierto instante en que el velocímetro indica 120 km/h, el piloto acelera uniformemente y al cabo de 4,0 s, el velocímetro marca 160 km/h. Hallar para este instante:

a) La componente tangencial de la aceleración.
b) La componente normal de aceleración.
c) La aceleración.

Solución

a) Componente tangencial de la aceleración.

Como el automóvil acelera uniformemente:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$120 \text{ km/h} = 33{,}33 \text{ m/s};\; 160 \text{ km/h} = 44{,}44 \text{ m/s}$$

$$a_t = \frac{44{,}44 \text{ m/s} - 33{,}33 \text{ m/s}}{4{,}0 \text{ s}} = 2{,}77 \text{ m/s}$$

$$a_t = 2{,}8 \text{ m/s}^2$$

b) Componente normal de la aceleración.

En el momento que empieza a acelerar la velocidad es de 33,33 m/s.

$$a_n = \frac{v^2}{R^2};\; a_n = \frac{(33{,}33 \text{ m/s})^2}{600 \text{ m}} = 1{,}851 \text{ m/s}$$

$$a_n = 1{,}85 \text{ m/s}^2$$

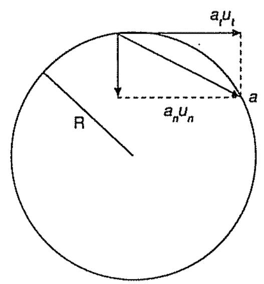
c) Aceleración.

$$\vec{a} = a_t\, \hat{u}_t + a_n\, \hat{u}_n;\; \vec{a} = 2{,}8 \text{ m/s}^2\, \hat{u}_t + 1{,}85 \text{ m/s}^2\, \hat{u}_n$$

$$a = \sqrt{(2{,}77 \text{ m/s}^2)^2 + (1{,}851 \text{ m/s}^2)} = 3{,}33 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = 2{,}8 \text{ m/s}^2\, \hat{u}_t + 1{,}85 \text{ m/s}^2\, \hat{u}_n$$

$$a = 3{,}3 \text{ m/s}^2$$

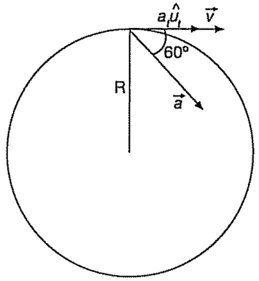


3.13. Una partícula describe un movimiento circular. En un cierto instante, su celeridad es de 6,0 m/s y el módulo de su aceleración vale 8,0 m/s² y sus vectores representativos forman un ángulo de 60°. Determinar:

a) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.
b) El radio de la circunferencia.

Solución

a) Componentes tangencial y normal.



La velocidad y la componente tangencial de la aceleración tienen la misma dirección.

$$a_t = 8{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 60° = 4{,}0 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = 8{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 60° = 6{,}92 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = 4{,}0 \text{ m/s}^2;\ a_n = 6{,}9 \text{ m/s}^2$$

b) Radio de la circunferencia.

La componente normal de la aceleración está relacionada con el radio por:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Sustituyendo:

$$6{,}92 \text{ m/s}^2 = \frac{(6{,}0 \text{ m/s})^2}{R};\ R = 5{,}20 \text{ m}$$

$$R = 5{,}2 \text{ m}$$

3.14. En un cierto instante, la velocidad de un móvil que describe un movimiento circular vale $\vec{v} = 12 \text{ m/s}\ \hat{i} - 5{,}0 \text{ m/s}\ \hat{j}$ y la aceleración $\vec{a} = 2{,}0 \text{ m/s}^2\ \hat{i} - 3{,}0 \text{ m/s}^2\ \hat{j}$. Calcular las componentes intrínsecas de la aceleración.

Solución

La expresión que nos da la aceleración en función de las componentes intrínsecas es:

$$\vec{a} = a_t\,\hat{u}_t + a_n\,\hat{u}_n$$

La componente de un vector a lo largo de un eje cualquiera es igual al producto escalar de este vector por un vector unitario dirigido a lo largo del eje en el sentido positivo del mismo:

$$\vec{a} \cdot \hat{u}_t = a\ 1 \cos \phi = a_t \qquad (1)$$

La velocidad es tangente a la trayectoria, el vector unitario $\hat{u}_t$ será, por tanto, un vector de módulo la unidad y de la misma dirección y sentido que la velocidad, esto lo escribimos:

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(12 \text{ m/s}^2) + (5{,}0 \text{ m/s})^2} = 13 \text{ m/s}$$

El vector u_t puede expresarse en función de los unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ de la siguiente forma:

$$\hat{u}_t = \frac{12 \text{ m/s}\ \hat{i} - 5{,}0 \text{ m/s}\ \hat{j}}{13 \text{ m/s}} = 0{,}923\ \hat{i} - 0{,}384\ \hat{j}$$

En (1) tenemos:

$$a_t = [(2{,}0 \text{ m/s}^2)\ \hat{i} - (3{,}0 \text{ m/s}^2)\ \hat{j}] \cdot (0{,}923\ \hat{i} - 0{,}384\ \hat{j}) = 1{,}846 + 1{,}152 = 3{,}0 \text{ m/s}^2$$

La componente normal de la aceleración.
El módulo del cuadrado de la aceleración es:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2;\ a^2 = (3{,}0 \text{ m/s}^2)^2 + a_n^2 \qquad (2)$$

Por otro lado:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2;\ a^2 = (2{,}0 \text{ m/s}^2)^2 + (3{,}0 \text{ m/s}^2)^2 \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce $a_n = 2{,}0 \text{ m/s}^2$. Por tanto:

$$\vec{a} = 3{,}0 \text{ m/s}^2\ \hat{u}_t + 2{,}0 \text{ m/s}^2\ \hat{u}_n$$

$$a_t = 3{,}0 \text{ m/s}^2,\ a_n = 2{,}0 \text{ m/s}^2$$

Magnitudes angulares

3.15. La coordenada angular de una partícula viene dada por $\theta = 8{,}0\,t - 2{,}0\,t^3$ donde t está en segundos y 2 en radianes. Determinar:

a) La posición, la velocidad angular y la aceleración angular para $t = 1{,}0$ s.
b) El instante en que la partícula pasa por la posición inicial.

Solución

a) La posición, la velocidad y la aceleración para $t = 1{,}0$ s.

La posición:

$$\theta_{1,0} = 8{,}0 \cdot 1{,}0 - 2{,}0 \cdot 1{,}0^3 = 6{,}0 \text{ rad}$$

La velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};\ \omega = \frac{d\,(8{,}0\,t - 2{,}0\,t^3)}{dt} = 8{,}0 - 6{,}0\,t^2;\ \omega_{1,0} = 8{,}0 - 6{,}0 \cdot 1{,}0^2 = 2{,}0 \text{ rad/s}$$

La aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt};\ \alpha = \frac{d\,(8{,}0 - 6{,}0\,t^2)}{dt} = -12\,t;\ \alpha_1 = -12 \cdot 1{,}0 = -12 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta_{1,0} = 6{,}0 \text{ rad}$$
$$\omega_{1,0} = 2{,}0 \text{ rad/s}$$
$$\alpha_{1,0} = -12 \text{ rad/s}^2$$

b) El instante en que la partícula pasa por la posición inicial.

La posición inicial es: $\theta_0 = 8{,}0 \cdot 0 - 2{,}0 \cdot 0 = 0$

La posición inicial es $\theta_0 = 0$. Este valor se repite: $0 = 8{,}0\,t - 2{,}0\,t^3$. Las soluciones de esta ecuación son $t = 0$; $0 = 8{,}0 - 2{,}0\,t^2$; $t = \pm 2{,}0$. Repite la posición inicial en el instante $t = 2{,}0$ s.

3.16. Un disco que gira alrededor de un eje que pasa por su centro con una velocidad angular de 300 rpm acelera uniformemente y adquiere una velocidad angular de 450 rpm en 5,0 s. Determinar:

a) La aceleración angular.
b) El número de vueltas que ha dado el disco en este intervalo de tiempo.

Solución

Ecuaciones de la velocidad angular y de la posición angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t \qquad (1)$$

$$\theta = \omega_0\, t + 2\, \alpha\, t^2 \qquad (2)$$

$$300 \text{ rpm} = 10\, \pi \text{ rad/s};\ 450 \text{ rpm} = 15 \text{ rad/s}$$

a) Aceleración angular.

De (1):

$$15\, \pi \text{ rad/s} = 10\, \pi \text{ rad/s} + \alpha\, 5{,}0 \text{ s}$$

Aceleración angular $\alpha = 3{,}1 \text{ rad/s}^2$

b) Número de vueltas. Primero calcularemos el desplazamiento angular.

En (2):

$$\theta = 10\, \pi \text{ rad/s} \cdot 5{,}0 \text{ s} + 1/2\ 3{,}14 \text{ rad/s}^2 \cdot (5{,}0 \text{ s})^2 = 196 \text{ rad}$$

$$196 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\, \pi \text{ rad}} = 31 \text{ vueltas}$$

31 vueltas.

3.17. Un disco de 4,0 cm de radio gira con una velocidad angular de 10 rad/s y en 2,0 s disminuye uniformemente su velocidad hasta 4,0 rad/s. Determinar para un punto de la periferia:

a) La componente tangencial de la aceleración.
b) La componente normal de la aceleración en el instante $t = 0$.
c) El módulo de la velocidad tangencial a los 2,0 s.

Solución

a) Componente tangencial de la aceleración.

$$a_t = \alpha\, R$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t};\ \alpha = \frac{4{,}0 \text{ rad/s} - 10 \text{ rad/s}}{2{,}0 \text{ s}} = -3{,}0 \text{ rad/s}^2$$

$$a_t = (-3{,}0 \text{ rad/s}^2) \cdot (4{,}0 \text{ cm}) = -12 \text{ cm/s}^2$$

$a_t = -12 \text{ cm/s}^2$

b) Componente normal de la aceleración.

$$a_n = \frac{v^2}{R};\ v = \omega\, R \Rightarrow a_n = \omega^2 R;\ a_n = (10 \text{ rad/s})^2 \times 4{,}0 \text{ cm} = 4{,}0 \cdot 10^2 \text{ cm/s}^2$$

$$a_n = 4{,}0 \cdot 10^2 \text{ cm/s}^2$$

c) Velocidad tangencial.

$$v = \omega\, R$$

$$v_{2,0} = (4{,}0 \text{ rad/s}) \cdot (4{,}0 \text{ cm}) = 16 \text{ cm/s}$$

$v_{2,0} = 16 \text{ cm/s}$

3.18. Un punto material describe una circunferencia. La distancia de este punto medida sobre la trayectoria a un punto de referencia viene dada por la expresión $s = 1{,}0\, t^3 + 2{,}0\, t^2$ m, t está expresado en segundos. En el instante $t = 2{,}0$ s, el módulo de la aceleración vale 20 m/s². ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

Solución

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

Cálculo de la celeridad.

$$v = \frac{dS}{dt};\ v = \frac{d\,(1{,}0\, t^3 + 2{,}0\, t^2)}{dt} = 3{,}0\, t^2 + 4{,}0\, t$$

$$v_{2,0} = 3{,}0 \cdot 2{,}0^2 + 4{,}0 \cdot 2{,}0 = 20 \text{ m/s}$$

Cálculo de la componente normal de la aceleración.

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \qquad (2)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt};\ a_t = \frac{d\,(3{,}0\, t^2 + 4{,}0\, t)}{dt} = 6{,}0\, t + 4{,}0$$

$$a_{t(2,0)} = 6{,}0 \cdot 2{,}0 + 4{,}0 = 16 \text{ m/s}^2$$

En (2):

$$(20 \text{ m/s}^2)^2 = (16 \text{ m/s})^2 + a_n;\ a_n = 12 \text{ m/s}^2$$

En (1): $12 \text{ m/s}^2 = \dfrac{(20 \text{ m/s})^2}{R};\ R = 33 \text{ m/s}$

Radio de curvatura $R = 33$ m/s.

3.19. Las ecuaciones del movimiento de un punto son $x = 12$ m cos 0,50 rad/s t, $y = 12$ m sen 0,50 rad/s t.

a) Demostrar que se trata de un movimiento circular.
b) Hallar la velocidad y la aceleración para $t = 2{,}0$ s.
c) Hallar la velocidad angular y la aceleración angular para $t = 2{,}0$ s.

Solución

a) Movimiento circular.

Si es un movimiento circular, la ecuación de la trayectoria será la ecuación de una circunferencia. Para hallar la ecuación de la trayectoria, lo más sencillo es elevar al cuadrado los dos miembros de las ecuaciones del movimiento y luego sumarlas miembro a miembro:

$$x^2 = (12\text{ m})^2 \cos^2 0{,}50 \text{ rad/s } t$$

$$y^2 = (12\text{ m})^2 \text{sen}^2\, 0{,}50 \text{ rad/s } t$$

$$x^2 + y^2 = (12\text{ m})^2 \cos^2 0{,}50 \text{ rad/s } t + (12\text{ m})^2 \text{sen}^2\, 0{,}50 \text{ rad/s } t$$

$$x^2 + y^2 = (12\text{ m})^2 (\cos^2 0{,}50 \text{ rad/s } t + \text{sen}^2\, 0{,}50 \text{ rad/s } t)$$

$$x^2 + y^2 = (12\text{ m})^2$$

Efectivamente se trata de un circunferencia de radio 12 m centrada en el centro de coordenadas.

b) Velocidad y aceleración para $t = 2{,}0$ s.

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,;\ v_x = \frac{d\,(6{,}0\ m \cos 0{,}50\ rad/s\ t)}{dt} = -6{,}0\ m/s \text{ sen } 0{,}50\ rad/s\ t$$

$$v_y \frac{dy}{dt}\,;\ v_y = \frac{d\,(6{,}0\ m \text{ sen } 0{,}50\ rad/s\ t)}{dt} = 6{,}0\ m/s \cos 0{,}50\ rad/s\ t$$

$\vec{v} = (-6{,}0 \text{ m/s sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)\,\hat{i} + (6{,}0 \text{ m/s} \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)\,\hat{j}$

$\vec{v}_{2,0} = (-6{,}0 \text{ m/s sen } 0{,}50 \text{ rad/s} \cdot 2{,}0\text{ s})\,\hat{i} + (6{,}0 \text{ m/s} \cos 0{,}50 \text{ rad/s} \cdot 2{,}0\text{ s})\,\hat{j}$

$\vec{v}_{2,0} = -5{,}0 \text{ m/s}\,\hat{i} - 3{,}2 \text{ m/s}\,\hat{j}$

$v^2 = (-6{,}0 \text{ m/s sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2 + (6{,}0 \text{ m/s} \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2 = (6{,}0 \text{ m/s})^2\,[(\text{sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2 + (\cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2] = (6{,}0 \text{ m/s})^2$

$$v = 6{,}0 \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad permanece constante, luego se trata de un movimiento circular uniforme. La aceleración únicamente tiene la componente normal.

Aceleración.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}\,;\ v_x = \frac{d\,(-6{,}0 \text{ m/s sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)}{dt} = -3{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}\,;\ v_y = \frac{d\,(6{,}0 \text{ m/s} \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)}{dt} = -\,3{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t$$

$a_x = -3{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t$
$a_y = -3{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t$

$$\vec{a} = (-3{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)\,\hat{i} + (-3{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a}_{2,0} = (-3{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 0{,}50 \text{ rad/s} \cdot 2{,}0\text{ s})\,\hat{i} + (-3{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a}_{2,0} = -1{,}6 \text{ m/s}^2\,\hat{i} - 2{,}5 \text{ m/s}^2\,\hat{j}$$

$a^2 = [-3{,}0 \text{ m/s}^2 \cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)]^2 + [(-3{,}0 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)]^2 = (3{,}0 \text{ m/s}^2)^2\,[(\cos 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2 + (\text{sen } 0{,}50 \text{ rad/s } t)^2] = (3{,}0 \text{ m/s}^2)^2$

$$a = 3{,}0 \text{ m/s}^2$$

$\vec{v}_{3,0} = 3{,}2 \text{ m/s}\,\hat{i} - 5{,}0 \text{ m/s}\,\hat{j}$
$v = 6{,}0 \text{ m/s}$
$\vec{a}_{2,0} = -2{,}5 \text{ m/s}^2\,\hat{i} - 1{,}6 \text{ m/s}^2\,\hat{j}$
$a = 3{,}0 \text{ m/s}^2$

b) Velocidad angular y aceleración angular.

$$v = \omega R \qquad 6{,}0 \text{ m/s} = \omega \cdot 12 \text{ m} \qquad \omega = 0{,}50 \text{ rad/s}$$

Como se trata de un movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante, por tanto, la aceleración angular es cero.

$$\alpha = 0$$

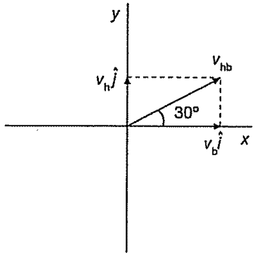
$\omega = 0{,}50 \text{ rad/s}$
$\alpha = 0$

Movimiento relativo

3.20. Un barco se dirige hacia el este a una velocidad de 32 km/h. Un marinero observa que el humo que sale de la chimenea del barco forma un ángulo de 30° con la estela que deja el barco. El viento sopla de sur a norte. Determinar la velocidad del viento. (Suponer que el humo adquiere la velocidad del aire respecto a la tierra tan pronto como sale de la chimenea.)

Solución

La velocidad del humo respecto a la tierra es la misma que la velocidad del viento.



$$v_h = v_{hb} + v_b$$

Tomamos los ejes x e y con sentidos positivos dirigidos hacia el este y hacia el norte, respectivamente.

$$\vec{v}_h = v_h\,\hat{j} \qquad \vec{v}_b = v_b\,\hat{i}$$

De la figura se deduce:

$$v_h = v_b \text{ tag } 30°$$

$$v_h = 32 \text{ km/h tag } 30° = 18{,}4 \text{ km/h}$$

Velocidad del viento 18 km/h.

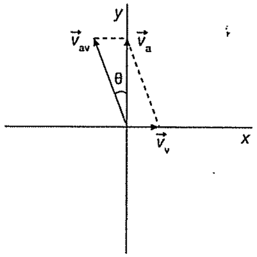
3.21. El piloto de un avión desea dirigirse hacia el norte a una velocidad de 300 km/h respecto a la tierra. El viento sopla a una velocidad respecto a la tierra de 60 km/h hacia el este.

a) ¿En qué dirección debe volar el piloto?
b) ¿Cuál será la velocidad del avión respecto al viento?

Solución

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{av} + \vec{v}_v \qquad (1$$

$\vec{v}_a$ es la velocidad del avión respecto a la tierra, $\vec{v}_{av}$ es la velocidad del avión respecto al aire y $\vec{v}_v$ es la velocidad del viento respecto a la tierra.



$$\vec{v}_a = 300 \text{ km/h}\,\hat{j} \qquad \vec{v}_a = 60 \text{ km/h}\,\hat{i}$$

a) Dirección en la que debe volar el avión.

De la figura se deduce:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v_v}{v_{av}}\,;\ \text{tg}\,\theta = \frac{60 \text{ km/h}}{300 \text{ km/h}} = 0{,}20\,;\ \theta = 11{,}3°$$

El avión debe dirigirse hacia el oeste 11° norte

a) Velocidad respecto al viento.
De (1):

$$\vec{v}_{av} = \vec{v}_a - \vec{v}_v \qquad \vec{v}_{av} = -60 \text{ km/h}\,\hat{i} + 300 \text{ km/h}\,\hat{j}$$

$$v_{av} = \sqrt{(60 \text{ km/h})^2 + (300 \text{ km/h})^2} = 305 \text{ km/h}$$

$$\vec{v}_{av} = -60 \text{ km/h}\,\hat{i} + 300 \text{ km/h}\,\hat{j}$$

$$v_{av} = 3{,}1 \cdot 10^2 \text{ km/h}$$

3.22. Cuando llueve, las gotas de agua que caen se encuentran sometidas, además de a la fuerza de la gravedad, a una fuerza de fricción con el aire; esta fuerza de fricción aumenta con la velocidad de forma que llega un momento en que se equilibra con la fuerza de la gravedad y la fuerza resultante se anula. Con lo cual, la gota sigue un movimiento uniforme con una velocidad denominada *velocidad límite*. Un día sin viento en el que las gotas de agua caen verticalmente respecto a la tierra, desde un automóvil que va a 36 km/h respecto a la tierra, se observa que las gotas caen en una dirección que forma un ángulo de 40° con la vertical. Determinar:

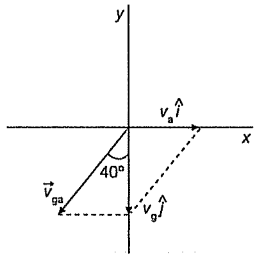
a) La velocidad límite respecto al automóvil.
b) La velocidad límite respecto a la tierra.

Solución

a) Velocidad respecto al automóvil.

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{ga} + \vec{v}_a \qquad (1$$

$\vec{v}_g$ es la velocidad de las gotas de agua, $\vec{v}_{ga}$ es la velocidad de las gotas respecto al automóvil y $\vec{v}_a$ es la velocidad del automóvil.



$$36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_g = v_g\,\hat{j}\,;\ \vec{v}_a = 10 \text{ m/s}\,\hat{i}$$

De (1) se deduce: $v_g\,\hat{j} = \vec{v}_{ga} + 10 \text{ m/s}\,\hat{i}\,;\ \vec{v}_{ga} = -10 \text{ m/s}\,\hat{i} + v_g\,\hat{j}$

Por otra parte de la figura se deduce:

$$v_{ga\,(x)} = -\,v_{ga} \text{ sen } 40°$$

Por tanto:

$$-v_{ga} \text{ sen } 40° = -10 \text{ m/s};\ v_{ga} = 15{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_{ga(y)} = -v_{ga} \cos 40°\,;\ v_{ga(y)} = -15{,}5 \text{ m/s} \cos 40° = -11{,}8 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{ga} = -10 \text{ m/s}\,\hat{i} - 12 \text{ m/s}\,\hat{j}$$
$$v_{ga} = 16 \text{ m/s}$$

b) Velocidad respecto a la tierra. De (1):

$$\vec{v}_g = -10 \text{ m/s}\,\hat{i} - 11{,}8 \text{ m/s}\,\hat{j} + 10 \text{ m/s}\,\hat{i} = 12 \text{ m/s}\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_g = -12 \text{ m/s}\,\hat{j}$$
$$v_g = 12 \text{ m/s}$$

MOVIMIENTO EN TRES DIMENSIONES

3.23. El vector de posición de una partícula varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{r} = 8{,}0\,t\,\hat{i} - 5{,}5\,t^2\,\hat{j} + 3{,}0\,t^2\,\hat{k}$, SI. Determinar:

a) Las expresiones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
b) La posición, la velocidad y la aceleración para $t = 2{,}0$ s.

Solución

a) Las expresiones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,;\ v = \frac{d\,(8{,}0\,t\,\hat{i} + 5{,}5\,t^2\,\hat{j} + 3{,}0\,t^2\,\hat{k})}{dt} = 8{,}0\,\hat{i} + 11t\,\hat{j} + 6{,}0\,t\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,;\ \vec{v} = \frac{d\,(8{,}0\,\hat{i} + 11t\,\hat{j} + 6{,}0\,t\,\hat{k})}{dt} = 11\,\hat{j} + 6{,}0\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = 8{,}0\,\hat{i} + 11\,t\hat{j} + 6{,}0\,t\,\hat{k} \text{ SI}$$
$$\vec{a} = 11\,\hat{j} + 6{,}0\,\hat{k} \text{ SI}$$

b) La posición, la velocidad y la aceleración para $t = 2{,}0$ s.

$$\vec{v}_{2{,}0} = 8{,}0\,\hat{i} + 11 \cdot 2{,}0\,\hat{j} + 6{,}0 \cdot 2{,}0\,\hat{k} = 8{,}0\,\hat{i} + 22\,\hat{j} + 12\,\hat{k}$$

$$v = \sqrt{(8{,}0\ \text{m/s})^2 + (22\ \text{m/s})^2 + (12\ \text{m/s})^2} = 26\ \text{m/s}$$

$$\vec{a} = 11\,\hat{j} + 6{,}0\,\hat{k}\,;\ (11\ \text{m/s}^2)^2 + (6{,}0\ \text{m/s}^2)^2 = 13\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{v}_{2,0} = 8{,}0\,\hat{i} + 22\,\hat{j} + 12\,\hat{k},\ v = 26\ \text{m/s}$$
$$\vec{a} = 11\,\hat{j} + 6{,}0\,\hat{k} \quad a = 13\ \text{m/s}^2$$

3.24. Una partícula que inicialmente se encuentra en reposo y en el origen de coordenadas tiene una aceleración $\vec{a} = 4{,}0\,t\,\hat{i} + 6{,}0\,t^2\,\hat{k}$, SI. Determinar:

a) Las expresiones del vector de posición y de la velocidad en función del tiempo.
b) Las coordenadas de la partícula y su celeridad para $t = 2{,}0$ s.

Solución

a) Las expresiones del vector de posición y de la velocidad en función del tiempo.

$$v_x = \int a_x\,dt\,;\ v_x = \int 4{,}0\,t\,dt = 2{,}0\,t^2 + C$$

Sabemos que, para $t = 0$, $v_{x(0)} = 0$, por tanto, $0 = 4{,}0 \cdot 0 + C$; $C = 0$. Escribiremos $v_x = 2{,}0\,t^2$.

$$v_y = \int a_y\,dt$$

Como $a_y = 0$, podemos decir que v_y es una constante. Sabemos que, para $t = 0$, $v_{y(0)} = 0$, por tanto, esta constante es cero, luego $v_y = 0$.

$$v_z = \int a_z\,dt\,;\ v_x = \int 6{,}0\,t^2\,dt = 2{,}0\,t^3 + C$$

Para $t = 0$, $v_{z\,(0)} = 0$, por tanto, $0 = 4{,}0 \cdot 0 + C$; $C = 0$. Escribiremos $v_z = 2{,}0\,t^3$.

$$\vec{v} = 2{,}0\,t^2\,\hat{i} + 2{,}0\,t^3\,\hat{k}$$

$$x = \int v_x\,dt\,;\ x = \int 2{,}0\,t^2\,dt = \frac{2{,}0}{3}\,t^3 + C$$

Inicialmente la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, esto significa: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.

En la expresión anterior tenemos: $0 = 2{,}0/3 \cdot 0 + C$, $C = 0$, por tanto, $x = 2{,}0/3\,t^3$.

$$y = \int v_y\,dt$$

Sabemos que $v_y = 0$, esto quiere decir que la componente y el vector de posición es una constante, como $y_0 = 0$, podemos afirmar que $y = 0$.

$$z = \int v_z\,dt\,;\ z = \int 2{,}0\,t^3\,dt = 0{,}50\,t^4 + C$$

Como $z_0 = 0$, $0 = 0{,}50 \cdot 0 + C$; $C = 0$, por tanto, $z = 0{,}50\,t^4$

$$\vec{v} = 2{,}0\,t^2\,\hat{i} + 2{,}0\,t^3\,\hat{k}\ \text{SI}$$
$$\vec{r} = 2{,}0/3\,t^3\,\hat{i} + 0{,}50\,t^4\,\hat{k}\ \text{SI}$$

b) Las coordenadas de la partícula y su celeridad para $t = 2{,}0$ s.

$$\vec{r}_{2,0} = 2{,}0/3 \cdot 2{,}0^3\,\hat{i} + 0{,}50 \cdot 2{,}0^4\,\hat{k} = 5{,}3\,\hat{i} + 8{,}0\,\hat{k},\ x_{2,0} = 5{,}3\ \text{m},\ y_{2,0} = 0,\ z_{2,0} = 8{,}0\ \text{m}.$$

$$\vec{v}_{2,0} = 2{,}0 \cdot 2{,}0^2\,\hat{i} + 2{,}0 \cdot 2{,}0^3\,\hat{k} = 8{,}0\,\hat{i} + 16\,\hat{k}$$

$$v_{2,0} = \sqrt{(8{,}0\ \text{m/s})^2 + (16\ \text{m/s})^2} = 18\ \text{m/s}$$

$$x_{2,0} = 5{,}3\ \text{m},\ y_{2,0} = 0,\ z_{2,0} = 8{,}0\ \text{m}$$
$$v_{2,0} = 18\ \text{m/s}$$

CUESTIONES

3.1. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son $x = 2t - 1$, $y = 4t + 3$. La trayectoria que describe esta partícula es:

a) Una circunferencia.

b) Una recta.

c) Una parábola.

d) Una curva, pero no podemos decir cuál es.

3.2. El vector de posición de un móvil viene dado por $\vec{r} = 1{,}0\, t\, \hat{i} + 0{,}50\, t^2 \hat{j}$, SI. La velocidad, para $t = 3{,}0$ s, vale:

a) $1{,}0$ m/s $\hat{i} + 3{,}0$ m/s $\hat{j}$ *c)* 1,0 m/s

b) $3{,}2$ m/s $\hat{i} + 4{,}5$ m/s $\hat{j}$ *d)* 4,0 m/s

3.3. La aceleración de un móvil viene dada por la expresión $\vec{a} = 2\,t\,\hat{i} + (6\,t^2 - 1)\,\hat{j}$. La velocidad viene dada por:

a) $\vec{v} = t\,\hat{i} + (2t^3 - 1)\,\hat{j}$ *c)* $\vec{v} = 2\,\hat{i} + 12\,t\,\hat{j}$

b) $\vec{v} = t^2\,\hat{i} + (2t^3 - t)\,\hat{j}$ *d)* $\vec{v} = (t^2 + C)\,\hat{i} + (2t^3 - t + C')\,\hat{j}$

3.4. Se desea que una flecha lanzada horizontalmente desde un torreón alcance un punto situado a una distancia de 120 m del pie del torreón. La celeridad de lanzamiento de la flecha es 30 m/s. Habrá que lanzar la flecha desde una altura de:

a) 78 m *b)* 120 m *c)* 39 m *d)* 62 m

3.5. Se lanza una pelota desde el suelo con una velocidad de 20 m/s en una dirección que forma un ángulo de 60° con la horizontal; cuando alcanza la altura máxima la celeridad es:

a) Nula. *b)* 20 m/s *c)* 17 m/s *d)* 10 m/s

3.6. Cuando un proyectil lanzado con un cañón alcanza la altura máxima, el módulo de su velocidad se reduce a la mitad. El ángulo que el cañón forma con la horizontal es

a) 45° *c)* Depende de la velocidad de lanzamiento.

b) 30° *d)* 60°

3.7. Una flecha lanzada horizontalmente desde una torre describe un movimiento parabólico, la aceleración de este movimiento:

a) Es nula. *c)* Varía con el tiempo.

b) Es la de la gravedad. *d)* En todo momento es normal a la trayectoria.

3.8. Cuando un automóvil toma una curva hacia la derecha:

a) Los dos faros tienen la misma aceleración.

b) La celeridad del faro de la derecha es mayor que la del faro de la izquierda.

c) La celeridad del faro de la derecha es menor que la del faro de la izquierda.

d) Las celeridades de los dos faros son iguales.

3.9. Un automóvil A toma una curva con una celeridad constante de 50 km/h. Otro automóvil B toma la misma curva con una celeridad de 70 km/h, también constante.

a) Tanto la aceleración de A como la de B son nulas.

b) La aceleración de A y la aceleración de B son iguales en todo momento.

c) En todo momento la aceleración de B es mayor que la de A, pero tiene la misma dirección y sentido.

d) En todo momento la aceleración de B es menor que la de A, pero tiene la misma dirección y sentido.

3.10. La componente normal de la aceleración de un móvil nos informa sobre:

a) La posición del móvil.

b) La variación de la velocidad con el tiempo.

c) La variación de la celeridad con el tiempo.

d) La variación de la dirección de la velocidad.

3.11. El módulo de la velocidad de un móvil viene dada por la expresión $v = 1{,}0\,t^2 + 2{,}0\,t$. Para $t = 1{,}0$ s, la componente tangencial de la aceleración en este instante es:

a) 4,0 m/s² *b)* 3,0 m/s² *c)* 0 *d)* 5,0 m/s²

3.12. Un móvil recorre una trayectoria curvilínea con celeridad constante, el vector aceleración es:

a) Nulo. *c)* Paralelo a la trayectoria.

b) Constante. *d)* Normal a la trayectoria.

3.13. Decimos que un movimiento es uniforme cuando el módulo de la velocidad es constante. Si un movimiento es uniforme podemos afirmar que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.

a) Siempre. *c)* Sólo si el movimiento es rectilíneo.

b) Nunca. *d)* Sólo si el movimiento es rectilíneo o circular.

3.14. En un movimiento de rotación de un disco, alrededor de un eje fijo que pasa por su centro, es igual para todos los puntos del sólido:

a) La velocidad lineal. *c)* La aceleración tangencial.

b) La velocidad angular. *d)* La aceleración normal.

3.15. Un punto A de un disco tiene una celeridad $v_A = 10$ cm/s. Otro punto B situado más al exterior, a 20 cm de A, tiene una celeridad $v_B = 20$ cm/s. La velocidad angular del disco es:

a) 1,0 rad/s *b)* 0,50 rad/s *c)* 1,5 rad/s *d)* 2,0 rad/s

3.16. La velocidad de la corriente de un río respecto a la tierra es igual a 3 m/s $\hat{i}$. Una barca inicia su travesía a una velocidad de 5 m/s $\hat{j}$ respecto al agua. Por ello podemos afirmar que la velocidad de la barca respecto a la tierra es:

a) 8 m/s *b)* No es calculable. *c)* 3 m/s $\hat{i}$ + 5 m/s $\hat{j}$ *d)* 2 m/s $\hat{i}$

3.17.1. Antonio se encuentra en una avioneta que vuela con una velocidad horizontal constante. Suelta un paquete por la ventana. Según Antonio la trayectoria que describe el paquete es:

a) Una línea recta inclinada con respecto al suelo.

b) Una parábola.

c) Una recta vertical.

d) Una curva, pero con los datos que disponemos no podemos decir qué forma tendrá.

3.17.2. Carlos es un observador que se encuentra detenido en tierra.

a) El paquete tendrá la misma aceleración para los dos observadores.

b) La aceleración del paquete tendrá el mismo módulo para los dos observadores, pero sentidos contrarios.

c) Para Antonio el paquete no tiene aceleración, en cambio para Carlos tendrá la aceleración de la gravedad.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3.18. Desde una altura de 40 m se lanza horizontalmente un proyectil con una velocidad de 20 m/s $\hat{i}$. En el mismo instante, en el pie de la vertical que pasa por el punto de lanzamiento se encuentra un vehículo que lleva una velocidad de 20 m/s *i*. Para el conductor del vehículo el proyectil describe una trayectoria:

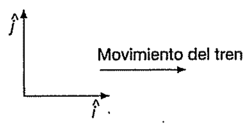
a) Parabólica.

b) Vertical hacia arriba.

c) Rectilínea horizontal y hacia la derecha.

d) Vertical hacia abajo.

3.19. Un estudiante está sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal con una velocidad constante de 10 m/s. El estudiante lanza una pelota al aire en una dirección que estima con un ángulo de 45° con la horizontal, la pelota se mueve en un plano vertical que contiene la dirección de la vía. Otro estudiante, que está parado cerca de la vía, observa que la pelota sale verticalmente. La velocidad de la pelota respecto al estudiante que viaja en el tren es:



a) Cero. *c)* 10 m/s $\hat{j}$

b) 10 m/s $\hat{i}$ + 10 m/s $\hat{j}$ *d)* −10 m/s $\hat{i}$ + 10 m/s $\hat{j}$

3.20. Un nadador cruza un río de 20 m de anchura. Supongamos que el punto de partida coincide con el origen de un sistema de coordenadas ligado a la orilla. La velocidad de la corriente es $\vec{v}_C$ = 2,0 m/s $\hat{i}$. La velocidad del nadador respecto al agua es $\vec{v}_{na}$ = −0,50 m/s $\hat{i}$ + 0,50 m/s $\hat{j}$. Las coordenadas del punto de llegada del nadador son:

a) (0, 20 m) *b)* (60 m, 20 m) *c)* (100 m, 20 m) *d)* (−60 m, 20 m)

SOLUCIONES

3.1. *b)*	**3.7.** *b)*	**3.13.** *a)*	**3.18.** *d)*
3.2. *a)*	**3.8.** *c)*	**3.14.** *b)*	**3.19.** *d)*
3.3. *d)*	**3.9.** *c)*	**3.15.** *b)*	**3.20.** *b)*
3.4. *a)*	**3.10.** *d)*	**3.16.** *c)*	
3.5. *d)*	**3.11.** *a)*	**3.17.1.** *c)*	
3.6. *d)*	**3.12.** *d)*	**3.17.2.** *a)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Problemas generales

1 Las coordenadas de un móvil vienen dadas por las expresiones $x = 12$ m/s t, $y = 5{,}0$ m/s^2 t^2.

a) Calcular las coordenadas de la posición para $t = 4{,}0$ s.

b) Escribir la expresión del vector de posición $\vec{r}$.

c) Averiguar la ecuación de la trayectoria.

Sol.: a) $x = 48$ m, $y = 80$ m; *b)* $\vec{r} = 12$ m/s $t\,\hat{i} + 5{,}0$ m/s^2 $t^2\,\hat{j}$; *c)* $y = (5{,}0/144)\,x^2$

2 La posición de una partícula en función del tiempo está dada por $\vec{r} = 2{,}0$ m/s $t^2\,\hat{i} + 4{,}0$ m/s^2 $t\,\hat{j}$. Determinar:

a) La posición en los instantes $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s.

b) La velocidad media entre $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s.

Sol.: *a)* $\vec{r} = 8{,}0$ m $\hat{i} + 8{,}0$ m $\hat{j}$, $\vec{r} = 50$ m $\hat{i} + 20$ m $\hat{j}$; *b)* $\vec{v}_m = 14$ m/s $\hat{i} + 4{,}0$ m/s $\hat{j}$

3 El vector de posición de una partícula viene dado por la expresión $\vec{r} = 10$ m/s $t\,\hat{i} + 16$ m/s^2 $t^2\,\hat{j}$.

a) Calcular las coordenadas de esta partícula para $t = 2{,}0$ s.

b) Escribir la ecuación de la velocidad y hallar su valor para $t = 2{,}0$ s.

Sol.: *a)* $x = 20$ m, $y = 64$ m; *b)* $\vec{v} = 10$ m/s $\hat{i} + 32$ m/s^2 $t\,\hat{j}$, $\vec{v} = 10$ m/s $\hat{i} + 64$ m/s $\hat{j}$, $v = 65$ m/s

4 Un camión sube por una pendiente de una carretera con una velocidad $\vec{v} = 25$ km/h $\hat{i} + 12$ km/h $\hat{j}$. El eje x del sistema de referencia coincide con la horizontal y el eje y coincide con la vertical. Calcular:

a) La inclinación de esta pendiente.

b) ¿Qué valor indicará el velocímetro de este camión?

Sol.: *a)* 26°; *b)* 28 km/h

5 Un objeto se mueve en el plano xy con una aceleración $\vec{a} = 6{,}0$ m/s^2 $\hat{j}$. En el instante $t = 0$ s se encuentra en el punto $x = 2{,}0$ m, $y = 4{,}0$ m y la velocidad vale $\vec{v}_0 = 1{,}0$ m/s $\hat{i} + 8{,}0$ m/s $\hat{j}$.

a) Escribir las ecuaciones de la velocidad y de la posición.

b) Hallar la ecuación de la trayectoria.

Sol.: *a)* $\vec{v} = 1{,}0$ m/s $\hat{i}$ + (6,0 m/s^2 t + 8,0 m/s) $\hat{j}$, $\vec{r}$ = (1,0 m/s t + 2,0 m) $\hat{i}$ + (3,0 m/s^2 t^2 + 8,0 m/s t + 4,0 m) $\hat{j}$; *b)* $y = 3\,x^2 - 4\,x$

6 La coordenada x de una partícula viene dada por la expresión $x = 4\,t$. Esta partícula describe una parábola de ecuación $y = 2\,x^2$.

a) Escribir la ecuación de la posición en función del tiempo.

b) Hallar las ecuaciones de la velocidad y de la celeridad en función del tiempo.

Sol.: *a)* $\vec{r} = 4t\,\hat{i} + 32t^2\,\hat{j}$; *b)* $\vec{v} = 4\,\hat{i} + 64\,t\,\hat{j}$, $v = 4\,(1 + 256\,t^2)^{1/2}$

7 Una partícula describe una trayectoria circular centrada en el origen de coordenadas. Cuando su velocidad vale $\vec{v} = 4{,}0$ m/s $\hat{i} - 3{,}0$ m/s $\hat{j}$ la partícula se encuentra en el punto $\vec{r} = x\,\hat{i} + 16$ m $\hat{j}$. Determinar:

a) La posición.

b) El radio de la circunferencia.

c) La ecuación de la trayectoria.

Sol.: *a)* $\vec{r} = 12$ m $\hat{i} + 16$ m $\hat{j}$; *b)* 20 m; c) $x^2 + y^2 = 400$ m^2

Movimiento de proyectiles

8 Se dispara horizontalmente una bala de rifle y cuando su desplazamiento horizontal es de 100 m ha descendido una altura de 67 cm. Determinar:

a) El tiempo que ha tardado en descender los 67 cm.

b) La velocidad de lanzamiento.

Sol.: *a)* 0,37 s; *b)* $2{,}7 \cdot 10^2$ m/s i

9 Un avión que vuela en dirección horizontal con una celeridad de 252 km/h deja caer verticalmente tres bombas a intervalos de 2,0 s. Dibujar un gráfico de las posiciones de las bombas a los 2,0 s después de lanzar la tercera.

Sol.: Las tres bombas se encuentran todo el rato en la misma vertical dado que la velocidad horizontal de las bombas y del avión es la misma. Las distancias verticales a partir del punto de lanzamiento que han recorrido son $1{,}8 \cdot 10^2$ m, 78 m y 20 m, respectivamente.

10 Se lanza horizontalmente una pelota con una celeridad de 5,0 m/s. Al cabo de 0,25 s:

a) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se encuentra la pelota?

b) ¿Qué ángulo forma con la horizontal la dirección del movimiento de la pelota?

Sol.: *a)* 1,3 m; *b)* −26°

11 Un avión, que está persiguiendo a un lancha, tiene una celeridad de 73 m/s y sigue una trayectoria rectilínea paralela a la de la lancha a una altura de 312 m. La lancha tiene una celeridad de 24 m/s y también describe una trayectoria rectilínea. ¿A qué distancia horizontal de la lancha debe dejar caer una bolsa de comida para que caiga sobre la lancha?

a) Si ambos se mueven en el mismo sentido.

b) Si se mueven en sentidos contrarios.

Sol.: *a)* $3{,}9 \cdot 10^2$ m; *b)* $7{,}7 \cdot 10^2$ m

12 Un niño que se encuentra en un balcón lanza desde una altura y_0 una pelota en la dirección perpendicular al edificio con una celeridad v. En el mismo instante, otro niño, que está en la calle, lanza con la misma celeridad v otra pelota verticalmente hacia arriba, desde un pun-

to situado a una distancia x por debajo de la horizontal que pasa por el punto de partida de la primera pelota. ¿A qué distancia del pie del edificio ha de encontrarse este segundo niño para que choquen las dos pelotas?

Sol.: y_0

13. **Un futbolista lanza el balón con una velocidad de 17 m/s que forma un ángulo de 58° con la horizontal. Determinar:**

    a) El tiempo que tarda el balón en tocar al suelo.

    b) El alcance.

    c) La altura máxima.

    Sol.: a) 3,0 s; *b)* 26 m; *c)* 11 m

14. **Se lanza una pelota en una dirección que forma un ángulo de 37° con la horizontal. Si se desea que llegue a una distancia de 38 m:**

    a) ¿Con qué celeridad debe lanzarse?

    b) ¿Qué altura máxima alcanzará?

    Sol.: a) 20 m/s; *b)* 7,1 m

15. **Un atleta lanza un peso a una distancia de 20 m. Sabiendo que el lanzamiento se ha efectuado a una altura de 2,0 m en una dirección que forma un ángulo de 45° respecto a la horizontal, calcular:**

    a) El tiempo que tarda el peso en tocar tierra.

    b) La velocidad inicial del peso.

    Sol.: a) 13 m/s; *b)* 2,1 s

16. **Un artista de circo está corriendo a la vez que lanza pelotas con la mano con una celeridad respecto al suelo de 10 m/s y una inclinación respecto a la horizontal de 45°. ¿A qué velocidad debe correr el artista para recoger las pelotas antes de que toquen el suelo a la misma altura que las lanzó?**

    Sol.: 7,1 m/s $\hat{i}$

17. **Un trozo de hielo resbala por un tejado que forma un ángulo de 37° con la horizontal y al llegar al extremo tiene una velocidad de 8,6 m/s y se encuentra a una altura del suelo de 10 m.**

    a) Averiguar si el trozo de hielo alcanzará a un señor de 1,80 m de altura que se encuentra en la acera a 1,20 m del pie del edificio.

    b) En el caso de que no le alcance, hallar la distancia entre el pie del edificio hasta el punto donde el hielo toca el suelo.

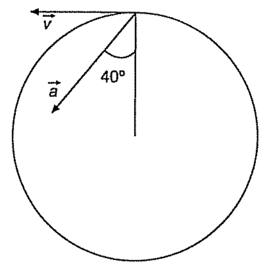
    Sol.: a) No; *b)* 6,8 m

Componentes intrínsecas de la aceleración

Una partícula describe una circunferencia de 36 cm de radio con una celeridad de 12 cm/s. ¿Cuál es la componente normal de la aceleración de esta partícula?

Sol.: 4,0 cm/s^2

19. **En un cierto instante el vector representativo de la aceleración de una partícula que describe una circunferencia de 4,0 m de radio forma un ángulo de 40° con el radio. En este instante la celeridad es de 6,0 m/s. Determinar:**



    a) La componente normal de la aceleración.

    b) La componente tangencial de la aceleración.

    c) La aceleración.

    Sol.: a) $a_n = 9{,}0$ m/s^2; *b)* $a_t = 7{,}6$ m/s^2; *c)* $\vec{a} = 7{,}6$ m/s$^2\,\hat{u}_t$ + 9,0 m/s$^2\,\hat{u}_n$, $a = 12$ m/s^2

20. **Un móvil parte del reposo y del origen y describe una trayectoria circular de 60 cm de radio, la componente tangencial de la aceleración viene dada por la expresión $a_t = 60t$ cm/s^2. Calcular la aceleración para $t = 2{,}0$ s.**

    Sol.: $\vec{a} = 1{,}2$ m/s$^2\,\hat{u}_t + 2{,}4$ m/s$^2\,\hat{u}_n$, $a = 2{,}7$ m/s^2

21. **Para que un tren de alta velocidad pueda superar la velocidad de los 300 km/h, los radios de las curvas deben ser inferiores a 7,00 km. Determinar:**

    a) La componente normal de la aceleración cuando el tren toma una curva de este radio a 300 km/h.

    b) Si la componente normal de la aceleración es la calculada en *a)*, ¿cuál será el menor radio de una curva cuando el tren vaya 250 km/h?

    Sol.: a) 12,9 km/h^2; *b)* 4,86 km

22. **Hallar la aceleración de un punto de la periferia de la rueda de una motocicleta de 60 cm de diámetro que lleva una velocidad uniforme de 72 km/h.**

    Sol.: $1{,}3 \cdot 10^3$ m/s^2

23. **Un automóvil que va a 75 km/h se encuentra en la parte inferior de un badén de 80 m de radio. En este preciso instante acelera y al cabo de 1,0 s va a 90 km/h. Determinar la aceleración del automóvil, supuesta uniforme.**

    Sol.: $\vec{a} = 4{,}2$ m/s$^2\,\hat{u}_t + 5{,}4$ m/s$^2\,\hat{u}_n$, $a = 6{,}8$ m/s^2

Magnitudes angulares

24. **El ojo humano puede ver separados dos objetos puntiformes que subtienden desde el ojo un ángulo como mínimo de 1° de arco. ¿Qué diámetro mínimo debe tener un disco situado a una distancia de 100 m del ojo para que aún pueda ser distinguido?**

    Sol.: 3 cm

25 **Un satélite está situado en una órbita en el plano ecuatorial de la Tierra a una altura sobre la superficie terrestre de $3{,}58 \cdot 10^7$ m. Este satélite se mantiene constantemente sobre el mismo punto de la superficie terrestre (satélite geoestacionario). Hallar:**

a) El período de rotación del satélite.

b) Su celeridad respecto a un sistema de referencia ligado al centro de la Tierra. Radio de la Tierra $6{,}37 \cdot 10^3$ km.

Sol.: a) 1 día; *b)* 3,07 km/s

26 **Un disco de 1,0 m de diámetro que se encuentra en reposo acelera uniformemente durante 20 s y alcanza una velocidad de 2 000 rpm. Determinar:**

a) La aceleración angular.

b) Las vueltas que ha dado hasta alcanzar dicha velocidad.

c) La celeridad y la aceleración de un punto de la periferia al cabo de 0,60 s después de iniciar el movimiento.

Sol.: a) 10 rad/s^2 ; *b)* $3{,}3 \cdot 10^2$ vueltas; *c)* 3,1 m/s, $\vec{a} = 5{,}2$ m/s^2 $\hat{u}_t$ + 19 m/s^2 $\hat{u}_n$, $a = 20$ m/s

27 **Una piedra de afilador acelera desde el reposo con una aceleración angular de 5,0 rad/s^2 durante 8,0 s. Al cabo de un cierto tiempo frena uniformemente y da 10 vueltas antes de detenerse. Determinar la aceleración de frenado y el tiempo que se ha tardado en frenar.**

Sol.: −13 rad/s^2; 3,1 s

28 **Las ecuaciones del movimiento de un punto son $x = 12$ sen 4,2 rad/s t; $y = 10$ cos 4,2 rad/s t, SI. Hallar la ecuación de la trayectoria.**

Sol.: $x^2/144 + y^2/100 = 1$

29 **En un movimiento circular, el vector de posición, referido a un sistema de coordenadas con origen en el centro de la circunferencia, puede expresarse de la forma $\vec{r} = r(\cos \omega t\, \hat{i} + \text{sen}\, \omega t\, \hat{j})$, donde ω representa la velocidad angular, que si se trata de un movimiento circular uniforme, es una constante. Comprobar que la aceleración puede expresarse de la forma $a = -\omega^2 r$.**

30 **El segundero de un reloj tiene una longitud de 12 mm. Calcular para el extremo del segundero y en el momento $t = 0{,}20$ s.**

a) La posición.

b) La velocidad.

c) La aceleración.

Tomar como origen de tiempos el momento en que la aguja está sobre el 12 y sentido positivo el del movimiento de las agujas del reloj.

Sol.: a) $\vec{r}_{5,0} = 0{,}60$ cm $\hat{i}$ + 1,0 cm $\hat{j}$; *b)* $\vec{v}_{5,0} = 0{,}11$ cm $\hat{i}$ − 0,063 cm $\hat{j}$; *c)* $\vec{a}_{5,0} = -6{,}6 \cdot 10^{-3}$ cm $\hat{i}$ − $11 \cdot 10^{-3}$ cm $\hat{j}$

31 **La posición medida sobre la trayectoria de un punto material que describe una circunferencia viene dada por $S = t^3 + 2{,}0\, t^2$, S viene expresada en metros y t en segundos. En el instante $t = 2{,}0$ s, el módulo de la aceleración vale 20 m/s^2. Determinar para este instante:**

a) La componente tangencial de la aceleración.

b) La componente normal de la aceleración.

c) El radio de la circunferencia.

Sol.: a) 16 m/s^2; *b)* 12 m/s^2; *c)* 33 m

Movimiento relativo

32 **Un automóvil A que se dirige hacia el este con una celeridad de 54 km/h se cruza con otro automóvil B que se dirige hacia el norte con una celeridad de 36 km/h. Determinar:**

a) La velocidad de B respecto a A.

b) La posición de B respecto a A al cabo de 6,0 s.

(Tomar como origen de coordenadas el punto de intersección de las dos calles, el eje x dirigido hacia el este y el eje y dirigido hacia el norte).

Sol.: a) $\vec{v}_{BA} = -15$ m/s $\hat{i}$ + 10 m/s $\hat{j}$; *b)* $\vec{r}_{BA} = -90$ m $\hat{i}$ + 60 m $\hat{j}$

33 **Un nadador es capaz de nadar a 2,0 m/s en las aguas tranquilas de un lago.**

a) Si nada perpendicularmente a la corriente de 0,80 m/s de un río de anchura 300 m, ¿a qué distancia aguas abajo, respecto al punto opuesto al de partida, llegará a la orilla?

b) ¿Hacia dónde debe dirigirse el nadador para tocar tierra en un punto situado enfrente del de partida?

Sol.: a) $3{,}2 \cdot 10^2$ m; *b)* 24° aguas arriba

34 **Un avión vuela desde un punto A a otro punto B, situado a una distancia l y hacia el este, con una celeridad V respecto al aire y vuelve otra vez a A con la misma celeridad relativa al aire. El viento sopla de sur a norte con una celeridad v respecto al suelo. Calcular el tiempo total que empleará el avión en efectuar el viaje de ida y vuelta.**

Sol.: $t = \dfrac{2l}{\sqrt{V^2 - v^2}}$

35 **Dos barcas A y B salen del mismo punto de un puerto. La barca A se dirige hacia el N30°E a 36 km/h y la barca B se dirige hacia el N70°E a 27 km/h. Determinar:**

a) La velocidad de la barca B respecto a la barca A.

b) La distancia que separa a ambas barcas al cabo de 1,0 min.

Sol.: a) $\vec{v}_{BA} = -6{,}1$ m/s $\hat{i}$ + 2,0 m/s $\hat{j}$, $v_{BA} = 6{,}4$ m/s; *b)* $3{,}9 \cdot 10^2$ m

36 **El agua de un río, de 100 m de ancho, fluye hacia el norte con una velocidad de 30 km/h. Una barca lleva una velocidad respecto al agua de 40 km/h hacia el este. Determinar:**

a) La velocidad de la barca respecto a la tierra.

b) La distancia al norte, respecto al punto de partida, que alcanzará la barca al llegar a la orilla opuesta.

Si el barquero desea llegar a la otra orilla exactamente en el punto opuesto y para ello lleva una velocidad respecto al agua de módulo 50 km/h, determinar:

c) La dirección en la que tendría que moverse la barca (ángulo respecto a la recta que une el punto de partida y el punto de llegada).

d) La velocidad de la barca respecto a la tierra.

Sol.: *a)* $\vec{v}_b = 40\ \text{km/h}\ \hat{i} + 30\ \text{km/h}\ \hat{j}$, $v_b = 50$ km/h; *b)* 75 km; *c)* $-37°$; *d)* $\vec{v}_{bt} = 40\ \text{km/h}\ \hat{i}$

MOVIMIENTO EN TRES DIMENSIONES

37 **Un tiburón se mueve 5,1 m hacia el norte en 30 s, 38 m hacia el este en 20 s y asciende 5,6 m en 2,0 s. Hallar la velocidad media del tiburón. (Tomar el eje x con sentido positivo hacia el este, el eje y con sentido positivo hacia arriba y el eje z con sentido positivo hacia el sur).**

Sol.: $\vec{v}_m = 1{,}9\ \text{m/s}\ \hat{i} + 2{,}8\ \text{m/s}\ \hat{j} - 0{,}17\ \text{m/s}\ \hat{k}$, $v_m = 3{,}4$ m/s

38 **Las ecuaciones del movimiento de una partícula son $x = 2{,}5\,t$; $y = 5{,}0\,t - 1{,}0$; $z = 10\,t - 14$, SI. Hallar:**

a) La ecuación de la posición de la partícula.

b) La posición inicial.

c) La posición y la velocidad para $t = 2{,}0$ s.

Sol.: *a)* $\vec{r} = 2{,}5\ \text{m/s}\ t\ \hat{i} + (5{,}0\ \text{m/s}\ t - 1{,}0\ \text{m})\ \hat{j} + (10\ \text{m/s}\ t - 14\ \text{m})\ \hat{k}$; *b)* $\vec{r}_0 = -1{,}0\ \text{m}\ \hat{j} - 14\ \text{m}\ \hat{k}$; *c)* $\vec{r}_{2,0} = 5{,}0\ \text{m}\ \hat{i} + 9{,}0\ \text{m}\ \hat{j} + 6{,}0\ \text{m}\ \hat{k}$, $r_{2,0} = 12$ m, $\vec{v}_{2,0} = 2{,}5\ \text{m/s}\ \hat{i} + 5{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j} + 10\ \text{m/s}\ \hat{k}$, $v_{2,0} = 11$ m/s

CAPÍTULO 4

DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

4.1. LEYES DE NEWTON

La *fuerza* $\vec{F}$ es la magnitud vectorial que se utiliza para describir la interacción entre dos cuerpos, o entre un cuerpo y su entorno. En el sistema internacional de unidades las fuerzas se expresan en newton (N).

Las leyes de Newton relacionan las fuerzas que actúan sobre una partícula con los cambios en su movimiento.

Primera ley o *ley de la inercia.* Toda partícula se mantiene en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme cuando la suma de fuerzas que actúa sobre ella es igual a cero.

La primera ley no distingue entre un objeto en reposo y uno que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. Los sistemas de referencia en los que se cumple la primera ley de Newton son los *sistemas de referencia inerciales.* Normalmente se utiliza como referencia un sistema ligado a la Tierra, que aunque no es rigurosamente inercial, puesto que la Tierra se mueve alrededor del Sol, sí es una muy buena aproximación.

Segunda ley. La aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella e inversamente proporcional a su masa.

$$\vec{F}_{RES} = \sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

Esta ecuación puede expresarse mediante tres ecuaciones escalares:

$$\sum_i F_{ix} = m \cdot a_x \qquad \sum_i F_{iy} = m \cdot a_y \qquad \sum_i F_{iz} = m \cdot a_z$$

Tercera ley o *ley de la acción - reacción.* Las fuerzas siempre actúan por pares. Si la partícula A ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre la partícula B, la partícula B ejercerá una fuerza sobre A $\vec{F}_{BA}$ de igual módulo, dirección y de sentido contrario.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

La pareja de fuerzas $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{BA}$ se puede denominar acción - reacción o reacción - acción indistintamente. Esta nomenclatura NO indica que una fuerza sea consecuencia de la otra o viceversa.

Las leyes de Newton se verifican siempre que el observador esté situado en un sistema de referencia inercial. Son aplicables a objetos ordinarios (un coche, un bloque, una persona...) cuando su forma o dimensiones no influya en su respuesta ante la fuerza que actúa sobre ellos.

4.2. LAS FUERZAS EN LA NATURALEZA

Todas las fuerzas presentes en la naturaleza pueden explicarse a partir de cuatro interacciones fundamentales. Éstas son la fuerza gravitatoria, la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil.

El *peso* $\vec{P}$ de un objeto es la fuerza de atracción gravitatoria que el planeta Tierra ejerce sobre él. El peso de todos los cuerpos situados en la superficie del planeta viene dado por el producto de su masa por la aceleración de la gravedad $g = 9{,}81$ m/s^2.

Una gran parte de las fuerzas que cotidianamente observamos se ejercen por contacto directo. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Fuerzas de contacto entre dos sólidos. La fuerza de contacto entre dos sólidos puede descomponerse en dos términos: la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.

La fuerza *normal* ($\vec{N}$) es perpendicular a la superficie de contacto.

La fuerza de *rozamiento* ($\vec{F}_r$) es paralela a la superficie de contacto.

Cuando hay movimiento relativo de las dos superficies que entran en contacto la fuerza de *rozamiento* es de tipo *cinético* ($\vec{F}_c$) y tiene sentido opuesto al movimiento. Su módulo viene determinado por el producto de la normal por el coeficiente de rozamiento cinético μ_c, $F_c = \mu_c N$.

Cuando no existe desplazamiento relativo de las superficies en contacto el *rozamiento* es de tipo *estático* ($\vec{F}_e$). El valor de la fuerza de rozamiento estático *no es fijo,* puede variar desde cero hasta un valor máximo igual a $\mu_e N$. Siendo μ_e el coeficiente de rozamiento estático.

$$0 \leq F_e \leq \mu_e N$$

Los valores de μ_c y de μ_e dependen de los materiales de las superficies que entran en contacto. El valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e suele ser superior a μ_c.

Cuerdas. Las cuerdas se pueden utilizar para tirar de los cuerpos. La fuerza que transmite una cuerda se denomina tensión, $\vec{T}$. Cuando la masa de una cuerda es despreciable la tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda.

Muelles. La fuerza que ejerce un muelle $\vec{F}_m$ es proporcional a la distancia Δx que se ha alargado o comprimido con respecto a su longitud natural, y de sentido contrario.

$$F_m = -k\,\Delta x$$

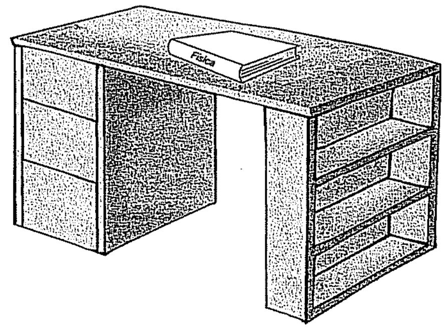
La constante de proporcionalidad k es la constante recuperadora del muelle.

4.3. DIAGRAMA DEL SÓLIDO LIBRE

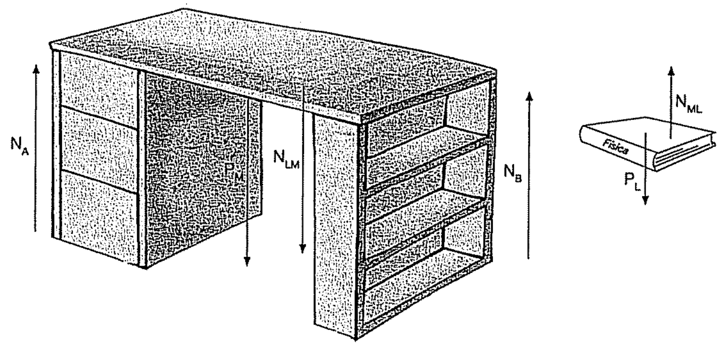
El diagrama del sólido libre es el esquema de las fuerzas que actúan sobre un objeto. La correcta realización de este diagrama es un paso previo imprescindible antes de aplicar las leyes de Newton.

Seguidamente se muestra un ejemplo.

Un libro descansa sobre una mesa.



En la siguiente figura se presenta el diagrama del sólido libre para la mesa y el libro.



Sobre el libro actúan:

$\vec{P}_L$: el peso del libro. Es la fuerza con que el planeta Tierra lo atrae.

$\vec{N}_{ML}$: la fuerza normal que la mesa ejerce sobre el libro.

Sobre la mesa actúan:

- $\vec{P}_M$: el peso de la mesa. Es la fuerza con que el planeta Tierra atrae a la mesa.
- $\vec{N}_A$: la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la pata A de la mesa.
- $\vec{N}_B$: la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la pata B de la mesa.
- $\vec{N}_{LM}$: la fuerza normal que el libro ejerce sobre la mesa. Según la tercera ley de Newton esta fuerza es igual en módulo, dirección y de sentido contrario a la que hace la mesa sobre el libro.

Nótese que $\vec{N}_{ML}$ y $\vec{N}_{LM}$ son una pareja de fuerzas acción-reacción. Es importante subrayar que estas fuerzas actúan sobre objetos distintos: $\vec{N}_{ML}$ sobre el libro y $\vec{N}_{LM}$ sobre la mesa.

También hay que destacar que $\vec{N}_{ML}$ no es la fuerza de reacción del peso del libro. La reacción a $\vec{P}_L$ es la fuerza que el libro realiza sobre el planeta Tierra y se encuentra aplicada en el centro del planeta.

4.4 CONDICIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA O CUERPO PUNTUAL

Un cuerpo puntual se encuentra en equilibrio estático cuando siendo observado desde un sistema de referencia inercial se halla en reposo o moviéndose con un movimiento rectilíneo uniforme.

La condición de equilibrio estático de un cuerpo puntual se deduce de la primera ley de Newton. Así pues, cuando la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo puntual es cero, éste se mantiene en equilibrio estático. Esta condición se traduce en las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0$$

4.5 SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERCIALES

Las leyes de Newton sólo se cumplen en sistemas de referencia inerciales. En un sistema de referencia acelerado con aceleración $\vec{a}_{SNI}$ se observa que la fuerza resultante que actúa sobre un objeto no es igual a la masa por su aceleración. Para aplicar la segunda ley de Newton en sistemas de referencia no inerciales es necesario añadir un término denominado fuerza ficticia, $\vec{F}_{fic}$ que es igual a la masa del objeto por la aceleración del sistema de referencia cambiada de signo, $\vec{F}_{fic} = -m\vec{a}_{SNI}$. En estos casos la segunda ley se expresa de la forma:

$$\vec{F}_{RES} + \vec{F}_{fic} = m\vec{a}$$

$\vec{F}_{fic}$ se denomina ficticia porque no es debida a ningún agente físico (como una cuerda, un muelle, el rozamiento, etc.), sino que se introduce para poder rescribir la segunda ley de Newton en un sistema de referencia no inercial.

4.6 ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA

Para resolver los problemas de dinámica es conveniente seguir el procedimiento siguiente:

1) Leer el problema con atención.
2) Hacer un dibujo preciso del sistema.
3) Identificar el objeto o los objetos a los que se aplicará la segunda ley de Newton. Realizar el diagrama del sólido libre para cada uno de los objetos. Las fuerzas se dibujarán en la misma dirección que actúan sobre el objeto.
4) Escoger los ejes de coordenadas. La dirección de estos ejes debe ser la óptima para la resolución del problema. Muchas veces conviene que la dirección de uno de estos ejes coincida con la dirección del movimiento. En caso de que no haya movimiento puede hacerse coincidir con la dirección de alguna fuerza. Dibujar los ejes.

5) Escribir y resolver las ecuaciones del movimiento. Se deberán escribir tantas ecuaciones independientes como incógnitas se tengan.
6) Analizar los resultados y mirar si el orden de magnitud es razonable.

PROBLEMAS RESUELTOS

ESTÁTICA DEL PUNTO

4.1. Sobre un objeto puntual de masa $m = 4$ kg actúan tres fuerzas:

$\vec{F}_1 = 2\,\text{N}\hat{i} - 5\,\text{N}\hat{j}$, $\vec{F}_2 = -1\,\text{N}\hat{i} + 3\,\text{N}\hat{j}$ y $\vec{F}_3$. Si el sistema se encuentra en equilibrio estático, ¿cuál es el valor de la fuerza $\vec{F}_3$?

Solución

La condición de equilibrio para un punto material es que $\vec{F}_{RES} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ por lo que $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -[(2-1)\,\text{N}\,\hat{i} + (3-5)\,\text{N}\,\hat{j}] = -1\,\text{N}\,\hat{i} + 2\,\text{N}\,\hat{j}$

4.2. Un bloque de masa $m = 2{,}5$ kg se encuentra en equilibrio estático colgado de tres cables. Determinar la tensión de los cables para las situaciones representadas en las Figuras 1 y 2.

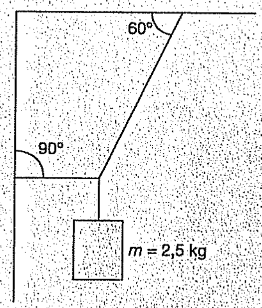


Figura 1

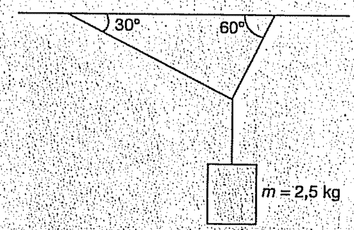
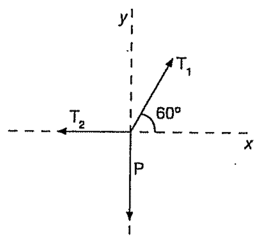


Figura 2

Solución

El punto en el que confluyen los tres cables se encuentra en equilibrio estático, por lo que la suma de las fuerzas que actúan en este punto deberá ser igual a cero.

Así pues para la Figura 1 tendremos:



Aplicando la condición de equilibrio $\sum_i F_{iy} = 0$

$$+\uparrow \quad T_1 \text{ sen } 60° - mg = 0;\ T_1 = \frac{2{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\text{sen } 60°} = 28{,}3\ \text{N}$$

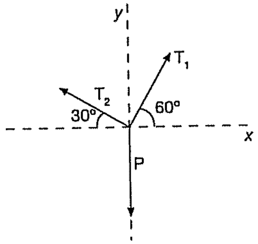
y $\sum_i F_{ix} = 0$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $T_1 \cos 60° - T_2 = 0 \qquad T_2 = 28{,}3\ \text{N} \cdot \cos 60° = 14{,}2\ \text{N}$

Las tensiones son $T_1 = 28\text{N}$ y $T_2 = 14\text{N}$.

Para la Figura 2:

Aplicando la condición de equilibrio $\sum_i F_{iy} = 0$:



$+\uparrow$ $T_1 \operatorname{sen} 60° + T_2 \operatorname{sen} 30° - mg = 0$ (1)

y $\sum_i F_{ix} = 0$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $T_1 \cos 60° - T_2 \cos 30° = 0 \qquad T_1 = \dfrac{T_2 \cos 30°}{\cos 60°}$ (2)

Sustituyendo T_1 en (1):

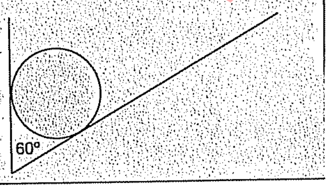
$T_2 \cos 30° \operatorname{tg} 60° + T_2 \operatorname{sen} 30° = mg \qquad T_2 = \dfrac{2{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\cos 30° \operatorname{tg} 60° + \operatorname{sen} 30°} = 12{,}3\ \text{N}$

Sustituyendo en (2):

$T_1 = \dfrac{12{,}3\ \text{N} \cos 30°}{\cos 60°} = 21{,}3\ \text{N}$

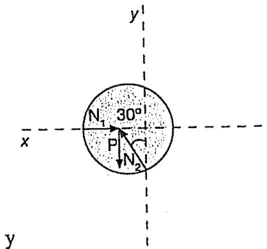
Las tensiones son $T_1 = 21$ N y $T_2 = 12$ N.

4.3. Una esfera de masa $m = 5{,}0$ kg se encuentra apoyada en dos planos lisos como indica la figura. Determinar el valor de las fuerzas de reacción de los planos con la esfera.



Solución

Como la esfera se encuentra en equilibrio, la suma de fuerzas que actuarán sobre ella será igual a cero Aplicando la condición de equilibrio:



$+\uparrow$ $\sum_i F_{iy} = 0 \qquad N_2 \cos 30° - mg = 0$

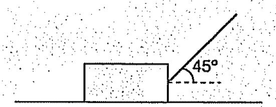
$N_2 = \dfrac{mg}{\cos 30°} = \dfrac{5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\cos 30°} = 56{,}6\ \text{N}$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\sum_i F_{ix} = 0 \qquad N_1 - N_2 \operatorname{sen} 30° = 0$

$N_1 = N_2 \operatorname{sen} 30° = 56{,}6\ \text{N} \operatorname{sen} 30° = 28{,}3\ \text{N}$

Las fuerzas de reacción con los planos de la esfera son $N_1 = 28$ N y $N_2 = 57$ N.

4.4. Se pretende arrastrar una caja de masa $m = 55$ kg tirando de ella con una cuerda inclinada 45°. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo es $\mu_e = 0{,}90$ y el de rozamiento cinético $\mu_c = 0{,}80$.



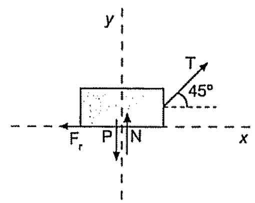
a) Determinar la tensión necesaria para poner la caja en movimiento.

b) Calcular la tensión que se debe ejercer para mantener la caja deslizándose a velocidad constante.

c) Calcular el valor de la fuerza de fricción y de la normal cuando la tensión de la cuerda es de 100 N.

Solución

a) En el siguiente diagrama se detallan las fuerzas que actúan sobre la caja.



Supondremos una situación de movimiento inminente, es decir $\sum_i \vec{F}_i = 0$ y la fuerza de fricción estática, F_e, igual a su valor máximo $F_{e\,\text{máx}} = \mu_e N$.
En esta situación

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\sum_i F_{ix} = 0 \qquad T \cos 45° - F_{e\,\text{máx}} = 0 \qquad F_{e\,\text{máx}} = \mu_e N$ (1)

$+\uparrow$ $\sum_i F_{iy} = 0 \qquad T \operatorname{sen} 45° + N - mg = 0$ (2)

De la ecuación (2) se deduce que $N = mg - T \operatorname{sen} 45°$ y por tanto $F_{e\,\text{máx}} = \mu_e\,(mg - T \operatorname{sen} 45°)$. Sustituyendo este valor en (1):

$T \cos 45° - \mu_e\,(mg - T \operatorname{sen} 45°) = 0$

$T = \dfrac{\mu_e\, mg}{\cos 45° + \mu_e \operatorname{sen} 45°}$

$T = \dfrac{0{,}90 \cdot 55\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\cos 45° + 0{,}90 \operatorname{sen} 45°} = 361\ \text{N} \qquad T = 0{,}36\ \text{kN}$

b) Cuando la caja se encuentra en movimiento a velocidad constante, la fuerza resultante sigue siendo cero. Ahora, a diferencia del caso anterior, como existe un movimiento relativo de la superficie de la caja con respecto al suelo, el rozamiento será de tipo cinético. Aplicando la primera ley de Newton:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad T\cos 45° - \mu_c N = 0$$

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad T\sin 45° + N - mg = 0$$

La tensión necesaria para mantener la caja moviéndose a velocidad constante será:

$$T = \frac{\mu_c mg}{\cos 45° + \mu_c \operatorname{sen} 45°}$$

$$T = \frac{0{,}80 \cdot 55 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\cos 45° + 0{,}80 \operatorname{sen} 45°} = 0{,}34 \text{ kN}$$

c) Cuando la tensión ejercida es de 100 N la caja permanecerá en reposo, por ser este valor inferior al calculado anteriormente para ponerla en movimiento. Entonces la fuerza de fricción será de tipo estático e inferior al valor de la fuerza de fricción estática máxima $F_e < \mu_e N$.

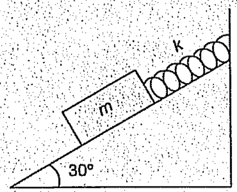
La descomposición de fuerzas será:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad T\cos 45° - F_e = 0 \qquad F_e = T\cos 45° = 100 \text{ N} \cos 45° = 71 \text{ N}$$

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad T\operatorname{sen} 45° + N - mg = 0 \qquad N = mg - T\operatorname{sen} 45°$$

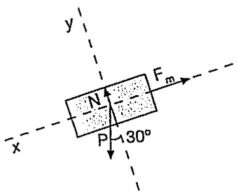
$$N = 55 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 - 100 \text{ N} \cdot \operatorname{sen} 45° = 0{,}47 \text{ kN}$$

4.5. Un bloque de masa $m = 3{,}5$ kg se encuentra en equilibrio sobre un plano inclinado. El bloque se encuentra sujetado a una pared mediante un muelle de constante recuperadora $k = 0{,}20$ kN/m. Calcular el alargamiento del muelle.



Solución

El alargamiento del muelle es proporcional a la fuerza que actúa sobre él. Esta fuerza, en módulo, es igual a la fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque.



Sobre el bloque actúan las fuerzas representadas en el diagrama del sólido libre adjunto. Éstas son el peso $\vec{P}$, la fuerza normal que hace el plano $\vec{N}$, y la fuerza realizada por el muelle $\vec{F}_m$. Dado que el bloque se encuentra en equilibrio la suma de las fuerzas que le están aplicadas es cero.

Seguidamente se aplica la condición de equilibrio de una partícula. Sólo se considera la componente x:

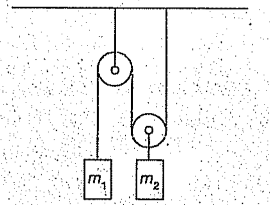
$$+\nearrow \quad \sum_i F_{ix} = 0; \quad F_m - mg\operatorname{sen} 30° = 0; \quad F_m = mg\operatorname{sen} 30° = 3{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \operatorname{sen} 30° = 17{,}2 \text{ N}$$

El alargamiento del muelle viene dado por $F_m = -k\Delta x$. Sustituyendo por los valores numéricos:

$$\Delta x = -\frac{F_m}{k} = -\frac{17{,}2 \text{ N}}{200 \text{ N/m}} = -0{,}0855 \text{ m}; \ \Delta x = -8{,}6 \text{ cm}$$

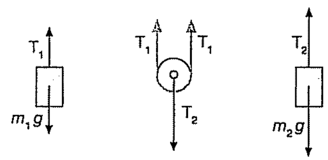
El signo menos indica que el alargamiento se produce en sentido contrario a la fuerza ejercida por el muelle.

4.6. El sistema de la figura está en equilibrio estático. La masa de las poleas y la cuerda es despreciable. ¿Cuál será la relación entre m_1 y m_2?



Solución

En la siguiente figura se presentan las fuerzas que actúan sobre los dos bloques y la polea unida al bloque 2.



Dado que el sistema está en equilibrio, la suma de las fuerzas que actúa sobre cada uno de los cuerpos será cero.

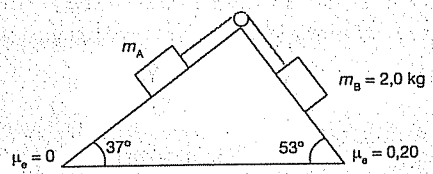
Bloque 1: $\quad +\uparrow \ \sum_i F_{iy} = 0 \qquad T_1 - m_1 g = 0 \qquad T_1 = m_1 g \qquad (1)$

Polea: $\quad +\uparrow \ \sum_i F_{iy} = 0 \qquad 2T_1 - T_2 = 0 \qquad T_2 = 2T_1 \qquad (2)$

Bloque 2: $\quad +\uparrow \ \sum_i F_{iy} = 0 \qquad T_2 - m_2 g = 0 \qquad T_2 = m_2 g \qquad (3)$

Sustituyendo el valor de T_2 deducido en (2) en la ecuación (3) $T_1 = \dfrac{m_2 g}{2}$ y sustituyendo T_1 en (1) se obtiene $\dfrac{m_2 g}{2} = m_1 g$ de donde se sigue que $m_2 = 2\,m_1$.

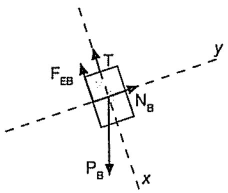
4.7. Los bloques A y B están sobre dos planos inclinados, unidos mediante una cuerda que pasa a través de una polea. El coeficiente de rozamiento estático del bloque A con el plano de la izquierda es despreciable y el del bloque B con el plano de la derecha es $\mu_e = 0{,}20$. La masa del bloque B es de 2,0 kg. Determinar el rango de masas del bloque A para el cual el sistema se encuentra en equilibrio estático.



Solución

La masa mínima del bloque A para que el sistema se encuentre en equilibrio será aquella para la que la fuerza de fricción estática sobre el bloque B sea máxima en dirección ascendente.

Se aplicará la condición de equilibrio de una partícula a cada uno de los bloques.



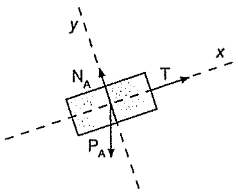
Bloque B:

$$+\nearrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N_B - m_B g \cos 53° = 0 \tag{1}$$

$$+\searrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad m_B g \operatorname{sen} 53° - \mu_e N_B - T = 0 \tag{2}$$

De la ecuación (1) se deduce que $N_B = m_B g \cos 53°$. Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$T = m_B g \operatorname{sen} 53° - \mu_e m_B g \cos 53° = 2{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 (\operatorname{sen} 53° - 0{,}20 \cos 53°) = 13{,}3\,\text{N}$$



Bloque A:

$$+\nwarrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N_A - m_{A\min} g \cos 37° = 0 \tag{3}$$

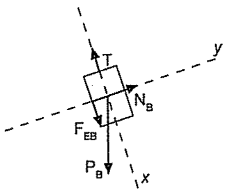
$$+\nearrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad T - m_{A\min} g \operatorname{sen} 37° = 0 \tag{4}$$

Despejando $m_{A\min}$ de la ecuación (4):

$$m_{A\min} = \frac{T}{\operatorname{sen} 37°\, g} = \frac{13{,}3\,\text{N}}{\operatorname{sen} 37°\, 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 2{,}25\,\text{kg} \qquad m_{A\min} = 2{,}3\,\text{kg}$$

Por otro lado, la masa máxima del bloque A para que el sistema se encuentre en equilibrio será aquella para la que la fuerza de fricción estática que actúe sobre el bloque B sea máxima en dirección descendente.

Aplicando de nuevo la condición de equilibrio a ambos bloques:

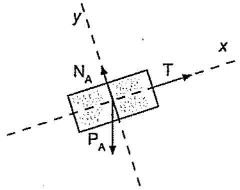


Bloque B:

$$+\nearrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N_B - m_B g \cos 53° = 0 \tag{5}$$

$$+\searrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad m_B g \operatorname{sen} 53° + \mu_E N_B - T = 0 \tag{6}$$

Despejando N_B de (5) y sustituyendo en (6) se obtiene: $T = m_B g \operatorname{sen} 53° + \mu_e m_B g \cos 53°$; $T = 2{,}0\,\text{kg}\; 9{,}81\,\text{m/s}^2 (\operatorname{sen} 53° + 0{,}20 \cos 53°) = 18{,}0\,\text{N}$



Bloque A:

$$+\nwarrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N_A - m_{A\,\text{máx}}\, g \cos 37° = 0 \tag{7}$$

$$+\nearrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad T - m_{A\,\text{máx}}\, g \operatorname{sen} 37° = 0 \tag{8}$$

Despejando $m_{A\,\text{máx}}$ de la ecuación (8):

$$m_{A\,\text{máx}} = \frac{T}{\operatorname{sen} 37°\, g} = \frac{18{,}0\,\text{N}}{\operatorname{sen} 37°\, 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 3{,}05\,\text{kg} \qquad m_{A\,\text{máx}} = 3{,}1\,\text{kg}$$

Así pues, para valores de la masa comprendidos entre $2{,}3\,\text{kg} < m_A < 3{,}1\,\text{kg}$ el sistema permanecerá en equilibrio.

DINÁMICA

4.8. Sobre un cuerpo de masa $m = 2$ kg actúan tres fuerzas:

$$\vec{F}_1 = 2\,\text{N}\,\hat{i} - 5\,\text{N}\,\hat{j},\ \vec{F}_2 = -1\,\text{N}\,\hat{i} + 3\,\text{N}\,\hat{j},\ \vec{F}_3 = 7\,\text{N}\,\hat{i}$$

Calcular la aceleración del cuerpo.

Solución

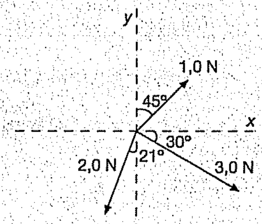
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

$$(2\,\text{N}\,\hat{i} - 5\,\text{N}\,\hat{j}) + (-1\,\text{N}\,\hat{i} + 3\,\text{N}\,\hat{j}) + 7\,\text{N}\,\hat{i} = 8\,\text{N}\,\hat{i} - 2\,\text{N}\,\hat{j} = 2\,\text{kg}\,\vec{a}$$

De donde se sigue que $\vec{a} = 4\,\text{m/s}^2\, i - 1\,\text{m/s}^2\, \hat{j}$.

4.9. Determinar el módulo y la dirección de la fuerza resultante del conjunto de fuerzas representadas en la figura.



Solución

La componente horizontal de la resultante es:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = 1{,}0 \text{ N sen } 45° + 3{,}0 \text{ N cos } 30° - 2{,}0 \text{ N sen } 21° = 2{,}58 \text{ N}$$

Y la componente vertical:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 1{,}0 \text{ N cos } 45° - 3{,}0 \text{ N sen } 30° - 2{,}0 \text{ N cos } 21° = -2{,}66 \text{ N}$$

Así pues $\vec{F}_{res} = 2{,}58 \text{ N } \hat{i} - 2{,}66 \text{ N } \hat{j}$,

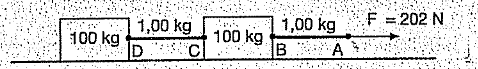
siendo su módulo $F_{res} = \sqrt{(2{,}58 \text{ N})^2 + (2{,}66 \text{ N})^2} = 3{,}71 \text{ N} \qquad F_{res} = 3{,}7 \text{ N}$

Y la dirección $\theta = \text{arctg} \dfrac{-2{,}66}{2{,}58} = -45{,}9° \qquad \theta = -46°$

4.10. Dos bloques de 100 kg están unidos mediante cuerdas de 1,00 kg. La fricción entre los bloques y el suelo puede considerarse nula. Se tira del conjunto con una fuerza de 202 N, tal como indica la figura.

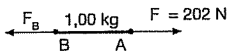
a) ¿Cuál es la aceleración del conjunto?

b) Calcular las fuerzas ejercidas por las cuerdas en los puntos B, C y D.



Solución

Analizando las fuerzas que actúan en dirección horizontal sobre el tramo AB de cuerda, tenemos:

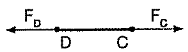


$$202 \text{ N} - F_B = 1{,}00 \text{ kg} \cdot a \qquad (1)$$

Según la tercera ley de Newton, la fuerza F_B que el bloque realiza sobre la cuerda en el punto B será la misma en módulo, dirección y sentido contrario que la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque. El diagrama de las fuerzas que actúan en dirección horizontal sobre el bloque situado entre los puntos B y C es:

$$F_B - F_C = 100 \text{ kg} \cdot a \qquad (2)$$

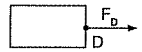
Seguidamente se presenta el diagrama de las fuerzas que actúan en dirección horizontal sobre la cuerda que une los puntos C y D:



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_C - F_D = 1{,}00 \text{ kg} \cdot a \qquad (3)$$

La fuerza que actúa en dirección horizontal sobre el bloque de la izquierda es F_D.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_D = 100 \text{ kg} \cdot a \qquad (4)$$

Sumando las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$202 \text{ N} = 202 \text{ kg} \cdot a$$

En consecuencia, la aceleración del conjunto es $a = 1{,}00 \text{ m/s}^2$.
Sustituyendo la aceleración en (1):

$$202 \text{ N} - F_B = 1{,}00 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s}^2$$

Se deduce que $F_B = 201$ N.
Sustituyendo a y F_B en (2):

$$201 \text{ N} - F_C = 100 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s}^2$$

Se deduce que $F_C = 101$ N.
Finalmente, sustituyendo a y F_C en (3):

$$101 \text{ N} - F_D = 1{,}00 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s}^2$$

Se obtiene que la fuerza que actúa en el punto D es $F_D = 100$ N.

4.11. Un bloque de masa 1,5 kg baja por un plano inclinado con un ángulo $\theta = 30°$. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es $\mu_c = 0{,}40$. Determinar la aceleración con la que cae el bloque.

Solución

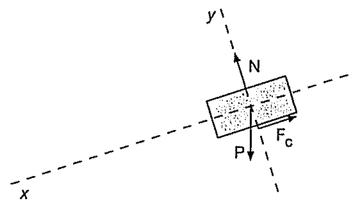
Sobre el bloque actúan el peso $P = mg$, la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento cinético F_c. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$+\nwarrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - mg \cos\theta = 0 \qquad (1)$$

De donde se deduce que:

$$N = mg \cos\theta = 1{,}5 \text{ kg } 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cos 30° = 12{,}7 \text{ N}$$

$$+\swarrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad mg\text{sen }\theta - F_c = ma \qquad (2)$$

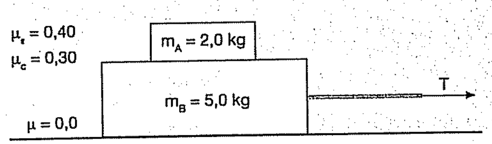


Siendo $F_c = \mu_c N = 0{,}40 \cdot 12{,}7 \text{ N} = 5{,}08 \text{ N}$.

Sustituyendo en (2) y despejando la aceleración a:

$$a = \frac{mg \text{ sen } \theta - F_c}{m} = \frac{1{,}5 \text{ kg } 9{,}81 \text{ m/s}^2 \text{ sen } 30° - 5{,}08 \text{ N}}{1{,}5 \text{ kg}} = 1{,}52 \text{ m/s}^2 \qquad a = 1{,}5 \text{ m/s}^2$$

4.12. Se ejerce una tensión T sobre una cuerda de masa despreciable unida al bloque B de la figura.



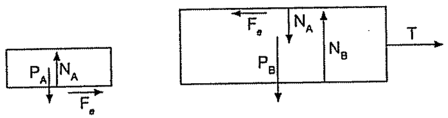
Determinar el valor de las aceleraciones de los bloques A y B para:

a) $T = 10$ N

b) $T = 40$ N

Solución

Para empezar se determinará el valor máximo de la tensión, $T_{máx}$, para la que el bloque A no se deslice sobre la superficie del bloque B. Supondremos una situación de deslizamiento inminente. En este momento la fuerza de rozamiento que actuará entre los bloques A y B será la estática máxima y la aceleración de ambos bloques será la misma $a_A = a_B = a$.



En el diagrama de la izquierda se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque A: la normal N_A es la fuerza de sustentación ejercida por el bloque B sobre el A, el peso del bloque P_A, y la fuerza de fricción estática F_e entre el bloque A y el B gracias a la cual el bloque A puede moverse solidariamente con el bloque B.

Sobre el bloque B actúan: la fuerza normal N_A ejercida por el bloque A, la fuerza de fricción estática F_e entre el bloque A y el B, estas dos fuerzas son las fuerzas de reacción de las fuerzas N_A y F_e que actúan sobre el bloque A. También actúan la fuerza normal N_B que es la fuerza de sustentación que el suelo ejerce sobre el bloque B, y el peso del bloque P_B.

Aplicando la segunda ley de Newton sobre el bloque A, en dirección horizontal:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_A \cdot a_x \qquad F_e = \mu_e m_A g = m_A a$$

De donde se deduce que la aceleración máxima que pueden llevar ambos bloques sin que haya deslizamiento entre sus superficies es:

$$a = \mu_e g$$

Analizando las fuerzas que actúan sobre el bloque B, en dirección horizontal:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_B \cdot a_x \qquad T_{máx} - F_e = m_B a$$

De donde se deduce que la tensión máxima es:

$$T_{máx} = \mu_e\,(m_A + m_B)g = 0{,}40\ (2{,}0 \text{ kg} + 5{,}0 \text{ kg})\ 9{,}81\ m/s^2 = 27{,}5 \text{ N}; \quad T_{máx} = 28 \text{ N}$$

Así pues en el apartado *a)* del problema, para $T = 10$ N, los bloques A y B se moverán solidariamente y en el apartado *b)* para $T = 40$ N el bloque A deslizará sobre el B.

Vamos a resolver ahora el apartado *a)*:

El diagrama de fuerzas es idéntico al dibujado anteriormente. Sólo que la fuerza de rozamiento estático que actuará entre los bloques A y B será inferior a la máxima.

Aplicando la segunda ley de Newton sobre el bloque A:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_A \cdot a_x \qquad F_e = m_A a \tag{1}$$

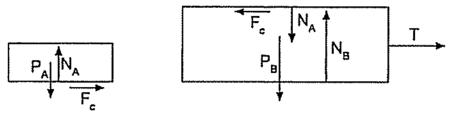
Y sobre el bloque B:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_B \cdot a_x \qquad T - F_e = m_B a \tag{2}$$

Sumando (1) y (2) se obtiene $T = (m_A + m_B)a$ de donde se deduce que la aceleración de los bloques A y B es: $a = \dfrac{T}{(m_A + m_B)} = \dfrac{10 \text{ N}}{2{,}0 \text{ kg} + 5{,}0 \text{ kg}} = 1{,}42 \text{ m/s}^2$; $a = a_A = a_B = 1{,}4 \text{ m/s}^2$

Apartado *b)*:

Cuando la tensión es de 40 N el bloque A se desliza sobre el B, y la fuerza de fricción entre ambos es cinética. El diagrama de fuerzas es:



Aplicando la segunda ley de Newton sobre el bloque A:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_A \cdot a_x \qquad F_c = \mu_c m_A g = m_A a_A$$

De donde se deduce que $a_A = \mu_c g = 0{,}30 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2{,}94 \text{ m/s}^2$.

Sobre el bloque B:

$$\xrightarrow{+} \quad \sum_i F_{ix} = m_B \cdot a_x \qquad T - F_c = m_B a_B \qquad T - \mu_c m_A g = m_B a_B$$

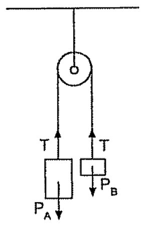
Despejando $a_B = \dfrac{T - \mu_c m_A g}{m_B} = \dfrac{40 \text{ N} - 0{,}30 \cdot 2{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{5{,}0 \text{ kg}} = 6{,}82 \text{ m/s}^2$

Las aceleraciones de los bloques son: $a_A = 2{,}9 \text{ m/s}^2$ y $a_B = 6{,}8 \text{ m/s}^2$.

4.13. Dos cuerpos de masas $m_A = 3{,}0$ kg y $m_B = 1{,}0$ kg están unidos mediante una cuerda inextensible de masa despreciable que pasa a través de una polea. Considérese nula la masa de la polea y la fricción de la cuerda con la misma. Determinar la aceleración de los cuerpos y la tensión de la cuerda.

Solución

La aceleración de ambos cuerpos es la misma ya que están unidos por una cuerda inextensible. En el siguiente diagrama se presentan las fuerzas que actúan sobre los cuerpos A y B.



Aplicamos la segunda ley de Newton.

Cuerpo A:

$$+\downarrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad m_A g - T = m_A a \qquad (1)$$

Cuerpo B:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad T - m_B g = m_B a \qquad (2)$$

Sumando las expresiones (2) y (1) se obtiene $(m_A - m_B)g = (m_A + m_B)a$, y en consecuencia:

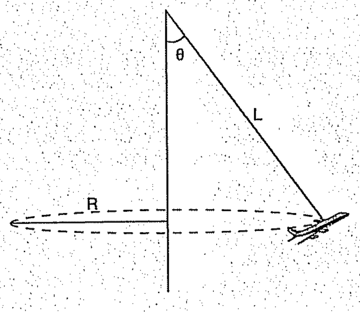
$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\, g = \frac{3{,}0 \text{ kg} - 1{,}0 \text{ kg}}{3{,}0 \text{ kg} + 1{,}0 \text{ kg}} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 4{,}91 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo la aceleración en (1) y despejando la tensión:

$$T = \frac{2\, m_A\, m_B}{m_A + m_B}\, g = \frac{2 \cdot 3{,}0 \text{ kg} \cdot 1{,}0 \text{ kg}}{3{,}0 \text{ kg} + 1{,}0 \text{ kg}} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 14{,}7 \text{ N}$$

La aceleración $a = 4{,}9$ m/s² y la tensión $T = 15$ N.

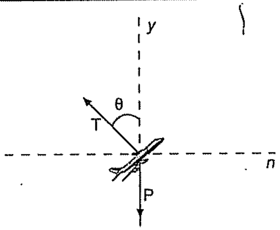
4.14. Un avión de juguete de masa 0,15 kg pende de un hilo de 0,50 m de longitud. El avión lleva un pequeño motor que lo pone en movimiento. Cuando se pone en marcha el motor, el avión describe una trayectoria circular de radio 0,30 m. Determinar el módulo de la velocidad del avión.



Solución

Las fuerzas que actúan sobre el avión son, como muestra el siguiente diagrama, el peso y la tensión de la cuerda.

El ángulo θ se puede determinar muy fácilmente considerando que:



$$\theta = \text{arcsen}\, \frac{0{,}3}{0{,}5} = 36{,}9°$$

Aplicando la segunda ley de Newton, en dirección horizontal:

$$+\leftarrow \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad T \,\text{sen}\, \theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

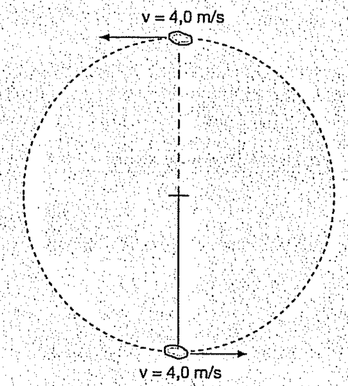
Y en dirección vertical:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \;\Rightarrow\; T\cos\theta - mg = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Sustituyendo la expresión de la tensión en (1) y despejando la velocidad:

$$v = \sqrt{R\, g\, tg\, \theta} = \sqrt{0{,}30 \text{ m} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \text{tg}\, 36{,}9°} = 1{,}49 \text{ m/s} \qquad v = 1{,}5 \text{ m/s}$$

4.15. Un niño hace girar en el plano vertical una cuerda que lleva atada una piedra de 0,50 kg con velocidad $v = 4{,}0$ m/s. La longitud de la cuerda es de 1,5 m y su masa despreciable. Hallar la tensión de la cuerda en el punto más bajo y más alto de la trayectoria.



Solución

Las fuerzas que actúan sobre la piedra son la tensión y el peso.

En el punto más bajo de la trayectoria la aceleración normal de la piedra es hacia arriba por lo que tendremos que:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad T - mg = m\frac{v^2}{l}$$

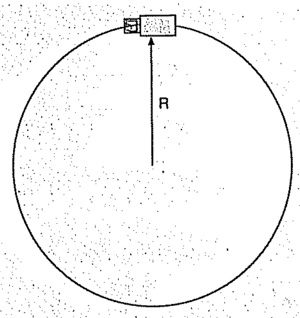
$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right) = 0{,}50 \text{ kg}\left(9{,}81 \text{ m/s}^2 + \frac{(4{,}0 \text{ m/s}^2)^2}{1{,}5 \text{ m}}\right) = 10{,}2 \text{ N} \qquad T = 10 \text{ N}$$

En el punto más alto, tanto la tensión, el peso como la aceleración normal son hacia abajo:

$$+\downarrow \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad T + mg = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(-g + \frac{v^2}{l}\right) = 0{,}50 \text{ kg}\left(-9{,}81 \text{ m/s}^2 + \frac{(4{,}0 \text{ m/s}^2)^2}{1{,}5 \text{ m}}\right) = 0{,}428 \text{ N} \qquad T = 0{,}43 \text{ N}$$

4.16. Un automóvil circula por una curva sin peraltar de 0,50 km de radio. El coeficiente de fricción estática entre el coche y el asfalto es 0,30. Determinar la velocidad máxima que puede llevar el automóvil sin salirse de la curva.



Solución

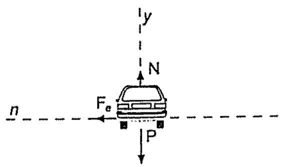
El automóvil mantendrá la trayectoria circular siempre que la fuerza de fricción estática en direc ción radial sea inferior o igual a la fuerza de fricción estática máxima.

En el siguiente diagrama se presenta un corte de la calzada, con el coche moviéndose hacia den tro del papel. La única fuerza que actúa en dirección radial, gracias a la cual el coche puede mantene su trayectoria circular, es la fricción estática.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad F_e = m\frac{v^2}{R} \qquad (1$$

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$$



De (1) se deduce que la velocidad máxima será aquella para l que la fuerza de fricción estática tome su valor máximo.

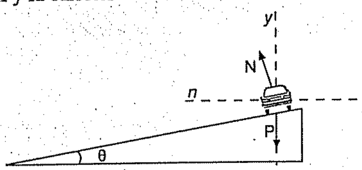
$$F_e = \mu_e N = \mu_e mg = m\frac{v^2_{máx}}{R}$$

De donde se deduce que $v_{máx} = \sqrt{\mu_e Rg} = \sqrt{0{,}30 \cdot 500\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 38{,}4$ m/s

La velocidad máxima que puede llevar el coche sin salirse de la curva es:

$$v_{máx} = 38\ \text{m/s} = 140\ \text{km/h}$$

4.17. Determinar la velocidad máxima que puede llevar un automóvil que circula por una curva de radio R peraltada con un ángulo θ. Considere despreciable la fricción entre el automóvil y la carretera.



Solución

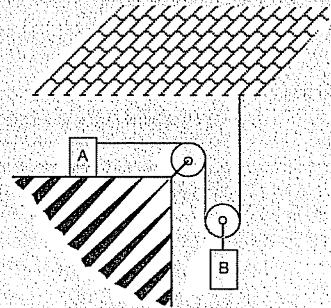
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad N \operatorname{sen} \theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N\cos\theta - mg = 0 \qquad N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

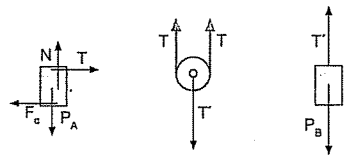
Sustituyendo la expresión de N en (1) y despejando v se deduce $v_{máx} = \sqrt{R\,g\,\text{tg}\,\theta}$.
Obsérvese que la velocidad máxima no depende de la masa del automóvil.

4.18. Un bloque de masa $m_A = 1{,}0$ kg está situado sobre un plano horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_c = 0{,}20$. El bloque está unido a una cuerda que pasa a través de dos poleas y acaba atada al techo. Una de las poleas lleva unido un bloque de masa $m_B = 3{,}0$ kg como indica la figura. Teniendo en cuenta que la masa de las poleas y la cuerda es despreciable, determinar la aceleración de los bloques A y B y la tensión de la cuerda.



Solución

En el siguiente diagrama se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque A, la polea ligada al bloque B y el bloque B.



Aplicando la segunda ley de Newton:

Bloque A:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = ma_x \qquad T - F_c = m_A a_A \qquad T - \mu_c N = m_A a_A \qquad (1)$$

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N - m_A g = 0 \qquad N = m_A g$$

Sustituyendo N en (1) y despejando la tensión $T = \mu_c m_A g + m_A a_A$. (2)

Polea:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad 2T - T' = 0 \qquad 2T = T'$$

Bloque B:

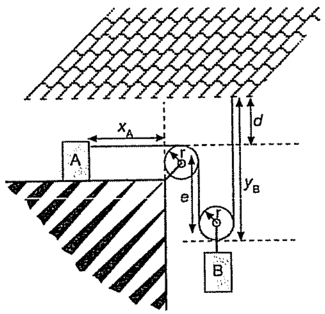
$$+\downarrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad m_B g - T' = m_B a_B \qquad m_B g - 2T = m_B a_B \qquad (3)$$

Para encontrar la relación entre las aceleraciones a_A y a_B se tendrá en cuenta que la longitud de la cuerda L puede expresarse como:

$$L = x_A + \pi r + e + \pi r + y_B - \frac{\pi}{2} r$$

$$e = y_B - d - \frac{\pi}{2} r - \frac{\pi}{2} r$$

$$L = x_A + 2y_B - d + \frac{\pi}{2} r$$



En este caso L, d y r son constantes por lo que la igualdad anterior puede escribirse:

$$C = x_A + 2y_B$$

Vemos que la posición del bloque A depende de la posición del bloque B. Se dice que estos dos movimientos son interdependientes.

Derivando la expresión anterior se deduce que el módulo de la aceleración del bloque A será dos veces el módulo de la aceleración del bloque B.

$$a_A = 2a_B \qquad (4)$$

Sustituyendo la expresión de la tensión dada en (2) en la ecuación (3) y aplicando la relación (4) se obtiene:

$$m_B g - 2(\mu_c m_A g + m_A 2a_B) = m_B a_B$$

Despejando a_B:

$$a_B = \frac{m_B g - 2\mu_c m_A g}{4 m_A + m_B} = \frac{3{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{4 \cdot 1{,}0 \text{ kg} + 3{,}0 \text{ kg}} = 3{,}64 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en (4):

$$a_A = 2a_B = 2 \cdot 3{,}64 \text{ m/s}^2 = 7{,}28 \text{ m/s2}$$

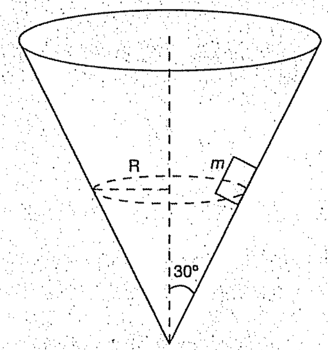
Y finalmente sustituyendo en (2):

$$T = \mu_c m_A g + m_A a_A = 0{,}2 \cdot 1{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 + 1{,}0\ kg \cdot 7{,}28 \text{ m/s}^2 = 9{,}24 \text{ N}$$

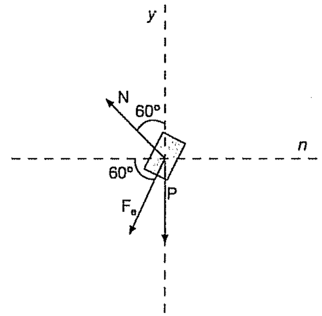
Resumiendo:

$$a_B = 3{,}6 \text{ m/s}^2;\ a_A = 7{,}3 \text{ m/s}^2 \text{ y } T = 9{,}2 \text{ N}$$

4.19. Determinar el valor de la velocidad angular máxima y mínima de giro del cono de la figura para que un objeto de masa $m = 0{,}50$ kg no se deslice por su pared. El coeficiente de fricción estático es $\mu e = 0.40$ y el radio de la circunferencia que describe $R = 10$ cm.



Solución



Seguidamente se determinará el valor de la velocidad angular para la que el bloque está a punto de deslizar hacia arriba. En esta situación la fuerza de fricción estática F_e será máxima y en sentido descendente.

El diagrama de fuerzas que actúan sobre la masa m es el de la figura.

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \quad N \cos 60^\circ - P - F_e \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$N \cos 60^\circ - mg - \mu_e N \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$\text{Siendo } N = \frac{mg}{\cos 60^\circ - \mu_e \text{ sen } 60^\circ} = \frac{0{,}50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\cos 60^\circ - 0{,}40 \cdot \text{sen } 60^\circ} = 31{,}9 \text{ N.}$$

Proyectando ahora en la dirección de n:

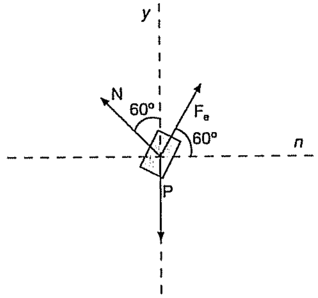
$$\pm \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad N \text{ sen } 60^\circ + F_e \cos 60^\circ = m\omega^2 R \qquad N \text{ sen } 60^\circ + \mu_e N \cos 60^\circ = m\omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{N \text{ sen } 60^\circ + \mu_e N \cos 60^\circ}{mR}} = \sqrt{\frac{31{,}9 \text{ N} \cdot \text{sen } 60^\circ + 0{,}40 \cdot 31{,}9 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ}{0{,}50 \text{ kg} \cdot 0{,}10 \text{ m}}} = 26{,}1 \text{ rad/s}$$

Seguidamente se determinará el valor de la velocidad angular para la que el bloque está apunto de deslizar hacia abajo. En esta situación la fuerza de fricción estática F_e será máxima y en sentido ascendente.

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N \cos 60^\circ - P + F_e \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$N \cos 60^\circ - mg + \mu_e N \text{ sen } 60^\circ = 0$$



Siendo $N = \dfrac{mg}{\cos 60° + \mu_e \operatorname{sen} 60°} =$

$$= \frac{0{,}50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\cos 60° + 0{,}40 \cdot \operatorname{sen} 60°} = 5{,}80 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum_i F_{in} = ma_n \qquad N \operatorname{sen} 60° - F_e \cos 60° = m\omega^2 R$$

$$N \operatorname{sen} 60° - \mu_e N \cos 60° = m\omega^2 R$$

De donde se deduce que:

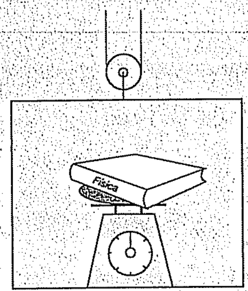
$$\omega = \sqrt{\frac{N \operatorname{sen} 60° - \mu_e N \cos 60°}{mR}} = \sqrt{\frac{5{,}80 \text{ N} \cdot \operatorname{sen} 60° - 0{,}40 \cdot 5{,}80 \text{ N} \cdot \cos 60°}{0{,}50 \text{ kg} \cdot 0{,}10 \text{ m}}} = 8{,}79 \text{ rad/s}$$

En resumen, para velocidades angulares comprendidas entre 8,8 rad/s y 26 rad/s el bloque no se deslizará sobre la superficie del cono.

4.20. Un libro de masa $m = 1{,}5$ kg descansa sobre una balanza. El conjunto está dentro de un ascensor. Determinar el peso aparente del libro, cuando:

a) El ascensor baja a velocidad constante.

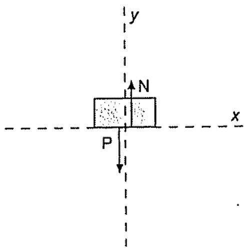
b) El ascensor acelera hacia abajo con $a = 1{,}0 \text{ m/s}^2$.



Solución

El peso aparente de un objeto es la fuerza neta que ejerce sobre un dinamómetro o una balanza.

En la siguiente figura se presenta el diagrama del sólido libre para el libro.



a) Cuando el ascensor desciende a velocidad constante la aceleración del libro es cero, por lo que aplicando la segunda ley de Newton:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - mg = 0$$

$$N = mg = 1{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 14{,}7 \text{ N} \qquad N = 15 \text{ N}$$

Según la tercera ley de Newton, la fuerza normal, que la balanza ejerce sobre el libro, es igual en módulo, dirección y sentido contrario a la fuerza que el libro ejerce sobre la balanza. En consecuencia, el peso aparente del libro es de 15 N, y en este caso coincide con su peso «real».

En este ejemplo el ascensor es un sistema de referencia inercial por lo que un observador situado en el ascensor o en el suelo fuera de él, hubiera escrito de la misma forma la segunda ley de Newton.

b) Cuando el ascensor acelera hacia abajo un observador inercial, situado fuera del ascensor, ve que la aceleración del libro es la misma que la del ascensor. El observador inercial escribirá la segunda ley de Newton como sigue:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N - mg = -ma$$

$$N = m(g - a) = 1{,}5 \text{ kg} \cdot (9{,}81 \text{ m/s}^2 - 1{,}0 \text{ m/s}^2) = 13{,}2 \text{ N} \qquad N = 13 \text{ N}$$

En cambio para un observador situado sobre el ascensor (observador no inercial) la aceleración del libro es cero. Este observador deberá escribir la segunda ley introduciendo una fuerza ficticia:

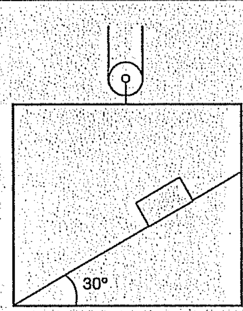
$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{fic} = 0$$

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N - mg + ma = 0$$

$$N = m(g - a) = 1{,}5 \text{ kg} \cdot (9{,}81 \text{ m/s}^2 - 1{,}0 \text{ m/s}^2) = 13{,}2 \text{ N} \qquad N = 13 \text{ N}$$

En esta situación el peso aparente del libro es igual a 13 N e inferior a su peso «real».

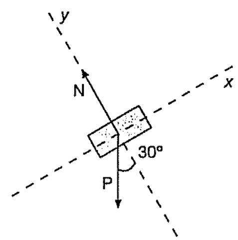
4.21. Un ascensor desciende con una aceleración $a = 2{,}0 \text{ m/s}^2$ en sentido descendente. En su interior se encuentra un bloque de masa $m = 3{,}0$ kg que desciende por un plano inclinado 30°. La fricción entre el bloque y el plano es despreciable. Calcular la aceleración del bloque respecto al ascensor.



Solución

Respecto al ascensor del bloque únicamente acelera en la dirección del plano inclinado.

Este cálculo se puede realizar planteando el problema desde un sistema de referencia inercial situado fuera del ascensor, o bien desde un sistema de referencia no inercial que se mueva solidariamente con el ascensor. En ambos casos las fuerzas que actúan sobre el bloque son las representadas en la figura.



Desde un *sistema de referencia inercial.*

Aplicando la segunda ley de Newton sobre el eje x:

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum_i F_{ix} = ma_x \qquad mg \operatorname{sen} 30° = ma_{x\,B,\,SI}$$

Donde la aceleración $a_{x\,B,\,SI}$ es la aceleración del bloque respecto al sistema de referencia inercial en la dirección del eje x.

$$a_{x\,B,\,SI} = g \text{ sen } 30° = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 30° = 4{,}91 \text{ m/s}^2$$

La aceleración del bloque relativa al ascensor $a_{x\,B,\,ASC}$ será:

$$a_{x\,B,\,ASC} = a_{x\,B,\,SI} - a_{x\,ASC,\,SI} = (4{,}91 - 2{,}0 \cdot \text{sen } 30°) \text{ m/s}^2 = 3{,}9 \text{ m/s}^2$$

entendiendo por $\vec{a}_{ASC,\,SI}$ la aceleración del ascensor respecto a un sistema de referencia inercial.

Desde un *sistema de referencia no inercial* como aquél que se mueve solidariamente con el ascensor la segunda ley se expresa:

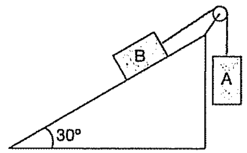
$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum_i F_{ix} - ma_{x\,ASC,\,SI} = ma_{x\,B,\,ASC} \quad \Rightarrow \quad mg \text{ sen } 30° - ma_{ASC,\,SI} \text{ sen } 30° = ma_{x\,B,\,ASC}$$

Despejando $a_{x\,B,\,ASC} = (g - a_{ASC,\,SI}) \text{ sen } 30° = (9{,}81 - 2{,}0) \cdot \text{sen } 30° \text{ m/s}^2 = 3{,}9 \text{ m/s}^2$

CUESTIONES

ESTÁTICA

4.1. El sistema que muestra la figura se encuentra en equilibrio estático. Los pesos de los bloques A y B son de 20 y 50 N respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el bloque B y el plano inclinado es $\mu_e = 0{,}20$. La fuerza de fricción entre el bloque B y el plano inclinado es:



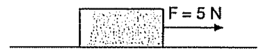
a) 8,7 N en sentido descendente.

b) 5,0 N en sentido ascendente.

c) 0

d) 8,7 N en sentido ascendente.

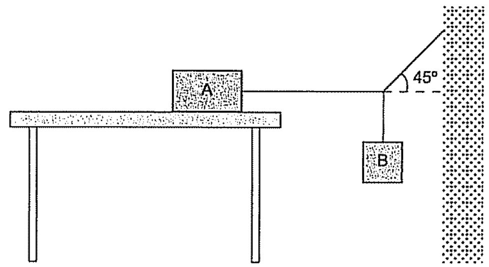
4.2. Un bloque de 30 N de peso se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es 0,20 y el de rozamiento cinético 0,10. Si se tira del bloque con una fuerza de 5,0 N, tal y como indica la figura, la aceleración del bloque es:



a) 0   *c)* 0,33 m/s²

b) 0,65 m/s²   *d)* 1,6 m/s²

4.3.1. El bloque A de la figura pesa 90 N. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie sobre la que descansa es 0,30. El peso del bloque B es 15 N y el sistema está en equilibrio.



La fuerza de rozamiento entre el bloque A y la mesa es:

a) 27 N   *c)* 90 N

b) 15 N   *d)* 4,5 N

4.3.2. El peso máximo del bloque B con el que el sistema puede permanecer en equilibrio es:

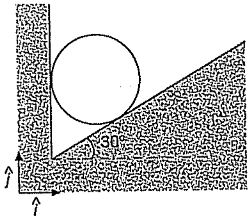
a) 27 N   *c)* 90 N

b) 15 N   *d)* 4,5 N

4.4. Una lámpara de peso P cuelga de dos cables que forman ángulos iguales θ con la horizontal. La tensión de cada cable es:

a) $^1/_2\, P$ sen θ *b)* $^1/_2\, P$ cos θ *c)* $P/(2 \text{ sen } \theta)$ *d)* $P/(2 \cos \theta)$

4.5. La esfera de la figura, que pesa 10 N, está en equilibrio estático. Las fuerzas que la pared (N_P) y el suelo (N_S) ejercen sobre la esfera son:



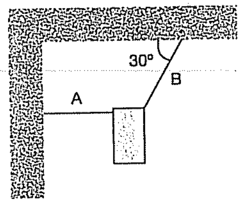
a) $\vec{N}_P = 0,\ \vec{N}_S = 10\,\text{N}\,\hat{j}$

b) $\vec{N}_P = -5{,}8\,\text{N}\,\hat{i},\ \vec{N}_S = 10\,\text{N}\,\hat{j}$

c) $\vec{N}_P = 5{,}8\,\text{N}\,\hat{i},\ \vec{N}_S = -5{,}8\,\text{N}\,\hat{i} + 10\,\text{N}\,\hat{j}$

d) $\vec{N}_P = 5{,}0\,\text{N}\,\hat{j},\ \vec{N}_S = -5{,}8\,\text{N}\,\hat{i} + 5{,}0\,\text{N}\,\hat{j}$

4.6. Un objeto que pesa 90 N está suspendido de dos cuerdas, tal y como indica la figura. Las tensiones de las cuerdas A y B son:



a) $T_A = 160$ N $\quad T_B = 180$ N

b) $T_A = 0$ N $\quad T_B = 90$ N

c) $T_A = 160$ N $\quad T_B = 90$ N

d) $T_A = 45$ N $\quad T_B = 45$ N

4.7. ¿Cuál de los siguientes sistemas de referencia puede considerarse un sistema de referencia inercial para el estudio del movimiento del planeta Júpiter alrededor del Sol?

a) Un sistema de referencia situado sobre la superficie de la Tierra.

b) Un sistema de referencia situado sobre la superficie de Júpiter.

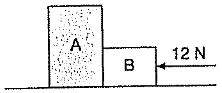
c) Un sistema de referencia centrado en el Sol.

d) Un sistema de referencia centrado en alguna luna de Júpiter.

DINÁMICA

4.8.1. Se empujan los dos bloques de la figura con una fuerza de 12 N. La masa de los bloques e $m_A = 4{,}0$ kg y $m_B = 2{,}0$ kg. El rozamiento entre los bloques y el plano es despreciable.

La aceleración de los dos bloques es:



a) $a_A = a_B = 1{,}0$ m/s^2

b) $a_A = 1{,}5$ m/s^2 y $a_B = 0.50$ m/s^2

c) $a_A = a_B = 2{,}0$ m/s^2

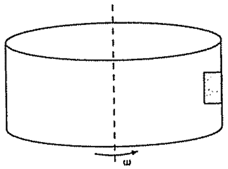
d) $a_A = 0{,}50$ m/s^2 y $a_B = 1{,}5$ m/s^2

4.8.2. La fuerza que el bloque B ejerce sobre el bloque A es:

a) 12 N $\quad$ *c)* 8,0 N

b) 4,0 N $\quad$ *d)* 2,0 N

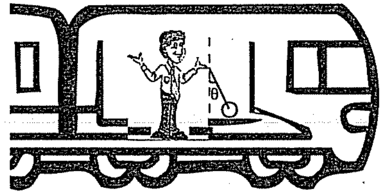
4.9. Un pequeño bloque de masa m se coloca dentro de un cilindro vacío de 0,98 m de radio, que gira sobre un eje vertical. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared del cilindro es $\mu_e = 0{,}10$.



El valor mínimo de la velocidad angular de giro para que el bloque no caiga deslizado por la pared del cilindro es:

a) 0,10 rad/s $\quad$ *b)* 0,20 rad/s $\quad$ *c)* 1,0 rad/s $\quad$ *d)* 10 rad/s

4.10. Un estudiante está sobre el metro y lleva un péndulo en la mano. En un momento dado el péndulo se desvía un ángulo θ respecto a la vertical, tal y como indica la figura. Es correcto afirmar que:

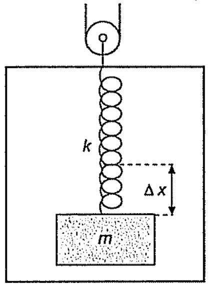


a) El metro está acelerando hacia la derecha con aceleración $a = 4{,}9$ m/s$^2 \cdot \cot\theta$.

b) El metro está acelerando hacia la izquierda con aceleración $a = 4{,}9$ m/s$^2 \cdot \operatorname{sen}\theta$.

c) El metro está acelerando hacia la izquierda con aceleración $a = 9{,}8$ m/s$^2 \cdot \operatorname{tg}\theta$.

d) El metro acelera hacia la izquierda pero no es posible encontrar la aceleración del metro a partir de la medida del ángulo.



4.11. En el techo de un ascensor hay un muelle de constante recuperadora $k = 50$ N/m, del que cuelga un objeto de masa $m = 1{,}0$ kg. El alargamiento del muelle respecto a su longitud natural es de 20 cm. La aceleración de este ascensor es:

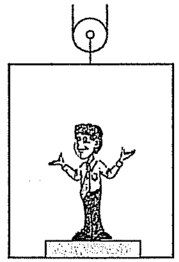
a) 0

b) 0,20 m/s^2 hacia arriba.

c) 10 m/s^2 hacia abajo.

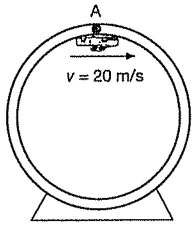
d) 10 m/s^2 hacia arriba.

4.12. En un ascensor hay un niño de masa 35 kg subido sobre una báscula. La lectura de la báscula cuando el ascensor acelera hacia arriba a 1,0 m/s^2 es:



a) 35 kg $\quad$ *c)* 31 kg

b) 39 kg $\quad$ *d)* 40 kg

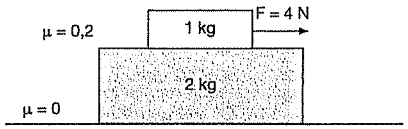


4.13. Un coche con control remoto de masa 1,0 kg se mueve con una velocidad de módulo constante e igual a 20 m/s en un círculo vertical dentro de un cilindro vacío de 5,0 m de radio. La fuerza normal ejercida por las paredes del cilindro sobre el coche en el punto A de la trayectoria es:

a) 90 N $\quad$ *c)* 80 N

b) 9,8 N $\quad$ *d)* 70 N

4.14. La aceleración del bloque de 2 kg de la figura es:



a) 1 m/s^2 $\quad$ *c)* 4 m/s^2

b) 2 m/s^2 $\quad$ *d)* 0,5 m/s^2

4.15. Un hombre se encuentra en un ascensor que baja con velocidad uniforme. Si la magnitud de la fuerza con que la Tierra le atrae es P, y la magnitud de la fuerza que ejerce el suelo sobre él es F_N, podemos afirmar que:

a) $P = F_N$ *b)* $P > F_N$ *c)* $P < F_N$ *d)* $P << F_N$

4.16. Un hombre de 80 kg está sujeto a una cuerda que cuelga de un helicóptero que sube con aceleración dirigida hacia arriba de 2,0 m/s^2. La tensión de la cuerda es:

a) $9{,}4 \cdot 10^2$ N *b)* $7{,}8 \cdot 10^2$ N *c)* $6{,}2 \cdot 10^2$ N *d)* 0 N

4.17. Sobre el suelo de un vagón se encuentra un objeto de masa 2,0 kg. Si la máxima fuerza de fricción estática entre el objeto y el suelo del vagón es de 3,0 N, el objeto se deslizará sobre el suelo del vagón:

a) Siempre que el vagón se mueva.

b) Cuando la aceleración supere el valor de 1,5 m/s^2.

c) Pasados 0,1 s.

d) Nunca.

4.18.1. Situamos una moneda de 15 g sobre el plato de un tocadiscos que gira uniformemente a 33 rpm, a una distancia de 10 cm del eje de rotación. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la moneda y el plato son: $\mu_e = 0{,}20$ y $\mu_c = 0{,}15$.

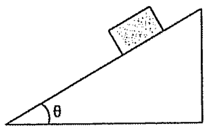
La aceleración de la moneda es:

a) $1{,}1 \cdot 10^2$ m/s^2 *b)* 0,35 m/s^2 *c)* $1{,}2 \cdot 10^2$ m/s^2 *d)* 1,2 m/s^2

4.18.2. La fuerza de rozamiento entre la moneda y el plato es:

a) 22 mN *b)* 29 mN *c)* 18 mN *d)* 5,3 mN

4.19. Un bloque de masa m descansa sobre un plano que se puede ir inclinando progresivamente. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es μ_e y el de fricción cinética μ_c. El ángulo máximo al que se puede inclinar el plano manteniendo el bloque en reposo es:



a) $\theta_{máx} = \text{arctg}\ (\mu_e)$

b) $\theta_{máx} = \text{arcsen}\ (\mu_c)$

c) No hay suficientes datos para realizar este cálculo.

d) $\theta_{máx} = \text{arccos}\ (\mu_e)$

4.20. Levantamos del suelo un cuerpo de 10 kg de masa utilizando un hilo. Si la tensión de ruptura del hilo es de 100 N, la máxima aceleración con que se puede levantar el cuerpo sin que se rompa el hilo es:

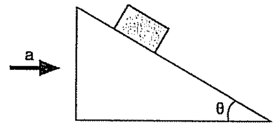
a) 1,9 m/s^2

b) El hilo se romperá sea cual sea la aceleración del cuerpo.

c) 0,19 m/s^2

d) 10 m/s^2

4.21. Suponiendo la fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano de la figura despreciable, la aceleración que debe tener el plano para que el bloque no resbale por su pendiente es:



a) $a = g\ \text{tg}\theta$ *c)* $a = g\ \text{sen}\theta$

b) $a = g\ \text{cotg}\theta$ *d)* $a = g\cos\theta$

4.22.1. Una chica de 62 kg está encima de una báscula dentro de la cabina de una noria que gira con una velocidad angular constante. En el punto más alto de la trayectoria circular la báscula marca 210 N. El radio de la noria es de 7,1 m.

La lectura de la báscula en el punto más bajo de la trayectoria será:

a) 1,0 kN *b)* 0,19 kN *c)* 0,21 kN *d)* 0,61 kN

4.22.2. La velocidad angular de la noria es:

a) 6,8 rad/s *b)* 0,90 rad/s *c)* 7,5 rad/s *d)* 0,95 rad/s

4.23. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) La fuerza de fricción estática siempre es igual a $\mu_e N$.

b) Habitualmente el coeficiente de fricción estática entre dos superficies es mayor que el coeficiente de fricción cinética.

c) La fuerza de fricción cinética es igual a $\mu_c N$ y siempre se opone al movimiento relativo de las superficies en contacto.

d) Cuando no hay movimiento relativo entre dos superficies en contacto, la fuerza de fricción que actúa entre ellas es de tipo estático.

4.24. Mientras un coche describe una curva, el conductor observa el velocímetro y ve que marca 40 km/h en todo el recorrido. Es correcto afirmar que:

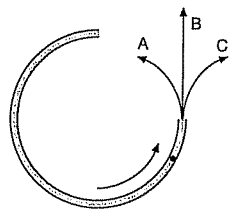
a) La velocidad del coche se ha mantenido constante en todo el trayecto y por tanto la fuerza resultante que actúa sobre él es cero.

b) El módulo de la velocidad se ha mantenido constante pero no su dirección. En consecuencia, el coche está acelerado y la fuerza resultante que actúa sobre él no es cero.

c) Para que el coche describa una curva debe existir una fuerza tangente en todo momento a la trayectoria.

d) Este coche se encuentra en equilibrio estático.

4.25. Una canica circula por una guía como la que muestra la figura. La guía está sobre una mesa horizontal. ¿Cuál de las siguientes trayectorias seguirá la canica en el momento de salir de la guía?



a) La trayectoria A.

b) La trayectoria B.

c) La trayectoria C.

d) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES

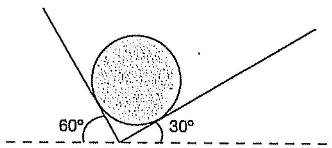
4.1. *b)*
4.2. *a)*
4.3.1. *b)*
4.3.2. *a)*
4.4. *c)*
4.5. *c)*
4.6. *a)*
4.7. *c)*
4.8.1. *c)*
4.8.2. *c)*
4.9. *d)*
4.10. *c)*
4.11. *b)*
4.12. *b)*
4.13. *d)*
4.14. *a)*
4.15. *a)*
4.16. *a)*
4.17. *b)*
4.18.1. *d)*
4.18.2. *c)*
4.19. *a)*
4.20. *c)*
4.21. *a)*
4.22.1. *a)*
4.22.2. *d)*
4.23. *a)*
4.24. *b)*
4.25. *b)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Sobre un cuerpo actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1 = -7\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} + 2\,\mathrm{N}\,\hat{k}$, $\vec{F}_2 = 1\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 1\,\mathrm{N}\,\hat{k}$ y $\vec{F}_3$. Si el sistema se encuentra en equilibrio estático, ¿cuál es el valor de la fuerza $\vec{F}_3$?

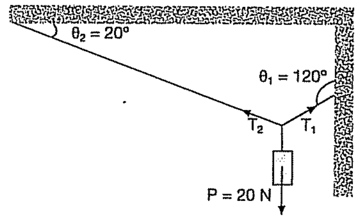
Sol.: $\vec{F}_3 = 7\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} - 3\,\mathrm{N}\,\hat{\jmath} - 1\,\mathrm{N}\,\hat{k}$

2 Una esfera de masa m = 7,0 kg se encuentra apoyada en dos planos lisos como indica la figura. Determinar el valor de las fuerzas de reacción de los planos con la esfera.



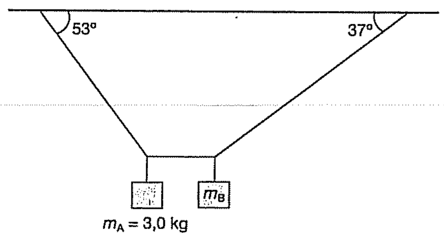
Sol.: La fuerza normal que ejerce el plano de la izquierda es de 34 N y la del plano de la derecha de 59 N.

3 El sistema de la figura se encuentra en equilibrio estático. Determinar el valor de las tensiones T_1 y T_2.



Sol.: T_1 = 25 N y T_2 = 23 N

4 Determinar la masa del bloque B de la figura para la cual el sistema se encuentra en equilibrio estático.



Sol.: m_B = 1,7 kg

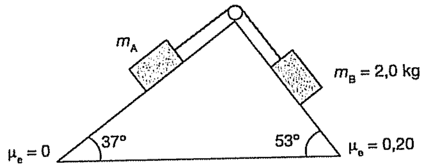
5 Un bloque de 2,0 kg descansa sobre un plano del que se puede variar la inclinación α. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es 0,6. Determinar:

a) La fuerza de fricción estática entre el bloque y el plano para $\alpha = 0°$ y para $\alpha = 20°$.

b) La inclinación máxima $\alpha_{máx}$ del plano para que el bloque permanezca en reposo y la fuerza de rozamiento en esta situación.

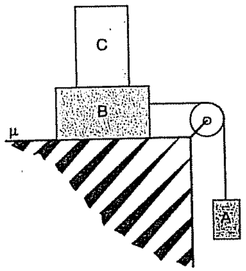
Sol.: a) para $\alpha = 0°$; $F_e = 0$; para $\alpha = 20°$, $F_e = 6{,}7$ N
b) $\alpha_{máx} = 31°$; $F_{e\,máx} = 15$ N

6 **Los bloques *A* y *B*, que se encuentran en sendos planos inclinados, están unidos mediante una cuerda que pasa por una polea. El coeficiente de rozamiento estático del bloque *A* con el plano de la izquierda es despreciable y el del bloque *B* con el plano de la derecha es μ_e = 0,20. La masa del bloque B es de 2,0 kg. Determinar la masa del bloque *A* para la cual el sistema se encuentra en equilibrio estático y que la fuerza de fricción entre el bloque *B* y el plano sea cero.**



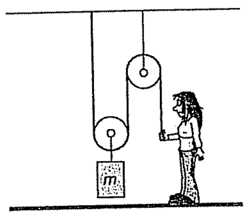
Sol.: $m_A = 2{,}7$ kg

7 **Las masas de los bloques A y B de la figura son $m_A = 4{,}0$ kg y $m_B = 5{,}0$ kg. El coeficient de rozamiento estático entre el bloque B y el suelo es $\mu_e = 0{,}30$ y no existe rozamiento apre ciable entre las superficies de los bloques B y C.**
Determinar el mínimo valor de la masa del bloque C que impide que el sistema se mueva



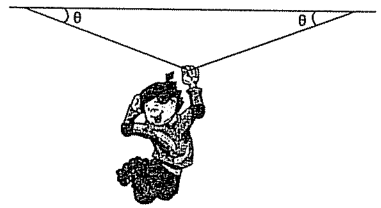
Sol.: $m_C = 8{,}3$ kg

8 **La persona de la figura tiene una masa de 70 kg y sostiene un bloque de masa 35 l mediante una cuerda. La cuerda pasa a través de dos poleas y tiene un extremo atado techo. El conjunto se encuentra en equilibrio estático. Calcular la fuerza normal que eje ce el suelo sobre los pies de la persona.**



Sol.: $N = 5{,}2 \cdot 10^2$ N

9 **Un niño de 35 kg está colgado del punto medio de una cuerda. El ángulo de inclinación de ambos extremos de la cuerda es $\theta = 20°$. Calcular la tensión de la cuerda.**



Sol.: 0,50 kN

DINÁMICA

10 **Determinar el módulo y dirección de la fuerza resultante de los dos sistemas de la figura.**

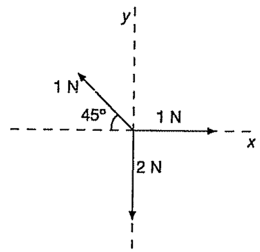


Figura 1

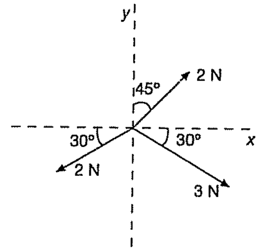


Figura 2

Sol.: Figura 1, $F_{RES} = 1{,}3$ N, $\theta = -2°$; Figura 2, $F_{RES} = 1{,}7$ N, $\theta = -36°$

11 **Un tren (una máquina más dos vagones) tiene una aceleración positiva y de magnitud *a*. Si cada uno de los vagones y la máquina tienen masa *m* y no actúan fuerzas de rozamiento sobre ellos:**

a) Calcular la fuerza que la máquina ejercerá sobre el primer vagón.

b) Calcular la fuerza que se ejercerá sobre el segundo vagón.

Sol.: a) 2ma; b) ma

12 **Un coche con remolque acelera con $a = 1{,}0$ m/s² en una pendiente ascendente de 15°. La masa del coche y del remolque es de 1 000 kg y 500 kg, respectivamente, y los efectos del rozamiento son despreciables. Calcular la fuerza de tracción que el motor del coche desarrollará sobre el conjunto y la fuerza con que el coche tirará del remolque.**

Sol.: 5,3 kN; 1,8 kN

13 **Un bloque baja por un plano inclinado 30°. Cuando pasa por un punto *A* lleva una velocidad de 2,0 m/s, y un segundo más tarde pasa por un punto *B* situado 40 cm por debajo del punto *A*. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano?**

Sol.: 0,20

14 **Un bloque de 3,0 kg sube por un plano inclinado 30°. Los coeficientes de rozamiento cinético y estático entre el bloque y el plano son $\mu_c = 0{,}90$ y $\mu_e = 0{,}95$. Teniendo en cuenta que la velocidad de salida del bloque es de 20 m/s, determinar:**

a) El tiempo transcurrido y la distancia recorrida por el bloque sobre el plano hasta pararse.

b) Si una vez parado el bloque permanecerá en reposo o volverá a bajar por el plano.

Sol.: a) $t = 1{,}6$ s; $d = 16$ m; *b)* el bloque permanecerá en reposo.

15 **Una grúa sube una viga de masa $m = 750$ kg. El cable con que la grúa tira de la viga tien una tensión de ruptura de 9,5 kN. Calcular la aceleración máxima con que se puede subi la viga.**

Sol.: 2,9 m/s^2

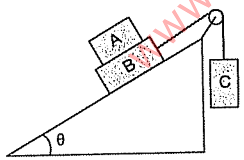
16 **Sobre un disco que gira a 45 rpm se deposita una moneda de masa $m = 15$ g. El coeficien te de fricción entre la moneda y la superficie del disco es 0,30. Determinar la distancia máxi ma a la que se puede dejar la moneda sin que salga despedida del disco.**

Sol.: $R = 13$ cm

17 **Determinar el ángulo de peralte mínimo que deberá tener una curva de $R = 40$ m para qu un vehículo pueda pasar por ella a 50 km/h sin salirse de la misma.**

Sol.: 26°

18 **Los bloques A y B de masas $m_A = 2{,}0$ kg y $m_B = 3{,}0$ kg están sobre un plano inclinado con un ángulo $\theta = 30°$. El coeficiente de fricción estática entre los bloques A y B es 0,40. La fricción entre el bloque B y el plano es despreciable. Determinar:**

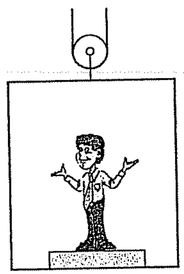


a) La masa del bloque C para la que el conjunto se encuentra en equilibrio estático.

b) La masa máxima del bloque C para la cual los bloques A y B suben por el plano sin deslizar el uno sobre el otro.

Sol.: a) $m_C = 2{,}5$ kg; *b)* $m_C = 11$ kg

19 **Un niño de masa 35 kg se encuentra sobre una báscula situada en el interior de un ascensor. Indicar cuál será la lectura de la báscula en las siguientes situaciones.**



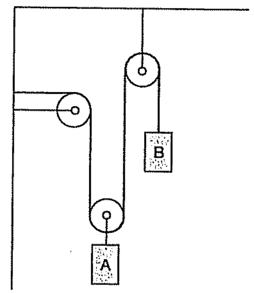
a) Cuando el ascensor desciende con velocidad constante.

b) Cuando el ascensor acelera hacia arriba a 1,0 m/s^2.

c) Cuando el ascensor acelera hacia abajo a 1,0 m/s^2.

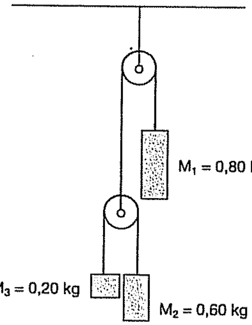
Sol.: a) 35 kg; *b)* 39 kg; *c)* 31 kg

Calcular la tensión de la cuerda y las aceleraciones de los bloques A y B de la figura. $M_A = 3{,}0$ kg y $M_B = 1{,}0$ kg. Las poleas no tienen masa ni fricción.



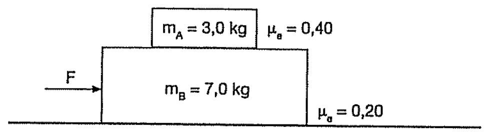
Sol.: $T = 11$ N; $a_A = -1{,}4$ m/s^2 $a_B = 2{,}8$ m/s^2

21 **Determinar la aceleración de cada uno de los bloques del sistema de poleas de la figura respecto a un observador situado en el suelo. Despreciar las masas de las poleas y las cuerdas, así como el rozamiento.**



Sol.: $a_1 = -1{,}4$ m/s^2; $a_2 = -4{,}2$ m/s^2 $a_3 = 7{,}0$ m/s^2

22 **Los bloques A y B de la figura descansan sobre un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque B y el plano es 0,20 y entre los bloques A y B 0,40.**



Determinar:

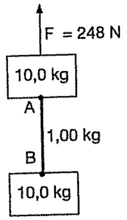
a) La fuerza F mínima con que se tiene que empujar al bloque B para poner el sistema en movimiento.

b) La fuerza F máxima con la que se puede empujar al bloque B sin que el bloque A resbale sobre el B.

c) La aceleración de los bloques A y B cuando $F = 80$ N.

Sol.: a) 20 N; *b)* 63 N; *c)* $a_A = 3{,}9$ m/s^2; $a_B = 7{,}0$ m/s^2

23 **Dos bloques de 10,0 kg están unidos por una cuerda inextensible de masa 1,00 kg. Tiramos del sistema hacia arriba con una fuerza $F = 248$ N. Determinar la tensión de la cuerda en los puntos A y B.**

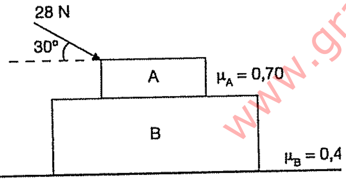


Sol.: $T_A = 130$ N; $T_B = 118$ N

24 **Un péndulo de masa $m = 0{,}25$ kg y longitud $l = 1{,}5$ m está oscilando. Cuando pasa por un ángulo de 30° su velocidad es $v = 2{,}0$ m/s. Determinar la aceleración normal y tangencial de la masa pendular y la tensión del hilo en este instante.**

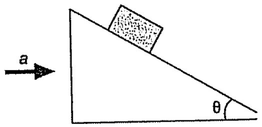
Sol.: $a_N = 2{,}7$ m/s^2; $a_T = 4{,}9$ m/s^2; $T = 2{,}8$ N.

25 **El peso de los bloques A y B de la figura es de 20 N y 30 N respectivamente. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y B es 0,70 y entre el bloque B y el suelo 0,40. Calcular la aceleración de ambos bloques cuando se empuja del bloque A con una fuerza de 28 N inclinada 30° respecto a la horizontal.**



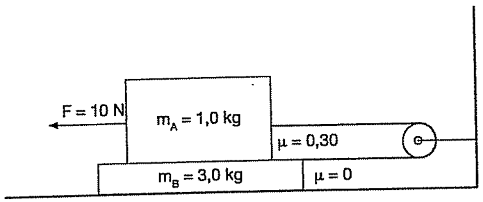
Sol.: $a_A = a_B = 1{,}9$ m/s^2

26 **Un bloque se encuentra sobre un plano inclinado con un ángulo θ. El rozamiento entre el bloque y el plano es cero. Calcular la aceleración del bloque respecto al suelo cuando se acelera el plano en dirección horizontal con aceleración a.**



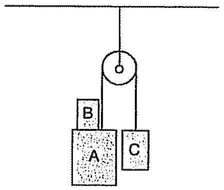
Sol.: $a_{\text{bloque}} = \text{sen}\,\theta\,\sqrt{g^2 + a^2}$

27 **Determinar la aceleración de los bloques A y B de la figura y la tensión de la cuerda.**



Sol.: $a_A = -1{,}0$ m/s^2; $a_B = 1{,}0$ m/s^2; $T = 6{,}0$ N

28 **Los bloques A y C de la figura están unidos por una cuerda inextensible que pasa a través de una polea. El bloque B descansa sobre el bloque A. Las masas de los bloques son $m_A = 3{,}0$ kg, $m_B = 0{,}50$ kg y $m_C = 2{,}0$ kg. Considerando nulas las masas de la cuerda y la polea así como los efectos de la fricción, determinar:**



a) La aceleración del conjunto.

b) La tensión de la cuerda.

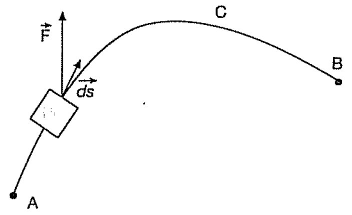
c) La fuerza normal que actúa sobre el bloque B.

Sol.: a) 2,7 m/s^2; *b)* 25 N; *c)* 3,6 N

CAPÍTULO 5

TRABAJO Y ENERGÍA

5.1. TRABAJO



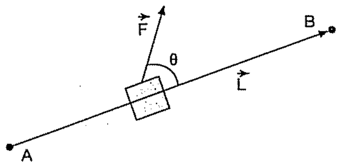
El *trabajo* elemental dW que una fuerza $\vec{F}$ realiza sobre una partícula que efectúa un pequeño desplazamiento $d\vec{s}$ es igual al producto escalar $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Cuando la partícula se desplaza entre dos puntos cualquiera A y B a lo largo del camino C, el trabajo total se obtiene integrando a lo largo de la trayectoria los dW. Es decir, realizando la integral de línea entre los puntos A y B de la fuerza por los diferenciales de desplazamiento:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (1)$$

Cuando la fuerza es constante (en módulo, dirección y sentido) y la trayectoria seguida es recta, la expresión anterior se simplifica quedando:

$$W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \vec{L} = FL\cos\theta \qquad (2)$$



Donde $\vec{L}$ es el desplazamiento efectuado por la partícula.
En el sistema internacional de unidades el trabajo se expresa en joule (J).

5.2. POTENCIA

La *potencia* que desarrolla una fuerza $\vec{F}$ es el trabajo realizado por dicha fuerza en la unidad de tiempo.

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{3}$$

Cuando sobre una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$ actúa una fuerza $\vec{F}$ la potencia desarrollada por esta fuerza es:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{4}$$

La unidad de potencia en el sistema internacional es el watt (W).

5.3. ENERGÍA CINÉTICA

La *energía cinética* E_c de un cuerpo es la energía que está asociada a su movimiento y se define como:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \tag{5}$$

En el sistema internacional de unidades la energía, al igual que el trabajo, se expresa en joules (J).

5.4. TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

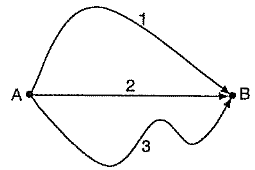
El *teorema del trabajo y la energía cinética* establece que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula entre dos puntos A y B, es igual a la variación de energía cinética que experimenta al ir de A a B.

$$W_{Fres} = \Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} \tag{6}$$

El trabajo realizado por la fuerza resultante es exactamente igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

5.5. FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

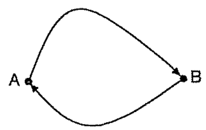
Una *fuerza* es *conservativa* cuando el trabajo que realiza sobre una partícula que se mueve entre dos puntos A y B no depende del camino seguido para ir de un punto al otro. El trabajo realizado por la



$W_1 = W_2 = W_3$

fuerza conservativa sólo depende de las posiciones de los puntos A y B, y no de la trayectoria seguida para ir de A a B.

En consecuencia, el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula que describe una trayectoria cerrada y vuelve al punto de salida es cero.



$W_{AB} = -W_{BA}$

Son fuerzas conservativas el peso, la fuerza que ejercen los muelles, las fuerzas electrostáticas, etc. Todas tienen en común que el trabajo realizado por una fuerza que en todo momento contrarreste la fuerza conservativa, queda almacenado en el sistema y siempre puede recuperarse en forma de energía cinética. Esta energía que queda almacenada es la energía potencial.

La *variación de energía potencial* ΔU que experimenta una partícula, entre dos puntos A y B, es el trabajo realizado por una fuerza que en todo momento contrarresta la fuerza conservativa, para llevar la partícula de A a B, sin modificar su energía cinética.

Otra definición es que la *variación de energía potencial* asociada a una fuerza conservativa $\vec{F}$, entre dos puntos A y B, es el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre A y B, cambiado de signo.

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{7}$$

También es necesario puntualizar que se han definido las variaciones de energía potencial, y no la energía potencial. Para dar un valor absoluto de la energía potencial se debe tomar un origen arbitrario de energías, y referir los valores de la energía a este origen.

Vamos a comentar un par de ejemplos.

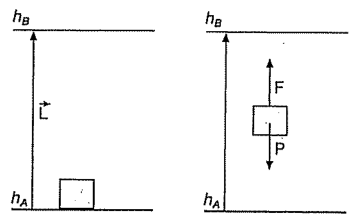
EJEMPLO 1

Variación de energía potencial asociada al peso

Levantamos un bloque de masa m de un punto A situado a altura h_A a un punto B situado a una altura h_B, a velocidad constante. La variación de energía potencial que experimenta el bloque puede calcularse, como:

a) El trabajo realizado por la fuerza F para llevar el bloque de A a B con movimiento rectilíneo uniforme.

Aplicando la segunda ley de Newton:



$$+\uparrow \quad F - P = 0 \Rightarrow F = mg$$

El trabajo realizado por la fuerza F es:

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{L} = FL \cos 0° = F\,(h_B - h_A) = mg\,(h_B - h_A)$$

En consecuencia:

$$\Delta U = U_B - U_A = mg\,(h_B - h_A) \qquad (8)$$

La energía potencial ha aumentado en un valor igual al trabajo realizado por el agente que ha realizado la fuerza F. Esta energía potencial puede convertirse en cinética con sólo soltar el bloque.

b) El trabajo realizado por el peso P entre A y B cambiado de signo.

El trabajo realizado por el peso cuando el bloque se mueve de A a B es:

$$W_P = \vec{P} \cdot \vec{L} = PL \cos 180° = -PL = -\,mg\,(h_B - h_A)$$

En consecuencia, la variación de energía potencial es:

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_P = mg\,(h_B - h_A) \qquad (9)$$

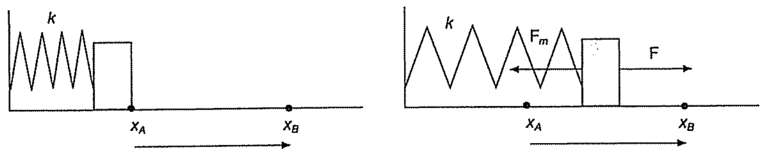
Podemos comprobar que las expresiones (8) y (9) coinciden. Además es bueno notar que hemos calculado una variación de energía potencial entre dos puntos, que depende de la diferencia de altura entre estos dos puntos. Para dar un valor absoluto a la energía potencial es necesario tomar un origen de energía. Es habitual tomar la energía potencial a altura cero igual a cero, quedando entonces la energía potencial de un punto situado a altura h como:

$$U\,(h) = mgh \qquad (10)$$

EJEMPLO 2

Variación de energía potencial elástica

Un bloque de masa m está unido a un muelle de constante recuperadora k. Se lleva el bloque a velocidad constante, desde un punto A situado en x_A a un punto B situado en x_B, tirando de él con una fuerza F.



La variación de energía potencial que experimenta el bloque puede calcularse como:

a) El trabajo realizado por la fuerza F para llevar el bloque de A a B sin modificar su energía cinética.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad F - F_m = 0 \Rightarrow F = kx$$

Como F no es constante, ya que depende de la coordenada x, el trabajo realizado por la fuerza F se calculará utilizando la expresión integral (1):

$$W_F = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F dx = \int_A^B kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big]_A^B = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

La variación de energía potencial es igual a:

$$\Delta U = U_B - U_A = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

El trabajo realizado por la fuerza F queda «almacenado» en forma de energía potencial elástica. Esta energía almacenada puede recuperarse y transformarse en energía cinética, tan sólo soltando el bloque.

b) El trabajo realizado por la fuerza del muelle, cambiado de signo.

El trabajo realizado por la fuerza del muelle es:

$$W_{Fm} = \int_A^B \vec{F}_m \cdot d\vec{s} = -\int_A^B F_m dx = -\int_A^B kx dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big]_A^B = -\left(\frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2\right)$$

La variación de energía potencial es igual a:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\,W_{Fm} = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

Al igual que en el ejemplo anterior, acabamos de calcular una variación de energía potencial entre dos puntos. Para dar un valor absoluto de la energía potencial deberemos escoger un origen. Es habitual, para la energía potencial elástica, tomar el origen de energía en el punto en que la longitud del muelle coincide con su longitud natural. Es decir, el punto en que la elongación x del muelle es cero. Teniendo en cuenta este origen, la energía potencial elástica queda:

$$W_{Fm} = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (11)$$

5.6. TEOREMA GENERALIZADO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Una *fuerza no* es *conservativa* cuando el trabajo que realiza sobre una partícula que se mueve entre dos puntos A y B depende del camino seguido para ir de un punto a otro.

El teorema del trabajo y la energía cinética enunciado en el Apartado 5.4. puede rescribirse de otra forma separando el trabajo realizado por la fuerza resultante en dos contribuciones: el realizado por las fuerzas conservativas W_{F_C} más el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas $W_{F_{NC}}$.

$$W_{F_{res}} = W_{F_C} + W_{F_{NC}}$$

Además, teniendo en cuenta que $W_{F_C} = -\,\Delta U$ la expresión (6) puede reformularse como:

$$\Delta E_c + \Delta U = W_{F_{NC}} \qquad (12)$$

El *teorema generalizado del trabajo y la energía* establece que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas que actúan sobre una partícula cuando va de un punto A a un punto B, es igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial que experimenta la partícula entre los puntos A y B.

5.7. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

La *energía mecánica* de un sistema es la suma de su energía cinética más su energía potencial.

$$E_m = E_c + U \tag{13}$$

En aquellas situaciones en que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas entre dos puntos A y B sea cero: $W_{F_{NC}} = 0$, según (12) se cumplirá que $\Delta E_c + \Delta U = 0$, es decir, $E_{cB} + U_B = E_{cA} + U_A \Rightarrow E_{mB} = E_{mA}$, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante.

5.8. CURVAS DE ENERGÍA POTENCIAL EN UNA DIMENSIÓN

La gráfica de la energía potencial asociada a una fuerza nos puede dar una información valiosa de cómo evolucionará un sistema.

Supongamos una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula, en una dimensión, por ejemplo, sobre el eje x. La variación de energía potencial asociada a esta fuerza para un desplazamiento dx será, $dU = -Fdx$. En consecuencia, la fuerza puede expresarse como la pendiente de la curva de energía potencial, cambiada de signo:

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{14}$$

De (14) se deduce que si la pendiente de la curva de energía potencial es positiva, la fuerza que actúa sobre la partícula es negativa y viceversa.

Cuando la pendiente de la curva de energía potencial es cero, la fuerza es nula y la partícula se encuentra en un *punto de equilibrio*.

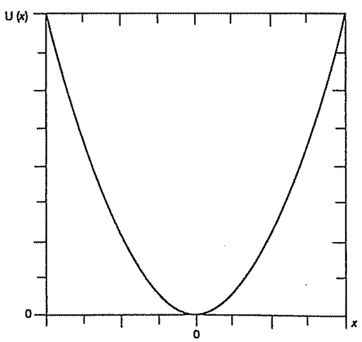
El *equilibrio* es *estable*, cuando un pequeño desplazamiento provoca una fuerza que intenta restituir la partícula a la posición de equilibrio. Los puntos de equilibrio estable corresponden a los mínimos de la curva de energía potencial.

El *equilibrio* es *inestable*, cuando un pequeño desplazamiento provoca una fuerza que aleja la partícula de la posición de equilibrio. Los puntos de equilibrio inestable corresponden a los máximos de la curva de energía potencial.

El *equilibrio* es *indiferente*, cuando un pequeño desplazamiento no provoca la aparición de ninguna fuerza.

A modo de ejemplo, empezaremos graficando la energía potencial elástica asociada a la fuerza que ejerce un muelle: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Para los puntos con $x > 0$ la pendiente de la curva es positiva y por tanto la fuerza es negativa, hacia la izquierda.

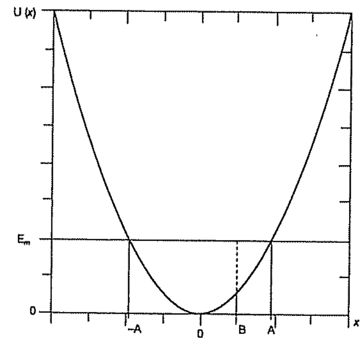


Para los puntos con $x < 0$ la pendiente de la curva es negativa y por tanto la fuerza es positiva, hacia la derecha.

En el punto $x = 0$ se encuentra un mínimo de la curva de energía potencial, se trata de un punto de equilibrio estable.

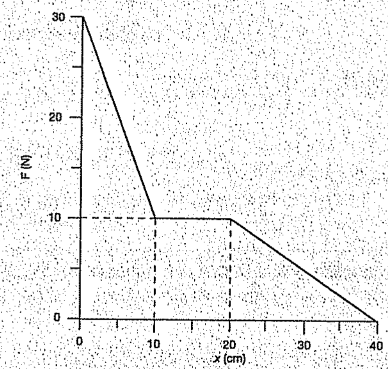
Supongamos ahora que la energía mecánica de un bloque ligado a un muelle se mantiene constante. La energía mecánica se representa en la siguiente gráfica con una recta horizontal.

En un punto cualquiera, como el punto B, la energía cinética (línea de puntos) es la diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial (línea continua). En consecuencia, la energía cinética en $x = 0$ es máxima, mientras que para $x = -A$ y $x = A$ la energía potencial coincide con la energía mecánica y por tanto la energía cinética es cero. El sistema nunca se encontrará en puntos con $x < -A$ o $x > A$, ya que implicaría tener una energía cinética negativa. Se dice entonces que el sistema está ligado, se encontrará siempre entre $-A < x < A$. Los puntos A y $-A$ se denominan *puntos de retorno*.



PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. La gráfica adjunta muestra cómo cambia la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo de masa 2,0 kg con la distancia x. Teniendo en cuenta que la velocidad de este cuerpo en $x = 0$ es de 1,3 m/s, determinar:



a) El trabajo realizado por la fuerza resultante entre $x = 0$ y $x = 40$ cm.

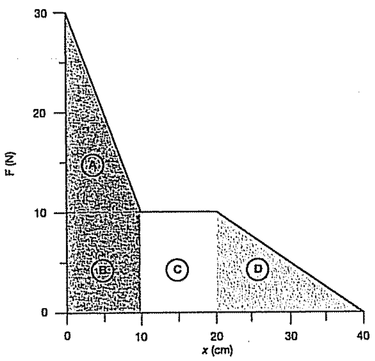
b) La velocidad que lleva el cuerpo en $x = 40$ cm.

Solución

a) Tal y como indica la figura, la fuerza resultante no es constante, sino que depende de la distancia x. En consecuencia el trabajo debe calcularse utilizando la expresión integral:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Nos podemos ahorrar el trabajo de realizar la integral si recordamos que la integral definida de una función entre dos puntos es el área que encierra la función entre estos dos puntos. En consecuencia, el trabajo podemos hallarlo calculando gráficamente el área que encierra la fuerza resultante con el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 40$ cm.



El trabajo entre $x = 0$ y $x = 10$ cm es la suma del área del triángulo A y del rectángulo B:

$$W_{0\to 10} = \frac{1}{2}\,20\text{ N}\cdot 10\cdot 10^{-2}\text{ m} + 10\text{ N}\cdot 10\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

$$W_{0\to 10} = 2{,}00\text{ J}$$

El trabajo entre $x = 10$ y $x = 20$ cm es el área C:

$$W_{10\to 10} = 10\text{ N}\cdot 10\cdot 10^{-2}\text{ m} = 1{,}00\text{ J}$$

Y el trabajo entre $x = 20$ y $x = 40$ cm es el área D:

$$W_{10\to 40} = \frac{1}{2}\,10\text{ N}\cdot 20\cdot 10^{-2}\text{ m} = 1{,}00\text{ J}$$

El trabajo total es la suma de:

$$W = W_{0\to 10} + W_{10\to 20} + W_{20\to 40} = 2{,}00\text{ J} + 1{,}00\text{ J} + 1{,}00\text{ J} = 4{,}00\text{ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza resultante entre $x = 0$ y $x = 40$ cm es $W = 4{,}0$ J.

b) Para calcular la velocidad que lleva el cuerpo en $x = 40$ cm, aplicaremos el teorema del trabajo y la energía cinética entre $x = 0$ y $x = 40$ cm. Este teorema establece que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo entre dos puntos, es igual a la variación de la energía cinética que experimenta este cuerpo entre estos puntos.

$$W_{F_{res}} = \Delta E_c$$

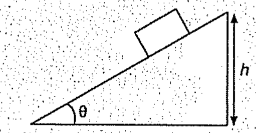
En consecuencia:

$$4{,}00\text{ J} = E_c\,(x = 40\text{ cm}) - E_c\,(x = 0\text{ cm}) = \frac{1}{2}\,2{,}0\text{ kg}\cdot v_f^2 - \frac{1}{2}\,2{,}0\text{ kg}\,(1{,}3\text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}\,2{,}0\text{ kg}\cdot v_f^2 - 1{,}69\text{ J}$$

Despejando v_f:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,(4{,}00\text{ J} + 1{,}69\text{ J})}{2{,}0\text{ kg}}} = 2{,}39\text{ m/s} \qquad v_f = 2{,}4\text{ m/s}$$

5.2. Un bloque de masa m cae deslizando por un plano inclinado. El bloque sale de un punto situado a una altura h con velocidad inicial cero.



a) Determinar el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque en el trayecto de bajada.

b) Calcular el trabajo realizado por la fuerza resultante.

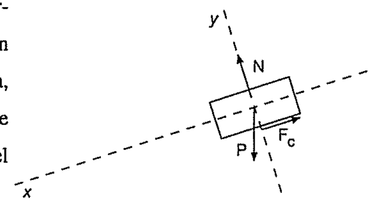
c) Hallar la aceleración con que baja el bloque y su velocidad en la parte más baja del plano.

d) Aplicar el teorema del trabajo y la energía cinética para determinar la velocidad con que llega el bloque a la parte más baja del plano.

e) Aplicar el teorema generalizado del trabajo y la energía para determinar la velocidad con que llega el bloque a la parte más baja del plano.

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la normal, el peso y el rozamiento. Debido a que estas fuerzas son constantes y la trayectoria seguida por el bloque es recta, el trabajo realizado por cada una de ellas puede calcularse haciendo $W_F = \vec{F}\cdot\vec{L}$. $\vec{L}$ es el vector desplazamiento del bloque y su módulo $L = \dfrac{h}{\text{sen }\theta}$.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$+\nwarrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - mg\cos\theta = 0$$

De donde se deduce que $N = mg\cos\theta$: (1)

$$+\swarrow \quad \sum_i F_{ix} = 0 \qquad mg\cos\theta - F_c = ma \tag{2}$$

Siendo $F_c = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$. (3)

Sustituyendo (3) en (2) se deduce que la fuerza resultante tiene la dirección del plano inclinado y su módulo es:

$$F_{RES} = mg\text{sen }\theta - \mu_c\,mg\cos\theta = ma \tag{4}$$

El trabajo realizado por la normal, $W_N = \vec{N}\cdot\vec{L} = NL\cos 90° = 0$;

por el peso, $W_P = \vec{P}\cdot\vec{L} = mg\,[\text{sen }\theta\hat{i}' - \cos\theta\hat{j}']\,L\hat{i}' = mg\text{sen }\theta L = mgh$;

y por el rozamiento, $W_{F_c} = \vec{F}_c\cdot\vec{L} = F_cL\cos 180° = -\mu_c\,mg\cos\theta L = -\mu_c\,mgh\dfrac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}$.

b) La fuerza resultante es:

$$\vec{F}_{RES} = [mg\text{sen }\theta - \mu_c mg\cos\theta]\,\hat{i}$$

Y el trabajo que realiza es:

$$W_{RES} = \vec{F}_{RES}\cdot\vec{L} = [mg\text{ sen }\theta - \mu_c mg\cos\theta]\hat{i}\cdot L\hat{i} = \left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]mg$$

Puede comprobarse que es igual a la suma de los trabajos realizados por todas las fuerzas.

$$W_{RES} = \sum_i W_{Fi} = \left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]mgh$$

c) La aceleración se deduce de la ecuación (4):

$$a = \frac{F_{RES}}{m} = g\text{sen }\theta - \mu_c\, g\cos\theta$$

y la velocidad del bloque en función del tiempo es $v(t) = at$. La distancia recorrida sobre el plano $x(t) = \frac{1}{2}at^2$, por lo que el tiempo de bajada $t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$. La velocidad final será:

$$v_f = \sqrt{2La} = \sqrt{2gh\left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]}$$

d) El teorema del trabajo y la energía cinética dice que el trabajo realizado por la fuerza resultante es igual a la variación de energía cinética del bloque.

$$W_{RES} = \Delta E_c$$

La energía cinética inicial del bloque es cero porque parte del reposo, en consecuencia:

$$W_{RES} = \left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Y por tanto $v_f = \sqrt{2gh\left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]}$ coincide con la calculada en el apartado anterior.

e) Según el teorema generalizado del trabajo y la energía, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (en este caso el rozamiento) es igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial.

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (1)$$

La variación de energía potencial asociada al peso es igual a:

$$\Delta U = -\,mgh$$

Y el trabajo realizado por el rozamiento:

$$W_{F_c} = -\,\mu_c\, mgh\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}$$

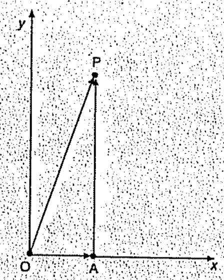
Sustituyendo en la expresión (1):

$$W_{F_c} = -\mu_c\, mgh\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

puede comprobarse que la velocidad final obtenida es la misma que en los apartados anteriores:

$$v_f = \sqrt{2gh\left[1-\mu_c\frac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}\right]}$$

5.3. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = (2xy - x)\,\hat{i} + (x + y)\,\hat{j}$ cuando un objeto se mueve desde el origen de coordenadas O hasta el punto P (1,3) realizando los siguientes caminos.



a) Desplazándose de O a A (0,1) en dirección horizontal y de A a P en dirección vertical.

b) Desplazándose de O a P en línea recta.

(Todas las magnitudes se encuentran expresadas en el SI de unidades).

Solución

a) En el tramo de O a A el diferencial de desplazamiento es $d\vec{s} = dx\,\hat{i}$. El diferencial de trabajo dW viene dado por el producto escalar $dW = d\vec{s}\cdot\vec{F} = (2xy - x)\,dx$. En todo este recorrido $y = 0$, por lo que $dW = -xdx$. El trabajo entre O y A se obtiene integrando dW entre $x = 0$ y $x = 1$m:

$$W_{O\to A} = \int_O^A dW = -\int_0^1 x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = -0{,}50\text{ J}$$

En el tramo AP $d\vec{s} = dy\,\hat{j}$, x se mantiene constante e igual a 1 m. El diferencial de trabajo $dW = d\vec{s}\cdot\vec{F} = (x + y)\,dy = (1 + y)\,dy$. El rango de variación de la variable y va de 0 a 3 m. Por lo que el trabajo entre A y P será igual a:

$$W_{A\to P} = \int_A^P dW = \int_0^3 (1 + y)\,dy = y + \frac{1}{2}y^2\Big]_0^3 = 7{,}5\text{ J}$$

El trabajo total será igual a:

$$W_{O\to P} = W_{O\to A} + W_{A\to P} = -\,0{,}5\text{ J} + 7{,}5\text{ J} = 7{,}0\text{ J}$$

b) Cuando el desplazamiento entre O y P se realiza en línea recta la ecuación de la trayectoria seguida es $y = 3x$. Esta ecuación explicita la relación funcional entre las variables x e y, y también entre dx y dy ya que diferenciándola se obtiene: $dy = 3\,dx$.

En este caso el diferencial de desplazamiento será $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{i}$ y el diferencial de trabajo $dW = d\vec{s} \cdot \vec{F} = (2xy - y)\ dx + (y + x)\ dy$. Sustituyendo $y = 3x$ y $dy = 3\ dx$ se obtiene $dW = (2xy - x)\,dx + (y + x)\,dy = (6x^2 - x)\,dx + 12x\,dx = (6x^2 + 11x)\,dx$.

Teniendo en cuenta que x varía entre 0 y 1, integrando se obtiene:

$$W = \int_0^1 (6x^2 + 11x)\,dx = 2x^3 + 5{,}5x^2\Big]_0^1 = 7{,}5\ \text{J}$$

Obsérvese que el trabajo para ir de O a P es distinto para cada una de las trayectorias, esto quiere decir que esta fuerza no es conservativa.

5.4. Se dispara una bala de 10 g en dirección vertical ascendente. La velocidad de salida es $v_i = 140$ m/s y la velocidad con que regresa al suelo es $v_f = 50$ m/s. Determinar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

Solución

Según el teorema generalizado del trabajo y la energía, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (en este caso el rozamiento) es igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial.

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (1)$$

En este caso la variación de energía potencial gravitatoria de la bala es cero porque sale de una altura cero y llega a una altura cero: $\Delta U_g = 0$.

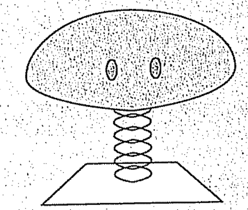
La variación de energía cinética es:

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}\,m\,(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\left[(50\ \text{m/s})^2 - (140\ \text{m/s})^2\right] = -85{,}5\ \text{J}$$

Sustituyendo en (1), el trabajo realizado por la fricción es:

$$W_{F_r} = \Delta E_c = -85{,}5\ \text{J}; \quad W_{F_r} = -86\ \text{J}$$

5.5. Una «pulga» de juguete de 15 g de masa dispone de un muelle de $k = 500$ N/m. Un niño juega con su «pulga» en el suelo, comprime el muelle $\Delta y = 2$ cm y libera la «pulga». Determinar la altura máxima que alcanzará la «pulga», despreciando los efectos de la fricción.



Solución

Teniendo en cuenta que el enunciado indica que los efectos de la fricción son despreciables, la energía mecánica de la «pulga» se mantendrá constante y entonces:

$$\Delta E_c + \Delta U = 0 \qquad (1)$$

En este proceso intervienen la energía potencial gravitatoria y elástica asociadas al peso y al muelle respectivamente, por lo que:

$$\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_e = U_{gf} - U_{gi} + U_{ef} - U_{ei} = mgh_{\text{máx}} - 0 + 0 - \frac{1}{2}\,k\,\Delta y^2 \qquad (2)$$

Tanto cuando el muelle está comprimido como cuando alcanza la altura máxima la velocidad de la pulga es cero, por lo que su variación de energía cinética será nula.

$$\Delta E_c = 0 \qquad (3)$$

En consecuencia, sustituyendo (2) y (3) en (1):

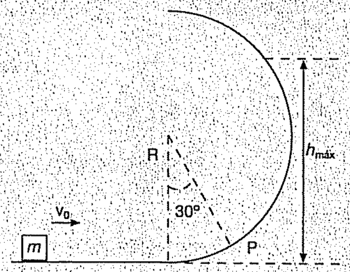
$$mgh_{\text{máx}} - \frac{1}{2}\,k\,\Delta y^2 = 0$$

y despejando $h_{\text{máx}}$

$$h_{\text{máx}} = \frac{k\Delta y^2}{2\,mg} = \frac{500\ \text{N/m} \cdot (2 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2}{2 \cdot 15 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}680\ \text{m}$$

La altura máxima que alcanzará la pulga es $h_{\text{máx}} = 68$ cm.

5.6. Un objeto de masa m se desliza con una velocidad v_0 por un plano horizontal y seguidamente asciende por una superficie de forma circular hasta una altura $h_{\text{máx}}$. Considerando el rozamiento despreciable determinar:



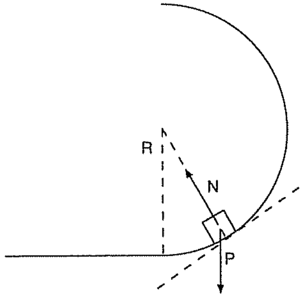
a) El módulo de la aceleración tangencial y normal del objeto cuando pasa por el punto P.

b) La altura máxima $h_{\text{máx}}$ a la que llega el objeto.

Solución

a) El módulo de la aceleración tangencial y normal del objeto cuando pasa por el punto P.

La altura h a la que se encuentra el punto P es $h = R\ (1 - \cos 30^\circ)$. Debido a que el rozamiento es cero, la energía mecánica del objeto se conserva, y se puede calcular la velocidad de paso por P mediante:



$$\Delta E_c + \Delta U = 0$$
$$E_{cf} + U_f = E_{ci} + U_i$$
$$^1/_2\, m\, v_P^2 + mgh = {}^1/_2\, mv_0^2$$
$$v_P^2 = v_0^2 - 2\, gR\, (1 - \cos 30^\circ)$$

La aceleración normal en P será:

$$a_n = v_P^2\,/R = v_0^2/R - 2\, g\, (1 - \cos 30^\circ)$$

La aceleración tangencial se determina aplicando la segunda ley de Newton en dirección tangente al plano.

$$+\swarrow \quad \sum F_t = ma_t \qquad P \text{ sen } 30^\circ = m\, a_t$$

$$a_t = g \text{ sen} 30^\circ$$

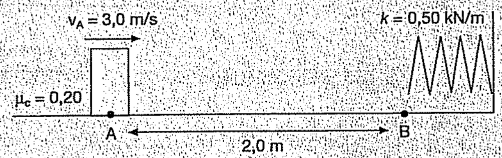
b) La altura máxima $h_{máx}$ a la que llega el objeto.

Se calculará $h_{máx}$ aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que la velocidad con que el cuerpo llega a $h_{máx}$ es cero.

$$\Delta E_c + \Delta U = 0 \qquad E_{cf} + U_f = E_{ci} + U_i \qquad mgh_{máx} = {}^1/_2\, mv_0^2$$

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2\, g}$$

5.7. Un bloque de 2,0 kg se desliza sobre un plano horizontal con un rozamiento ($\mu_c = 0{,}20$). El bloque pasa por el punto A de la figura con velocidad $v_A = 3{,}0$ m/s, y llega al punto B donde se encuentra un muelle de constante recuperadora $k = 0{,}50$ kN/m. La distancia entre A y B es 2,0 m.



Determinar:

a) La velocidad con que el bloque llega a B.

b) La máxima compresión que alcanza el muelle.

Solución

a) Para encontrar v_B aplicaremos el teorema del trabajo y la energía entre A y B. Éste establece que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo entre dos puntos es igual a la variación de la energía cinética que experimenta este cuerpo entre estos puntos.

$$W_{Fres} = \Delta E_c \qquad (1)$$

La fuerza resultante que actúa entre A y B es la fuerza de fricción:

$$F_c = \mu_c N = \mu_c mg$$

El trabajo realizado por el rozamiento entre A y B es:

$$W_{F_c} = \vec{F}_c \cdot \vec{L}$$

Donde $\vec{L}$ es el vector que va de A a B, cuyo módulo L es la distancia entre A y B ($L = 2{,}0$ m). Debido a que los vectores $\vec{F}_c$ y $\vec{L}$ tienen sentidos opuestos:

$$W_{F_c} = \mu_c\, mgL \cos 180^\circ = -\mu_c\, mgL$$

Sustituyendo en la expresión (1):

$$-\mu_c\, mgL = E_{cB} - E_{cA} \qquad -\mu_c\, mgL = \frac{1}{2}\, mv_B^2 - \frac{1}{2}\, mv_A^2$$

Despejando v_B y sustituyendo por los valores numéricos:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_c\, gL} = \sqrt{(3{,}0 \text{ m/s})^2 - 2 \cdot 0{,}20 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}0 \text{ m}} = 1{,}07 \text{ m/s}$$

La velocidad con que llega al muelle es $v_B = 1{,}1$ m/s.

b) La máxima compresión del muelle se hallará con el teorema generalizado del trabajo y la energía. Éste establece que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (en este caso el rozamiento) es igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial (en este caso energía potencial elástica).

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (2)$$

El trabajo realizado por el rozamiento desde el punto B al punto de máxima compresión del muelle $x_{máx}$, vendrá dado por:

$$W_{F_c} = -\mu_c\, mgx_{máx}$$

Sustituyendo en (2):

$$-\mu_c\, mgx_{máx} = E_{cf} - E_{ci} + U_f - U_i \qquad -\mu_c\, mgx_{máx} = 0 - \frac{1}{2}\, mv_B^2 + \frac{1}{2}\, kx_{máx}^2 - 0$$

quedando una ecuación de segundo grado en $x_{máx}$:

$$\frac{1}{2}\, kx_{máx}^2 + \mu_c\, mgx_{máx} - \frac{1}{2}\, mv_B^2 = 0$$

y sustituyendo por los valores numéricos:

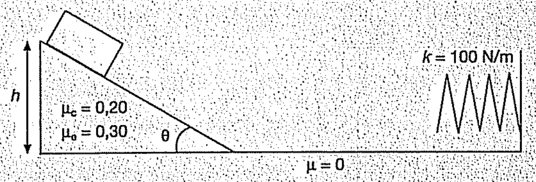
$$\frac{1}{2}\, 500 \text{ N/m}\, x_{máx}^2 + 0{,}20 \cdot 2{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot x_{máx} - \frac{1}{2}\, 2{,}0 \text{ kg}\, (1{,}07 \text{ m/s})^2 = 0$$

$$250 \text{ N/m}\, x_{máx}^2 + 3{,}92 \text{ N} \cdot x_{máx} - 1{,}14 \text{ J} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se encuentran dos soluciones, $x_{máx} = 0{,}060$ m y $x_{máx} = -0{,}075$ m, la segunda de las cuales carece de sentido por ser negativa.

En consecuencia, la compresión máxima del muelle será de 6,0 cm.

5.8. Un bloque de 0,80 kg cae desde una altura $h = 0,50$ m por un plano inclinado de 30°. Cuando llega abajo se desliza por un plano horizontal sin fricción y comprime un muelle de constante recuperadora $k = 100$ N/m. Los coeficientes de rozamiento del bloque con el plano son: $\mu_c = 0,2$ y $\mu_e = 0,3$.



Determinar:

a) La velocidad con que llega el bloque a la parte más baja del plano, v'.

b) La compresión máxima del muelle, $x_{máx}$.

c) La altura h' que alcanzará el bloque en el plano inclinado después de rebotar contra el muelle.

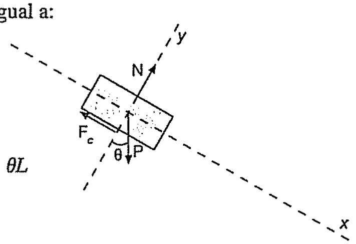
d) ¿Permanecerá el bloque en reposo sobre el plano después de alcanzar la altura h'?

Solución

a) La velocidad con que el bloque llega a la parte más baja del plano puede calcularse utilizando el teorema generalizado del trabajo y la energía. Éste establece que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (en este caso el rozamiento) es igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial.

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (1)$$

La variación de energía potencial asociada al peso es igual a:



$$\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = 0 - mgh \qquad (2)$$

Y el trabajo realizado por el rozamiento es:

$$W_{F_c} = \vec{F}_c \cdot \vec{L} = F_c L \cos 180° = -\mu_c N L = -\mu_c mg \cos \theta L$$

donde L es la longitud del plano, $L = \dfrac{h}{\text{sen}\,\theta}$:

$$W_{F_C} = -\mu_c mgh \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en la expresión (1):

$$-\mu_c mgh \text{ cotg } \theta = E_{cf} - E_{ci} + \Delta U_g = \frac{1}{2} mv'^2 - mgh$$

y despejando v':

$$v' = \sqrt{2\,gh\,[1 - \mu_c \text{ cotg } \theta]} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,50\, m\,[1 - 0,20 \text{ cotg } 30°]} = 2,53 \text{ m/s}$$

La velocidad con que el bloque llega a la parte más baja del plano es $v' = 2,5$ m/s.

b) Debido a que en el plano horizontal no se producen pérdidas por rozamiento, la velocidad con que el bloque llega al muelle es $v' = 2,5$ m/s. En el proceso de compresión del muelle la energía mecánica del sistema también se mantendrá constante. La compresión máxima del muelle puede determinarse haciendo:

$$\Delta E_c + \Delta U_e = 0; \quad E_{cf} - E_{ci} + U_{ef} - U_{ei} = 0; \quad 0 - \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} kx_{máx}^2 - 0 = 0$$

Despejando $x_{máx}$:

$$x_{máx} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v' = \sqrt{\frac{0,80 \text{ kg}}{100 \text{ N/m}}} \cdot 2,53 \text{ m/s} = 0,226 \text{ m}$$

La compresión máxima del muelle es $x_{máx} = 23$ cm.

c) El bloque sale despedido del muelle a $v' = 2,5$ m/s, y llega a la parte más baja del plano con esta velocidad. Esto es así porque en los procesos de descompresión del muelle y de avance del bloque por el plano horizontal no se producen pérdidas. Para determinar la altura h' a la que el bloque llegará sobre el plano es suficiente con volver a aplicar el teorema generalizado del trabajo y la energía.

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (4)$$

La variación de energía potencial asociada al peso es igual a:

$$\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = mgh' - 0 \qquad (5)$$

y el trabajo realizado por el rozamiento:

$$W_{F_c} = \vec{F}_c \cdot \vec{L}' = F_c L' \cos 180° = -\mu_c N L' = -\mu_c mg \cos\theta\, L'$$

donde L' es la distancia recorrida por el bloque sobre el plano, $L' = \dfrac{h}{\text{sen}\,\theta}$:

$$W_{F_c} = -\mu_c mgh' \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) y (5) en (4):

$$-\mu_c mgh' \cot\theta = E_{cf} - E_{ci} + \Delta U_g = 0 - \frac{1}{2} mv'^2 + mgh'$$

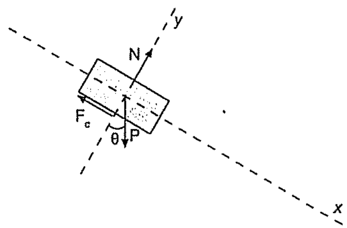
y despejando h':

$$h' = \frac{v'^2}{2\,g\,(1 + \mu_c \text{ cotg } \theta)} = \frac{(2,53 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2\,(1 + 0,20 \cdot \text{cotg } 30°)} = 0,242 \text{ m}$$

La altura a la que llega el bloque es $h' = 0,24$ m.

d) El bloque permanecería en reposo sobre el plano si la fuerza de fricción estática para mantenerlo en equilibrio fuera menor que la fuerza de fricción estática máxima.

$$F_e < F_{emáx}$$



Para que el bloque se mantenga en equilibrio sobre el plano:

$$+\nwarrow \quad \sum_i F_{ix} = 0; \quad F_e - mg \text{ sen } \theta = 0;$$

y la fuerza de fricción estática debería ser igual a:

$$F_e = mg \text{ sen } \theta = 0,80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 30° = 3,92 \text{ N}$$

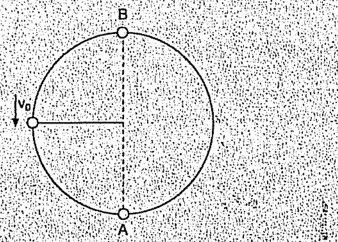
Por otro lado, la fuerza de fricción estática máxima es $F_{emáx} = \mu_e N$.
Para calcular N hacemos:

$$+\nearrow \quad \sum F_y = 0; \quad N - mg\cos\theta = 0; \quad N = mg\cos\theta, \text{ y entonces:}$$

$$F_{emáx} = \mu_e mg\cos\theta = 0{,}30 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30° = 2{,}55 \text{ N}$$

Como $F_e = 3{,}9$ N es mayor que $F_{e\,máx} = 2{,}6$ N, el bloque no permanecerá en reposo sobre el plano.

5.9. Un péndulo de masa m y longitud l es lanzado desde la posición horizontal con velocidad inicial v_0.



Considerando los efectos de la fricción despreciables, determinar:

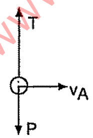
a) La velocidad con que llega al punto más bajo de su trayectoria (punto A).

b) La tensión de la cuerda en A.

c) El valor mínimo de la velocidad de salida $v_{0\,mín}$ que le permite completar una vuelta.

Solución

a) A lo largo del movimiento se conserva la energía mecánica del péndulo, por lo que la velocidad con que llega al punto A puede determinarse haciendo:



$$E_m = ct = E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl = \frac{1}{2}mv_A^2$$

Despejando v_A: $v_A = \sqrt{v_0^2 + 2gl}$ (1)

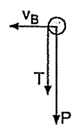
b) La tensión de la cuerda en A se hallará aplicando la segunda ley de Newton. Las fuerzas que actúan sobre la masa pendular en el punto A son la tensión en sentido ascendente y el peso en sentido descendente.

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{in} = ma_n; \quad T - mg = m\frac{v_A^2}{l} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) y despejando T, se obtiene:

$$T - mg = m\frac{v_0^2 + 2gl}{l} \qquad T = 3\,mg + m\frac{v_0^2}{l}$$

c) Para que el péndulo complete una vuelta, la tensión en el punto más alto (punto B) deberá ser mayor que cero. Aplicando la segunda ley de Newton a la esfera pendular cuando se encuentra en B:



$$+\downarrow \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad T + mg = m\frac{v_B^2}{l} \tag{3}$$

La velocidad mínima que el péndulo deberá tener en B se encontrará imponiendo $T = 0$, ya que para valores de la tensión ligeramente mayores a cero el péndulo ya completará la vuelta. Entonces de la expresión (3) se deduce que:

$$0 + mg = m\frac{v_{B\,mín}^2}{l} \qquad v_{B\,mín}^2 = gl \tag{4}$$

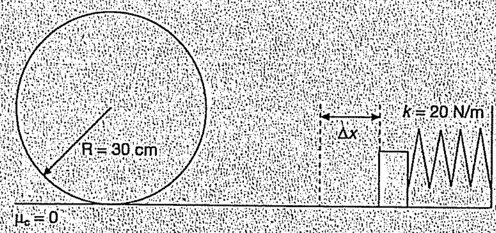
Seguidamente se aplicará el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto de partida y el punto B, para encontrar la velocidad mínima $v_{0\,mín}$ con que se tendrá que lanzar el péndulo.

$$E_m = ct = E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f; \quad \frac{1}{2}mv_{0\,mín}^2 + mgl = \frac{1}{2}mv_{B\,mín}^2 + mg\,2l \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5):

$$\frac{1}{2}mv_{0\,mín}^2 + mgl = \frac{1}{2}mgl + mg\,2l \qquad v_{0\,mín} = \sqrt{3\,gl} \qquad (5)$$

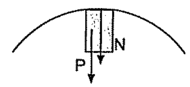
5.10. Determinar la compresión mínima, Δx, del muelle para que el bloque de masa 20 g consiga describir el *loop* de radio 30 cm de la figura. Despreciar los efectos de la fricción.



Solución

Se empezará determinando la expresión de la velocidad mínima $v_\uparrow$ con que el bloque deberá llegar a la parte más alta del *loop* para no caerse.

En el punto más alto las fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso y la normal, ambas en sentido descendente. Aplicando la segunda ley de Newton:



$$+\downarrow \quad \sum_i F_{iy} = m \cdot a_y \qquad N + mg = m\frac{v^2}{R}$$

Para que el bloque describa el *loop* no debe perder el contacto con la superficie del carril. Esto implica que la fuerza normal debe ser mayor que cero. En consecuencia, la velocidad mínima con que el bloque deberá llegar a la parte más alta del *loop* es aquella para la cual la fuerza normal es cero.

$$N = 0 \;\Rightarrow\; mg = m\frac{v_\uparrow^2}{R} \;\Rightarrow\; v_\uparrow^2 = gR \tag{1}$$

Dado que no actúan fuerzas no conservativas la energía mecánica se conserva, y se puede determinar la velocidad del bloque en el punto más bajo del *loop*, $v_\downarrow$ (que es la misma con que saldrá despedido del muelle) haciendo:

$$\Delta E_c + \Delta U_g = 0; \quad E_{cf} - E_{ci} + U_{gf} - U_{gi} = 0; \quad \frac{1}{2}mv_\uparrow^2 - \frac{1}{2}mv_\downarrow^2 + mg\,2R - 0 = 0$$

Despejando $v_\downarrow$ y sustituyendo $v_\uparrow$ por la expresión (1):

$$v_\downarrow^2 = v_\uparrow^2 + 4\,gR = gR + 4gR = 5\,gR \qquad (2)$$

Así pues, el bloque sale del muelle con velocidad $v_\downarrow$. Como se conserva la energía mecánica, se puede afirmar que la energía cinética de salida del bloque es igual a la energía potencial almacenada en el muelle cuando estaba comprimido. Esto es:

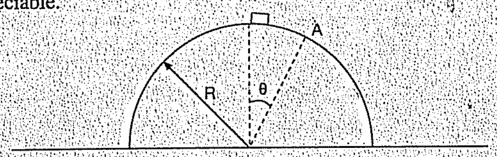
$$\Delta E_c + \Delta U_m = 0; \qquad E_{cf} - E_{ci} + U_{mf} - U_{mi} = 0; \qquad \frac{1}{2}\,mv_\downarrow^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2 = 0$$

Despejando Δx y sustituyendo $v_\downarrow$ por la expresión (2):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{mv_\downarrow^2}{k}} = \sqrt{\frac{5\,mg\,R}{k}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 30 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{}} = 0{,}121\ \text{m}$$

La compresión mínima del muelle es $\Delta x = 12$ cm.

5.11. Un cubito de hielo resbala por una superficie esférica de radio R. El cubito parte del punto más alto con velocidad inicial nula. La fricción entre el cubito y la esfera es despreciable.



Determinar:

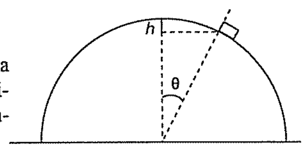
a) La aceleración normal y tangencial del cubito cuando pasa por un punto A cualquiera de la superficie esférica.

b) El ángulo $\theta_{máx}$ para el cual el cubito pierde el contacto con la superficie esférica.

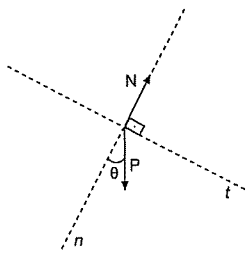
c) La velocidad con que el cubito llega al suelo.

Solución

a) La aceleración normal en A es $a_n = \dfrac{v_A^2}{R}$.



Cuando el cubito pasa por A ha descendido una altura $h = R - R\cos\theta$. Puesto que no hay pérdidas por fricción la velocidad del cubito en A puede calcularse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.



$$E_m = ct = E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f; \qquad 0 + mgh = \frac{1}{2}\,mv_A^2$$

$$mgR\,(1 - \cos\,\theta) = \frac{1}{2}\,mv_A^2$$

Despejando v_A^2 se obtiene: $v_A^2 = 2\,gR\,(1 - \cos\,\theta)$ (1)

y en consecuencia $a_n = 2\text{g}\,(1 - \cos\,\theta)$.

La aceleración tangencial se obtendrá aplicando la segunda ley de Newton:

$$+\downarrow \quad \sum_i F_{in} = m \cdot a_n \qquad -N + mg\cos\,\theta = m\,\frac{v_A^2}{R} \qquad (2)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{it} = m \cdot a_t \qquad mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t \qquad (3)$$

De la expresión (3) se deduce que $a_t = g\,\text{sen}\,\theta$.

b) El ángulo $\theta_{máx}$ es aquel para el que la fuerza normal de contacto del cubito con el plano es cero.

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene la expresión que relaciona la fuerza normal y el peso con el ángulo de contacto con el plano:

$$-N + mg\cos\,\theta = m\,\frac{2\,gR\,(1 - \cos\,\theta)}{R} \qquad N = gm\,(3\cos\,\theta - 2);$$

y se verifica que N disminuye cuando θ aumenta.

Cuando se impone la condición $N = 0$, se obtiene:

$$N = gm\,(3\cos\,\theta_{máx} - 2) = 0 \qquad \theta_{máx} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}2°$$

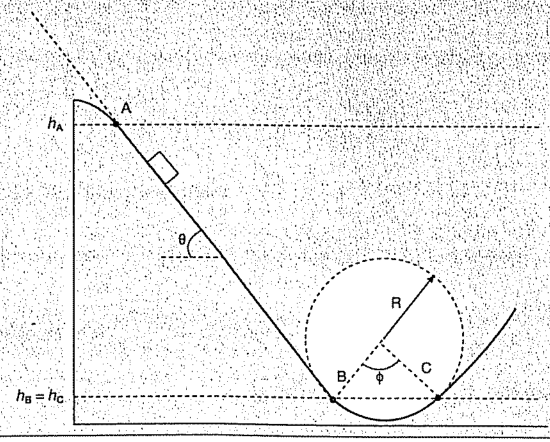
El ángulo máximo para el cual existe contacto entre la esfera y el cubito es $\theta_{máx} = 48°$.

c) La velocidad con que el cubito llega al suelo puede determinarse muy fácilmente aplicando de nuevo el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_m = ct = E_{ci} + U_i = E_{cf} + U_f \qquad 0 + mgR = \frac{1}{2}\,mv_f^2$$

Despejando v_f, queda $v_f = \sqrt{2gR}$.

5.12. Un niño de 25 kg baja en un trineo de 15 kg por la ladera de una colina. Pasa por el punto A situado a una altura $h_A = 30$ m con velocidad $v_A = 2{,}0$ m/s, seguidamente recorre un tramo recto inclinado con un ángulo $\theta = 40°$ hasta llegar a B situado a una altura $h_B = 2{,}0$ m, donde recorre una curva de radio $R = 6{,}0$ m. Estimar la fuerza de fricción como un 15% del peso del niño más el trineo.



Determinar:

a) La velocidad con que pasa por el punto *B*.

b) El valor de la fuerza normal un instante antes y un instante después de pasar por *B*.

c) La velocidad con que pasa por el punto C, considerando el ángulo $\phi = 90°$.

Solución

El peso del niño más el trineo es $P = (25\text{ kg} + 15\text{ kg}) \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = 392\text{ N}$.
La fuerza de rozamiento es $F_r = 0{,}15 \cdot P = 58{,}8\text{ N}$.

a) Para determinar v_B se aplicará el principio generalizado del trabajo y la energía entre los puntos A y B:

$$W_{F_{NC}} = \Delta E_c + \Delta U \qquad (1)$$

En este caso, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, es el trabajo realizado por la fricción en el tramo AB:

$$W_{F_r} = \vec{F}_r \cdot \vec{L}$$

Donde $\vec{L}$ es el vector que va de A a B, cuyo módulo puede expresarse como $L = \dfrac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta}$. El ángulo formado entre $\vec{F}_r$ y $\vec{L}$ es de 180°, por tener el rozamiento sentido opuesto al movimiento, entonces:

$$W_{F_r} = \vec{F}_r \cdot \vec{L} = F_r L \cos 180° = -F_r \frac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta}$$

Sustituyendo en (1):

$$-F_r \frac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta} = E_{cf} - E_{ci} + U_f - U_i; \quad -F_r \frac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_B - mgh_A \qquad (2)$$

Despejando v_B de la expresión (2):

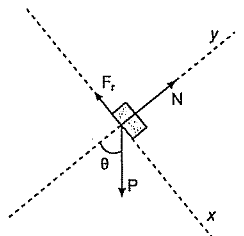
$$\frac{1}{2} m v_B^2 = -F_r \frac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta} + \frac{1}{2} m v_A^2 - mgh_B + mgh_A; \quad v_B = \sqrt{-2 F_r \frac{h_A - h_B}{\text{sen }\theta} + v_A^2 + 2g\,(h_A - h_B)}$$

y sustituyendo por los valores numéricos:

$$v_B = \sqrt{-2 \cdot 58{,}8\text{ N}\,\frac{30\text{ m} - 2{,}0\text{ m}}{40\text{ kg sen }40°} + (2{,}0\text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot (30\text{ m} - 2{,}0\text{ m})} = 20{,}6\text{ m/s}$$

El trineo pasará por B a $v_B = 21$ m/s.

b) Un instante antes de pasar por B el trineo se mueve en línea recta, por lo que aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del eje *y*:



$$+\nearrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - P\cos\theta = 0 \qquad N = P\cos\theta$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$N = 392\text{ N}\cos 40° = 300\text{ N}$$

Un instante después de pasar por B el trineo describe una curva de radio *R*, por lo que existirá aceleración normal dirigida hacia el centro de la curva. Aplicando de nuevo la segunda ley:

$$+\nearrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad N - P\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R} \qquad N = P\cos\theta + m\frac{v_B^2}{R}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$N = 392\text{ N}\cos 40° + 40\text{ kg}\,\frac{(20{,}6\text{ m/s})^2}{6{,}0\text{ m}} = 3{,}13\text{ kN}$$

En el punto B el valor de la fuerza normal pasa de 0,30 kN a un valor de 3,1 kN.

c) Para determinar la velocidad con que el trineo pasa por C se volverá a aplicar el principio generalizado del trabajo y la energía (1).
En este caso, debido a que el tramo BC no es recto, se debe calcular el trabajo realizado por la fricción entre B y C con la expresión integral:

$$W_{B\to C} = \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Se empezará evaluando el valor del diferencial de trabajo dW efectuado en un diferencial de desplazamiento $d\vec{s}$.

La fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ y el vector diferencial de desplazamiento $d\vec{s}$ tienen sentido opuesto, por lo que $dW_{Fr} = \vec{F}_r \cdot d\vec{s} = F_r\,ds\cos 180° = -F_r\,ds$.
Integrando entre B y C:

$$W_{Fr} = -\int_B^C F_r\,ds$$

Como el módulo de $\vec{F}_r$ es constante $F_r = 58{,}8$ N en todo el recorrido, lo sacaremos fuera de la integral:

$$W_{Fr} = -F_r \int_B^C ds = -F_r\,\widehat{BC} = -F_r \phi R$$

Donde $\widehat{BC}$ indica la longitud del arco de circunferencia entre B y C. Sustituyendo por los valores numéricos, y recordando que las unidades de los ángulos en el SI son los radianes:

$$W_{Fr} = -58{,}8\text{ N}\,\frac{\pi}{2}\,6{,}0\text{ m} = -554\text{ J}$$

Sustituyendo en (1):

$$W_{Fr} = E_{cf} - E_{ci} + U_f - U_i; \qquad -554\text{ J} = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh_C - mgh_B$$

Teniendo en cuenta que $h_C = h_B$ y despejando v_C:

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - 554\text{ J}; \quad v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2 \cdot 554\text{ J}}{m}} = \sqrt{(20{,}6\text{ m/s})^2 - \frac{2 \cdot 554\text{ J}}{40\text{ kg}}} = 19{,}9\text{ m/s}$$

El trineo pasará por C a $v_C = 20$ m/s.

5.13. Una fuerza conservativa que actúa en dirección horizontal viene dada por la siguiente expresión, en unidades del SI:

$$F = 4x^3$$

a) Calcular el trabajo realizado por esta fuerza entre $x = 1$ m y $x = 3$ m.

b) Determinar la expresión de la energía potencial asociada a esta fuerza tomando el origen de energías en $x = 0$.

c) Calcular la variación de energía potencial entre $x = 1$ m y $x = 3$ m.

Solución

a) Debido a que la fuerza depende de la coordenada x, y por lo tanto no es constante, se calculará el trabajo utilizando la expresión integral:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Al ser la fuerza conservativa, el trabajo que realiza no depende del camino seguido para ir de un punto al otro, por lo que podemos escoger cualquier recorrido que nos lleve de $x = 1$ m hasta $x = 3$ m. Para simplificar el cálculo, el camino elegido es la línea recta que une los dos puntos. En consecuencia:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F\, ds = \int_1^3 4x^3\, dx = x^4\Big]_1^3 = \left[(3{,}0)^4 - (1{,}0)^4\right] = 80 \text{ J}$$

b) La energía potencial se determinará integrando la fuerza conservativa cambiada de signo, y escogiendo la constante de integración apropiada de acuerdo con el origen de potencial elegido.

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int F\, ds = -\int 4x^3\, dx = -x^4 + C \qquad (1)$$

El enunciado indica que $U\,(x = 0)$, por lo que sustituyendo en (1):

$$U\,(x = 0) = 0 = -0^4 + C$$

De donde se sigue que $C = 0$, y la expresión de la energía potencial finalmente queda:

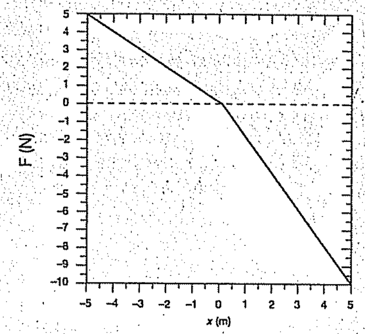
$$U\,(x) = -x^4 \qquad (2)$$

c) La variación de energía potencial entre $x = 1$ m y $x = 3$ m se obtendrá sustituyendo en la expresión (2):

$$\Delta U = U\,(x = 3) - U\,(x = 1) = -3^4 - (-1^4) = -80 \text{ J}$$

Se comprueba que la variación de energía potencial entre dos puntos es igual al trabajo realizado por la fuerza conservativa entre estos dos puntos, cambiado de signo.

5.14. Sobre una partícula de 0,10 kg actúa una fuerza conservativa que varía con la distancia x, según indica la gráfica adjunta.



a) Determinar y representar gráficamente la energía potencial asociada a esta fuerza, considerando el origen de energía en el punto $x = 3{,}0$ m.

b) Describir el movimiento que realizará la partícula cuando se la deposite en el origen de coordenadas, moviéndose con $\vec{v} = -1{,}0$ m/s $\hat{i}$.

Solución

a) De la gráfica se deduce que la fuerza varía linealmente con la distancia según la expresión:

$$F(x) = \begin{cases} -2x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

La expresión de la energía potencial se obtiene integrando la fuerza.

Para $x \geq 0$ $F(x) = -2x \Rightarrow U\,(x) = -\int F(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + C_1$. La constante de integración se determinará imponiendo la condición de que el origen de potencial se encuentra en $x = 3$ m: $U\,(x = 3 \text{ m}) = 0 = 3^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = -9$ J.

Así pues para $x \geq 0$ $U\,(x) = x^2 - 9$ (1).

Para $x \leq 0$ $F(x) = -x \Rightarrow U(x) = -\int F(x)\, dx = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C_2$ (2). La constante de integración se determinará imponiendo la condición de continuidad de la energía potencial, es decir, en el punto $x = 0$.

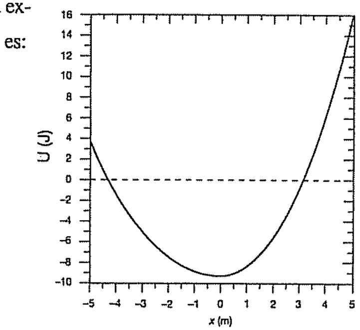
El valor de la energía potencial en $x = 0$ calculado con la expresión (1) deberá ser el mismo que el calculado con (2), esto es:

$$U\,(0) = 0^2 - 9 = \frac{1}{2}0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -9 \text{ J}$$

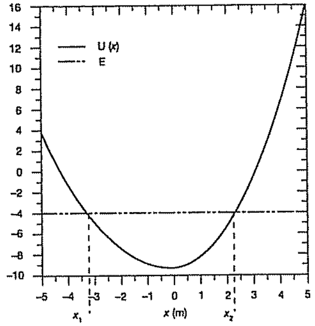
quedando finalmente para $x \leq 0$ $U(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9$.

La representación gráfica de la energía potencial es:

$$U(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 9 & x \leq 0 \end{cases}$$



b) Si en $x = 0$ la partícula tiene velocidad $\vec{v} = -10$ m/s $\hat{i}$, su energía cinética será $E_C(x = 0) = \frac{1}{2}0{,}1$ kg $(10 \text{ m/s})^2 = 5{,}0$ J, y su energía potencial $U(x = 0) = -9$J. La energía mecánica de la partícula $E_M = E_C + U = (5 - 9)$ J $= -4$ J se mantendrá constante porque no actúan fuerzas no conservativas.



En la siguiente gráfica se sobreponen las curvas de energía potencial y energía mecánica de la partícula.

Se observa que existen dos puntos de intersección x_1 y x_2 de la curva de energía potencial con la de energía mecánica.

La coordenada x_1 es aquella para la que:

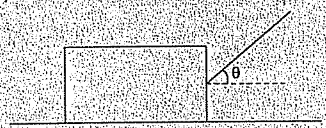
$$U(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 - 9 = -4{,}0 \text{ J} \Rightarrow x_1 = -3{,}2 \text{ m}$$

y x_2 cumplirá que:

$$U(x_2) = x_2^2 - 9 = -4{,}0 \text{ J} \Rightarrow x_2 = 2{,}2 \text{ m}$$

En consecuencia, la partícula, una vez situada en el origen de coordenadas, avanzará hacia la izquierda hasta llegar a un punto $x_1 = -3{,}2$ m. En dicho punto la energía cinética de la partícula se hace cero, y la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es hacia la derecha. Esto provoca que la partícula invierta el signo de la velocidad y se desplace hacia la derecha hasta llegar al punto $x_2 = 2{,}2$ m donde la energía cinética se hace de nuevo cero. En este punto se vuelve a invertir el sentido del movimiento. Por tanto, el movimiento de la partícula estará confinado entre $-3{,}2 \text{ m} < x < 2{,}2$ m.

5.15. Un niño arrastra por el suelo una caja de $m = 1{,}5$ kg, tirando de un cordel de masa despreciable inclinado un ángulo $\theta = 50°$. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es 0,30.



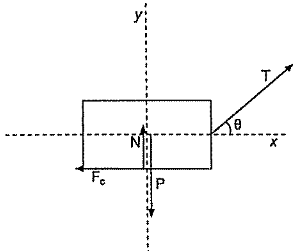
Determinar:

a) La potencia que desarrolla la fuerza con que el niño tira de la caja cuando la arrastra a velocidad constante $v = 0{,}60$ m/s.

b) La potencia que desarrolla la fuerza con que el niño tira de la caja, en el instante en que ésta se mueve con velocidad $v = 0{,}60$ m/s, y aceleración en dirección horizontal $a = 0{,}20$ m/s².

Solución

En el siguiente diagrama se representan las fuerzas que actúan sobre la caja:



a) Cuando la caja se mueve a velocidad constante:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - mg + T \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{1}$$

$$\xrightarrow{+} \sum_i F_{ix} = 0 \qquad T \cos\theta - F_c = 0; \quad T\cos\theta - \mu_c N = 0 \tag{2}$$

Despejando N de la ecuación (2) $N = \dfrac{T\cos\theta}{\mu_c}$ y sustituyendo en (1):

$$\frac{T\cos\theta}{\mu_c} - mg + T\operatorname{sen}\theta = 0$$

despejando T de la expresión anterior, y sustituyendo por los valores numéricos:

$$T = \frac{mg}{\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\cos\theta}{\mu_c}} = \frac{1{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\operatorname{sen} 50° + \dfrac{\cos 50°}{0{,}30}} = 5{,}05 \text{ N}$$

La potencia desarrollada por T es:

$$P = \vec{T}\cdot\vec{v} = Tv\cos\theta = 5{,}05 \text{ N } 0{,}60 \text{ m/s} \cos 50° = 1{,}95 \text{ W}; \quad P = 2{,}0 \text{ W}$$

b) Cuando la caja acelera:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = 0 \qquad N - mg + T\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{3}$$

$$\xrightarrow{+} \sum_i F_{ix} = ma_x \qquad T\cos\theta - F_c = ma \qquad T\cos\theta - \mu_c N = ma \tag{4}$$

Despejando N de la ecuación (4) $N = \dfrac{T\cos\theta - ma}{\mu_c}$ y sustituyendo en (3):

$$\frac{T\cos\theta - ma}{\mu_c} - mg + T\operatorname{sen}\theta = 0$$

despejando T:

$$T = \frac{mg + \dfrac{ma}{\mu_c}}{\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\cos\theta}{\mu_c}} = \frac{1{,}5 \text{ kg}\cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 + \dfrac{1{,}5 \text{ kg}\cdot 0{,}20 \text{ m/s}^2}{0{,}30}}{\operatorname{sen} 50° + \dfrac{\cos 50°}{0{,}30}} = 5{,}40 \text{ N}$$

La potencia que en este caso desarrolla T es:

$$P = \vec{T}\cdot\vec{v} = Tv\cos\theta = 5{,}40 \text{ N } 0{,}60 \text{ m/s} \cos 50° = 2{,}08 \text{ W} \qquad P = 2{,}1 \text{ W}$$

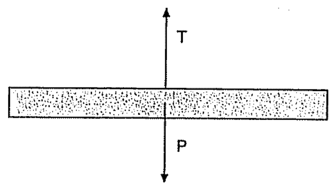
5.16. Una grúa sube una viga de masa $m = 750$ kg. Determinar la potencia y el trabajo realizado por el cable que tira de la viga cuando:

a) La viga asciende hasta una altura $h = 20$ m a velocidad constante $v = 0{,}80$ m/s.

b) La viga asciende hasta una altura $h = 20$ m con aceleración constante $a = 0{,}50$ m/s² y velocidad inicial cero.

Solución

Las fuerzas que actúan sobre la viga son la tensión y el peso:



a) Cuando la viga asciende a velocidad constante, la tensión del cable, en módulo, será igual al peso de la viga $T = mg$. El trabajo realizado por la tensión en la ascensión será:

$$W = \vec{T} \cdot \vec{h} = Th = mgh = 750 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} = 147 \text{ kJ}; \quad W = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ kJ}$$

La potencia desarrollada por el cable es:

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = Tv = mgv = 750 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}80 \text{ m/s} = 5{,}88 \text{ kW}; \quad P = 5{,}9 \text{ kW}$$

b) Cuando la viga asciende con aceleración constante, la tensión del cable se obtiene haciendo:

$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad T - mg = ma \Rightarrow T = ma + mg$$

El trabajo realizado en la ascensión es:

$$W = \vec{T} \cdot \vec{h} = Th = m\,(g + a)\,h = 750 \text{ kg} \cdot (9{,}81 \text{ m/s}^2 + 0{,}50 \text{ m/s}^2) \cdot 20 \text{ m} = 155 \text{ kJ}$$

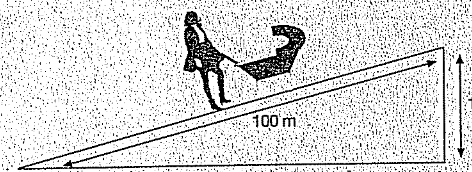
$$W = 160 \text{ kJ}$$

En este caso la potencia desarrollada por el cable no es constante, porque la velocidad que lleva la viga depende del tiempo $v\,(t) = at$:

$$P\,(t) = \vec{T} \cdot \vec{v} = Tv\,(t) = m\,(g + a)\,at = 750 \text{ kg} \cdot (9{,}8 \text{ m/s}^2 + 0{,}5 \text{ m/s}^2) \cdot 0{,}50 \text{ m/s}^2 \cdot t = 3{,}87 \frac{\text{kW}}{\text{s}} \cdot t$$

$$P\,(t) = 3{,}9 \frac{\text{kW}}{\text{s}} \cdot t$$

5.17. Una madre empuja el carrito de su bebé a velocidad constante $v = 0{,}75$ m/s, por una calle inclinada un 15%. Determinar la potencia desarrollada por la madre sobre el carrito cuando sube y cuando baja por esta calle. Estimar la fuerza de fricción del carrito como un 5% de su peso. La masa del carrito con el bebé es de 18 kg.

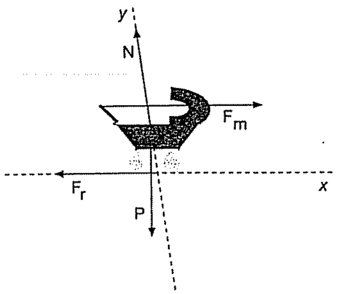


Solución

El peso del conjunto formado por el bebé y el carrito es $P = mg = 18 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 176$ N.

La fuerza de fricción $F_r = 0{,}05 \cdot P = 8{,}80$ N.

La inclinación del plano: sen $\theta = 15/100$.



Cuando el carrito sube por la calle las fuerzas que actúan sobre él son: el peso P, la fuerza normal N, la fuerza de rozamiento F_r, y la fuerza desarrollada por la madre F_m.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow F_m - P \text{ sen } \theta - F_r = 0$$

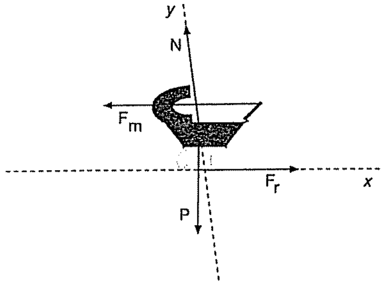
Despejando F_m:

$$F_m = P \text{ sen } \theta + F_r = 176 \text{ N} \cdot \frac{15}{100} + 8{,}80 \text{ N} = 35{,}2 \text{ N}$$

La potencia desarrollada por esta fuerza es:

$$P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = F_m \cdot v \cdot \cos 0° = 35{,}2 \text{ N} \cdot 0{,}75 \text{ m/s} = 26{,}4 \text{ W}; \quad P = 26 \text{ W}$$

El diagrama de fuerzas que actúan sobre el conjunto en el trayecto de bajada es:



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow -F_m - P \text{ sen } \theta + F_r = 0$$

Despejando F_m:

$$F_m = F_r - P \text{ sen } \theta = 8{,}82 \text{ N} - 176 \text{ N} \cdot \frac{15}{100} = -17{,}6 \text{ N}$$

El signo menos nos indica que F_m tiene sentido contrario al supuesto en el dibujo. Es decir, la madre no empujará el carro, sino que tirará de él.

La potencia desarrollada por la madre será:

$$P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = F_m \cdot v \cdot \cos 180° = -17{,}6 \text{ N} \cdot 0{,}75 \text{ m/s} = -13{,}2 \text{ W}; \quad P = -13 \text{ W}$$

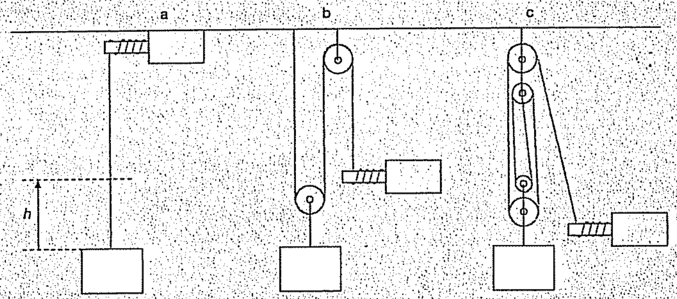
5.18. Un nadador desarrolla una potencia P para avanzar por el agua de una piscina a velocidad constante v. Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento del nadador con el agua es proporcional al cuadrado de la velocidad $F_r = -kv^2$, siendo k una constante, determinar la potencia que deberá desarrollar para duplicar su velocidad en el agua.

Solución

La fuerza con que se propulsará el nadador para avanzar a velocidad constante deberá contrarrestar la fricción con el agua. Cuando el nadador lleva velocidad v, la fuerza que desarrolla es $F = kv^2$ y la potencia asociada a esta fuerza $P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = kv^3$.

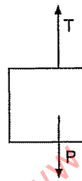
Si el nadador nada a $v' = 2v$, la fuerza necesaria para vencer la fricción del agua es $F' = kv'^2 = 4kv^2$ y la potencia que deberá desarrollar $P' = \vec{F}' \cdot \vec{v}' = F'v' = 4\,kv^2\,2v = 8\,kv^3$ será ocho veces superior a la inicial $P' = 8P$.

5.19. Se están estudiando tres soluciones (a, b y c de la figura) para subir un bloque de 250 kg a velocidad constante de 2,0 m/s hasta una altura $h = 5{,}0$ m. Para ello se dispone de un motor que tirará de una cuerda unida al bloque. Determinar la tensión de la cuerda y la potencia mecánica desarrollada por el motor en las tres situaciones representadas en la figura.



Solución

En la solución *a)* la tensión de la cuerda deberá ser igual al peso del bloque.

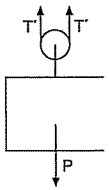


$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 0; \qquad T - mg = 0; \qquad T = mg = 2{,}45 \text{ kN}$$

La potencia mecánica desarrollada por el motor será:

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = 2{,}45 \text{ kN } \; 2{,}0 \text{ m/s} = 4{,}9 \text{ kW}$$

En la solución *b)* dado que tiran del bloque dos tramos de cuerda, la tensión será la mitad del pe del bloque.



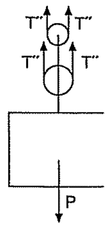
$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad 2T' - mg = 0 \qquad T' = \frac{mg}{2} = 1{,}23 \text{ kN}$$

Para levantar al bloque 5,0 m el motor deberá enrollar 10 m de cuerda, por lo que la velocidad a la que el motor enrolla la cuerda será 2 veces la velocidad del bloque, es decir 4,0 m/s.

En consecuencia, la potencia mecánica desarrollada por el motor será la misma que en el apartado anterior.

$$P' = \vec{T}' \cdot \vec{v}' = 1{,}23 \text{ kN } \; 4{,}0 \text{ m/s} = 4{,}9 \text{ kW}$$

En la solución *c)* tiran del bloque cuatro tramos de la misma cuerda, por tanto la tensi será:



$$+\uparrow \quad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad 4T'' - mg = 0 \qquad T'' = \frac{mg}{4} = 0{,}61 \text{ kN}$$

En este caso el motor deberá enrollar 20 m de cuerda para que el bloque suba los 5,0 m. Por lo que, la velocidad a la que enrollará la cuerda será $v'' = 8{,}0$ m/s, y la potencia mecánica desarrollada será:

$$P'' = \vec{T}'' \cdot \vec{v}'' = 0{,}61 \text{ kN } \; 8{,}0 \text{ m/s} = 4{,}9 \text{ kW}$$

CUESTIONES

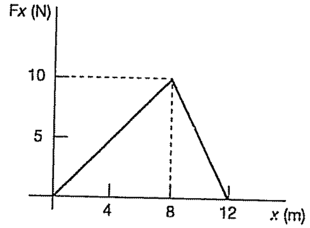
5.1. Sobre una partícula situada en el punto $x = 2{,}0$ m actúa una fuerza $\vec{F} = -10$ N/m $x\,\hat{i}$. El trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se desplaza desde el punto $x = 2{,}0$ m hasta $x = 1{,}0$ m es:

a) -30 J *b)* -15 J *c)* 10 J *d)* 15 J

5.2.1. La fuerza resultante que actúa sobre un objeto es paralela al eje x. Esta fuerza varía con la coordenada x según indica la gráfica adjunta.

El trabajo realizado por esta fuerza cuando el objeto se mueve desde $x = 0$ a $x = 8{,}0$ m, es:

a) 80 J
b) 60 J
c) 30 J
d) 40 J



5.2.2. El trabajo realizado por esta fuerza cuando el objeto se mueve desde $x = 8{,}0$ m a $x = 12$ m, es:

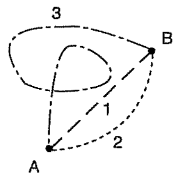
a) 20 J *b)* 80 J *c)* 30 J *d)* 10 J

5.2.3. Si la energía cinética del objeto a $x = 8{,}0$ m es de 20 J, la energía cinética de éste en $x = 12$ m, es:

a) 0 *b)* -20 J *c)* 20 J *d)* 40 J

5.3. Entre los puntos A y B actúa una fuerza conservativa, F. Un objeto se puede desplazar desde A hasta B siguiendo cualquiera de los tres caminos que indica la figura. Sean W_1, W_2 y W_3 los trabajos realizados por la fuerza F a través de los caminos 1, 2 y 3 respectivamente. Es correcto afirmar que:

a) $W_1 > W_2 > W_3$
b) $W_1 < W_2 = W_3$
c) $W_1 < W_2 < W_3$
d) $W_1 = W_2 = W_3$



5.4.1. Una grúa eleva un bloque de 400 kg de masa. La tensión del cable que sujeta el bloque es de 5 000 N.

El trabajo realizado por el peso desde que el bloque pasa de altura cero a una altura de 10 m es:

a) -50 kJ *b)* -39 kJ *c)* 20 kJ *d)* 50 kJ

5.4.2. La variación de energía cinética que ha experimentado el bloque es:

a) 11 kJ *b)* -39 kJ *c)* -11 kJ *d)* 50 kJ

5.5. La variación de energía potencial que experimenta un objeto que se mueve entre dos puntos es igual a:

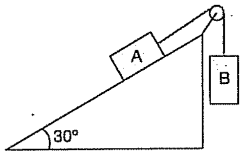
a) El trabajo realizado entre estos dos puntos por una fuerza cualquiera, que actúa sobre el objeto.

b) El trabajo realizado entre estos dos puntos por una fuerza no conservativa, que actúa sobre el objeto, cambiado de signo.

c) El trabajo realizado entre estos dos puntos por una fuerza cualquiera, que actúa sobre el objeto, cambiado de signo.

d) El trabajo realizado entre estos dos puntos por una fuerza conservativa, que actúa sobre el objeto, cambiado de signo.

5.6.1. El peso de los bloques A y B de la figura es igual a 10 N. El bloque A se desliza hacia arriba por el plano inclinado. Despreciando los efectos de la fricción, determinar:



La tensión de la cuerda:

a) 5,0 N *b)* 10 N *c)* 7,5 N *d)* 2,5 N

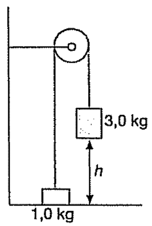
5.6.2. El trabajo realizado por la tensión cuando el bloque A avanza 2,0 m sobre el plano inclinado.

a) 15 J *b)* 5,0 J *c)* 20 J *d)* 10 J

5.6.3. El trabajo realizado por la fuerza peso del bloque A, cuando el bloque A avanza 2,0 m sobre el plano inclinado.

a) 5,0 J *b)* −10 J *c)* −5,0 J *d)* −7,5 J

5.7. El bloque de 3,0 kg de la figura se libera cuando se encuentra a una altura h del suelo. Despreciando la masa de la polea y de la cuerda, y también los efectos de la fricción. La velocidad con que llegará al suelo es:



a) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

b) $v = \sqrt{g \cdot h}$

c) $v = \sqrt{6 \cdot g \cdot h}$

c) $v = \sqrt{g \cdot h/3}$

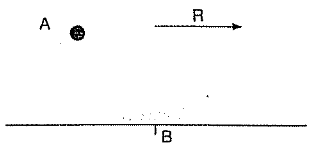
5.8. Una piedra de 1,0 N se deja en libertad con velocidad inicial cero en un punto A situado en el extremo de una taza semiesférica de radio $R = 0{,}10$ m. El trabajo realizado por la fricción cuando la piedra baja de A a B es de −0,050 J. La energía cinética de la piedra en el punto B es:

a) 0,05 J

b) 0,10 J

c) 0,15 J

d) 0



5.9. Una fuerza conservativa viene dada por la siguiente expresión: $\vec{F} = -4{,}0\,x^3\,\hat{i}$ (en unidades del SI). Es correcto afirmar que:

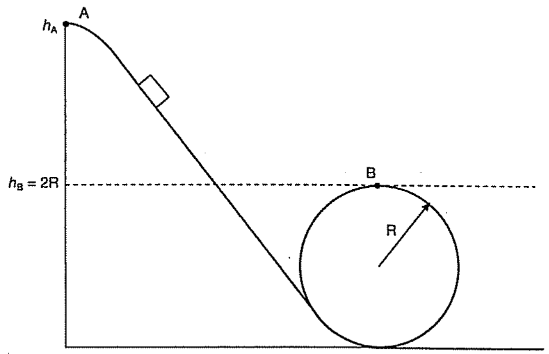
a) El trabajo realizado por esta fuerza entre $x = 1{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m es igual a 4,0 J.

b) La variación de energía potencial asociada a esta fuerza entre $x = 1{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m es igual a −28 J.

c) El trabajo realizado por esta fuerza entre $x = 1{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m es igual a 28 J.

d) La variación de energía potencial asociada a esta fuerza entre $x = 1{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m es igual a 15 J.

5.10.1. Un bloque de masa m sale de un punto A situado a una altura h_A y describe un *loop* de radio R, según indica la figura. Considerar despreciables los efectos de la fricción.



La velocidad mínima con que debe pasar por el punto B para realizar el *loop* es:

a) 0 *b)* $v = Rg$ *c)* $v = \sqrt{2Rg}$ *d)* $v = \sqrt{Rg}$

5.10.2. La altura mínima $h_{A\,mín}$ de la cual debe partir para poder realizar el *loop* es:

a) $2R$ *b)* $3R$ *c)* $5R/2$ *d)* $3R/2$

5.11.1. Sobre una partícula de 30 g actúa una única fuerza que además es conservativa, y viene dada por la siguiente expresión: $\vec{F} = 4{,}0x\hat{i}$ (en unidades del SI). La energía mecánica de la partícula es 5,0 J. Considerando el origen de energía potencial en $x = 2{,}0$ m, la expresión de la energía potencial en función de x es:

a) $U(x) = -2{,}0x^2$

b) $U(x) = 2{,}0x^2 - 8{,}0$

c) $U(x) = 2{,}0x^2$

d) $U(x) = -2{,}0x^2 + 8{,}0$

5.11.2. El trabajo realizado por esta fuerza entre $x = 4{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m es:

a) −24 J *b)* 32 J *c)* 8,0 J *d)* −8,0 J

5.11.3. La energía cinética de la partícula en $x = 3{,}0$ m es:

a) 23 J *b)* 13 J *c)* 15 J *d)* 5 J

5.11.4. Los puntos en los que podemos encontrar la partícula, teniendo en cuenta que su energía mecánica es de 5,0 J, son aquellos que cumplen:

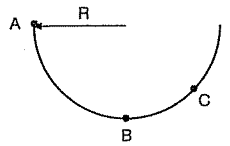
a) $x > 0$

b) $x < -1{,}2$ m y $x > 1{,}2$ m

c) $x < -2{,}5$ m y $x > 2{,}5$ m

d) $x > 2{,}0$ m

5.12.1. Un móvil de masa m baja por un carril circular de radio R. El móvil parte del reposo en el punto A. Si se desprecian los efectos del rozamiento:



La velocidad del móvil en el punto más bajo de la trayectoria (punto B) es:

a) mgR *b)* $2mgR$ *c)* $\sqrt{2gR}$ *d)* $\sqrt{4gR}$

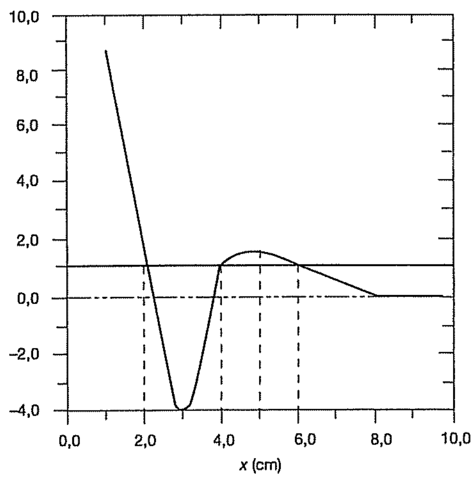
5.12.2. La fuerza normal entre el carril y el móvil en el punto B es:

a) mg *b)* $2mg$ *c)* mgR *d)* $3mg$

5.13. El origen de la energía potencial asociada a una fuerza conservativa se toma en un punto O. Considerando este origen, la energía potencial en un punto A es $U_A = 10$ J y en un punto B $U_B = -5{,}0$ J. Cuando el origen de energía potencial se toma en otro punto O' la energía potencial en el punto A es $U_A = 2{,}0$ J. La energía potencial en B será:

a) -17 J *b)* 17 J *c)* -13 J *d)* $-3{,}0$ J

5.14.1. En la gráfica de la figura se representa la curva de energía potencial de una partícula.



Los puntos de equilibrio estable son:

a) $x = 2{,}0$ cm y $x = 4{,}0$ cm

b) $x = 3{,}0$ m y $x = 5{,}0$ cm

c) $x = 2{,}0$ cm; $x = 4{,}0$ cm y $x = 6{,}0$ cm

d) $x = 3{,}0$ cm

5.14.2. Los puntos de equilibrio inestable son:

a) $x = 2{,}0$ cm y $x = 4{,}0$ cm

b) $x = 5{,}0$ cm

c) $x = 2{,}0$ cm; $x = 4{,}0$ cm y $x = 6{,}0$ cm

d) $x = 3{,}0$ cm

5.14.3. Los puntos de equilibrio indiferente son:

a) $x > 6{,}0$ m *b)* $x > 8{,}0$ m *c)* $x = 3{,}0$ m *d)* $x = 2{,}0$ m

5.14.4. Si la energía mecánica de la partícula es de 1,0 J (recta horizontal de la gráfica), se podrá encontrar esta partícula en:

a) $4{,}0$ m $< x < 6{,}0$ m

b) Solamente con $x > 6{,}0$ m.

c) Solamente con $2{,}0$ m $< x < 4{,}0$ m.

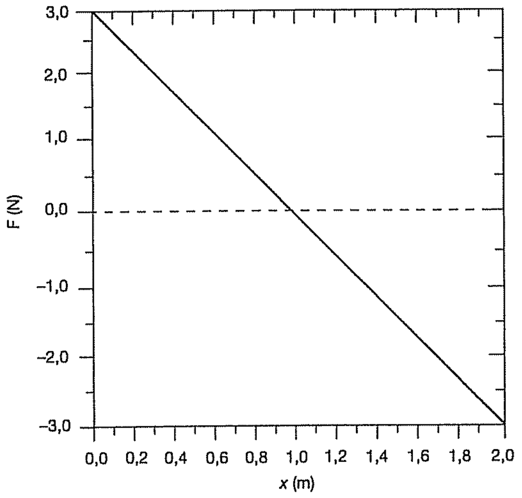
d) $2{,}0$ m $< x < 4{,}0$ m y $x > 6{,}0$ m

SOLUCIONES

5.1. *d)*
5.2.1. *d)*
5.2.2. *a)*
5.2.3. *d)*
5.3. *d)*
5.4.1. *b)*
5.4.2. *a)*
5.5. *d)*
5.6.1. *c)*
5.6.2. *a)*
5.6.3. *b)*
5.7. *b)*
5.8. *a)*
5.9. *d)*
5.10.1. *d)*
5.10.2. *c)*
5.11.1. *d)*
5.11.2. *a)*
5.11.3. *c)*
5.11.4. *b)*
5.12.1. *c)*
5.12.2. *d)*
5.13. *c)*
5.14.1. *d)*
5.14.2. *b)*
5.14.3. *b)*
5.14.4. *d)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Un bloque de 1,0 kg llega al origen de coordenadas con velocidad $\vec{v} = 2{,}0$ m/s $\hat{i}$. La fuerza resultante que actúa sobre el bloque tiene dirección horizontal y se representa en la gráfica adjunta.**



a) Calcular el trabajo realizado por esta fuerza entre $x = 0{,}0$ y $x = 1{,}0$ m.

b) Determinar la energía cinética del bloque en $x = 1{,}0$ m.

c) El trabajo realizado por la fuerza entre $x = 0{,}0$ y $x = 2{,}0$ m.

d) La velocidad del bloque en $x = 2{,}0$ m.

Sol.: a) 1,5 J; *b)* 3,5 J; *c)* 0; *d)* $\vec{v} = 2{,}0$ m/s $\hat{i}$

2 **Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = 6{,}9xy\,\hat{i}$ que actúa sobre un cuerpo que se desplaza desde el origen de coordenadas al punto A de coordenadas $\vec{r}_A = 2{,}0\,\hat{i} + 8{,}0\,\hat{j}$, cuando el desplazamiento se efectúa por las siguientes trayectorias:**

a) Siguiendo la recta $y = 4{,}0\,x$.

b) Siguiendo la curva $y = x^3$.

c) A la vista de los resultados anteriores, ¿es esta fuerza conservativa?

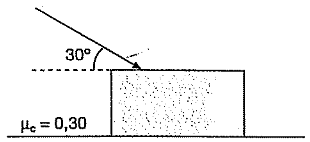
Todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI.

Sol.: a) 64 J; *b)* 38 J; *c)* No

3 **Una pelota se lanza con velocidad inicial de 30 km/h y con una inclinación de 30° con la horizontal. Calcular la altura máxima a la que llega despreciando la fricción con el aire. Resolver el problema con consideraciones energéticas.**

Sol.: 0,88 m

4 **Un niño arrastra por el suelo un baúl lleno de juguetes, 6,0 m en línea recta. Para ello, empuja el baúl con una fuerza de 75 N inclinada 30° con la horizontal. La masa del baúl es de 18 kg y el coeficiente de rozamiento cinético entre el baúl y el suelo 0,30.**

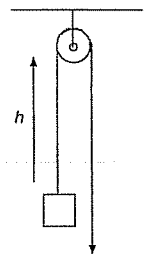


a) Calcular el trabajo realizado por el niño.

b) Determinar la variación de energía cinética que experimenta el baúl.

Sol.: a) $3{,}9 \cdot 10^2$ J; *b)* 4,4 J

5 **Un peón de la construcción utiliza una polea para levantar hasta una altura de 4,0 m un saco de arena de 35 kg elevándolo a una velocidad constante de 0,4 m/s. Este saco tiene un agujero por lo que pierde arena a un ritmo constante de 0,70 kg/s. Considerando la fricción y las masas de cuerda y polea despreciables, calcular:**



a) El trabajo que realizaría el peón para levantar el saco si no estuviera agujereado.

b) El trabajo que el peón realiza para levantar el saco agujereado.

Sol.: a) 1,4 kJ; *b)* 1,2 kJ

6 **Un péndulo simple de longitud 1,0 m y masa 0,15 kg se suelta con velocidad cero desde un ángulo de 30° y se deja evolucionar libremente. Despreciando los efectos de la fricción, determinar el trabajo realizado por la tensión y el peso en un periodo de la oscilación.**

Sol.: $W_T = 0$; $W_P = 0$

7 **Un péndulo simple de longitud 2,0 m y masa 0,20 kg se suelta con velocidad cero desde un ángulo de 45° y se deja evolucionar libremente. Despreciando los efectos de la fricción, determinar:**

a) La velocidad con que pasa por la vertical.

b) La tensión de la cuerda cuando pasa por la vertical.

Sol.: a) 3,4 m/s; *b)* 3,1 N

8 **Un péndulo simple de longitud L y masa m cuelga del punto A. El péndulo se suelta con velocidad inicial cero desde un ángulo de 90° con la vertical. Cuando el péndulo pasa por la vertical el hilo tropieza con un clavo situado en un punto B. Hallar la mínima distancia entre A y B para la cual el péndulo describe giros completos entorno a B.**

Sol.: $d_{AB} = 3\,L/5$

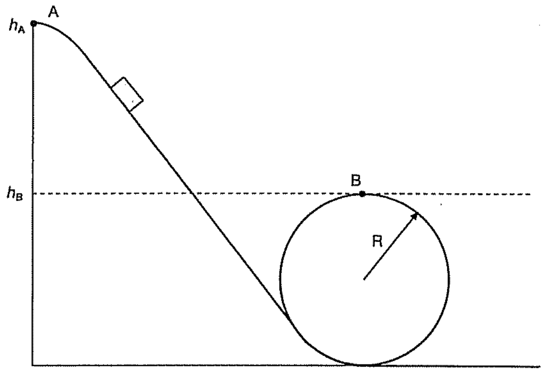
9 **Un bloque de 1,0 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado 45°. El bloque tarda un tiempo t_1 en alcanzar la altura máxima y un tiempo $t_2 = 2\,t_1$ en descender hasta el pie del plano. Calcular:**

a) El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano.

b) El trabajo realizado por la fricción en el proceso de subida y bajada.

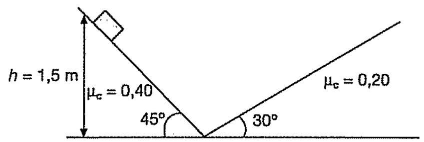
Sol.: a) 0,60; *b)* −37,5 J

10 **En una montaña rusa una vagoneta de 150 kg sale del punto A situado a una altura $h_A = 30$ m con velocidad inicial cero. Cuando llega al nivel del suelo realiza un *loop* de radio $R = 6{,}0$ m. Calcular la velocidad con que llega al punto B de altura $h_B = 12$ m y el valor de la normal en dicho punto. Despreciar los efectos de la fricción.**



Sol.: $v_B = 19$ m/s; $N_B = 7{,}4$ kN

11 **El bloque de la figura cae desde una altura de 1,5 m por un plano inclinado 45°. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,40. Cuando el bloque llega al pie del plano sube por el plano inclinado 30°, con $\mu_c = 0{,}20$.**

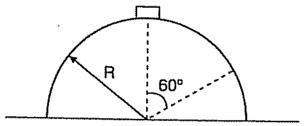


a) Determinar la velocidad con que el bloque llega al pie del plano.

b) Calcular la altura máxima que el bloque alcanza en el plano inclinado 30°.

Sol.: a) 4,2 m/s; *b)* 0,67 m

12 **Un cuerpo de 0,30 kg desciende por la superficie de una esfera de radio $R = 1{,}5$ m. El cuerpo parte de la vertical con velocidad inicial cero. Se observa que cuando el ángulo con la vertical alcanza los 60° el cuerpo pierde el contacto con la superficie de la esfera y cae al suelo. Determinar:**

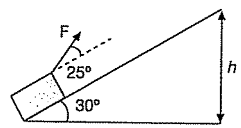


a) La velocidad con que el cuerpo abandona la superficie de la esfera.

b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la superficie durante la caída.

Sol.: a) 2,7 m/s; *b)* −1,1 J

13 **Se pretende subir un bloque de 2,0 kg a una altura $h = 5{,}0$ m utilizando un plano inclinado 30°. Se tira del bloque con una fuerza $F = 15$ N inclinada 25° con la superficie del plano. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,20. Calcular:**



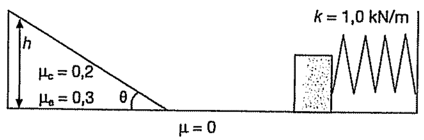
a) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque en la ascensión.

b) El trabajo realizado por la fuerza resultante en la ascensión.

c) La variación de energía cinética que experimentará el bloque.

Sol.: a) $W_F = 1{,}4 \cdot 10^2$ J; $W_P = -98$ J; $W_N = 0$; $W_{Fc} = -21$ J
b) $W_{F\,res} = 17$ J
c) $\Delta E_c = 17$ J

14 **Un bloque de 2,3 kg está sobre un plano horizontal sin rozamiento comprimiendo 8,0 cm un muelle de constante recuperadora 1,0 kN/m. Cuando se libera el bloque avanza por el plano horizontal y finalmente sube por un plano inclinado $\theta = 30°$. Los coeficientes de rozamiento cinético y estático son 0,20 y 0,30 respectivamente. Determinar la altura h que el bloque alcanzará sobre el plano inclinado. ¿Permanecerá el bloque en reposo una vez haya alcanzado dicha altura?**



Sol.: $h = 11$ cm; el bloque no permanecerá en reposo sobre el plano inclinado.

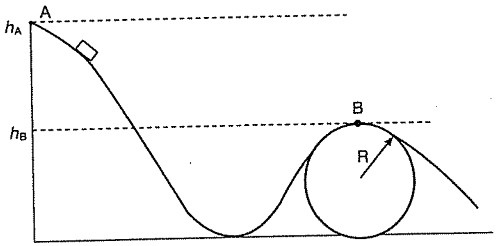
15 **Una fuerza conservativa viene dada por la siguiente expresión $F(x) = -6{,}0x^2 + 1{,}0$, (en unidades del SI).**

a) Hallar la expresión de la energía potencial asociada a esta fuerza considerando:
   *a.*1) El origen de energías en $x = 0{,}0$ m.
   *a.*2) El origen de energías en $x = 2{,}0$ m.

b) Calcular la variación de energía potencial entre $x = 1{,}0$ m y $x = 3{,}0$ m.

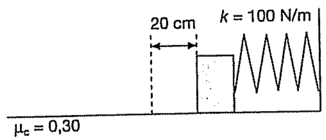
*Sol.: a.*1) $U(x) = 2{,}0\,x^3 - 1{,}0\,x$; *a.*2) $U(x) = 2{,}0\,x^3 - 1{,}0\,x - 14$;
b) $U(x = 3{,}0\text{ m}) - U(x = 1{,}0\text{ m}) = 50$ J

16 **Un niño de 28 kg baja por la ladera de una colina nevada sobre de un trineo de 10 kg. Sale del punto A que se encuentra a una altura h_A con velocidad inicial cero. Determinar la altura máxima $h_{A\,\text{máx}}$ para la cual el trineo puede pasar por el punto B situado a $h_B = 5{,}0$ m sin perder el contacto con el suelo. El radio de curvatura R es de 3,0 m y la fricción a lo largo del recorrido despreciable.**



Sol.: $h_{A\,\text{máx}} = 6{,}5$ m

17 **Un bloque de 1,3 kg descansa sobre un plano horizontal, comprimiendo 20 cm un muelle de constante recuperadora 100 N/m. Cuando se libera el bloque, éste avanza sobre el plano hasta detenerse. Teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,30. Determinar:**

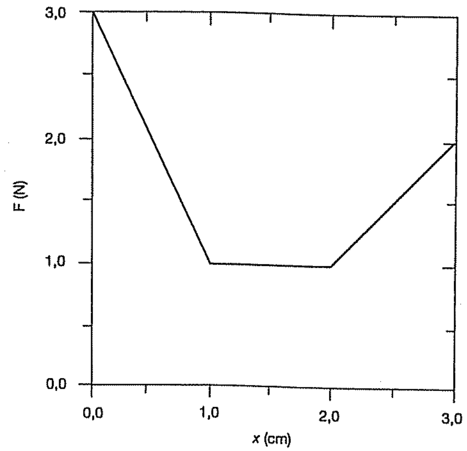


a) La velocidad con que el bloque abandona el muelle.

b) La distancia total recorrida por el bloque sobre el plano hasta pararse.

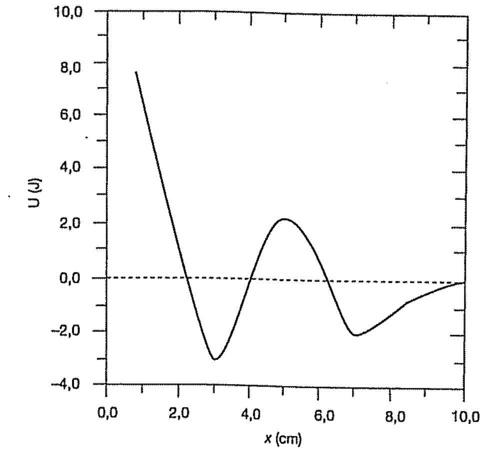
Sol.: a) 1,4 m/s; *b)* 32 cm

18 **En la siguiente gráfica se representa una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula en la dirección del eje x. Determinar la expresión de la energía potencial asociada a esta fuerza, considerando el origen de energías en $x = 1{,}5$ m.**



Sol.: $U(x) = \begin{cases} 1{,}0x^2 - 3{,}0x + 2{,}5 & 0 \le x \le 1 \\ -1{,}0x + 1{,}5 & 1 \le x \le 2 \\ -0{,}50x^2 + 1{,}0x - 0{,}50 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

19 **En la gráfica adjunta se muestra la curva de energía potencial asociada a una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula de masa 20 g que se mueve sobre el eje x. Sobre esta partícula no actúa ninguna otra fuerza.**



a) Identificar los puntos de equilibrio estable e inestable de la gráfica de energía potencial.

b) Si la energía mecánica de la partícula es cero, ¿entre qué puntos se puede encontrar la partícula?

c) ¿Cuál es la energía cinética mínima que deberá de tener esta partícula cuando se encuentre en $x = 10$ cm moviéndose hacia la izquierda, para que pueda llegar a $x = 2{,}0$ cm? ¿Cuál será entonces la energía mecánica de la partícula?

Sol.: a) $x = 3{,}0$ y $7{,}0$ cm son puntos de equilibrio estable; $x = 5{,}0$ cm es un punto de equilibrio inestable.
b) $2{,}0 \text{ cm} < x < 4{,}0$ cm y también $x > 6{,}0$ cm
c) $E_c\,(x = 10 \text{ cm}) = 2{,}0$ J; $E_m = 2{,}0$ J

20 **La energía potencial asociada a una fuerza conservativa viene dada por la siguiente expresión: $U(x) = 5{,}0\,(e^{x/10} + e^{-x/10}) - 10$, donde la energía se expresa en joules y las distancias en centímetros.**

a) Identificar la posición del punto de equilibrio estable.

b) Deducir la expresión de la fuerza en función de la distancia.

Sol.: a) El punto de equilibrio estable se encuentra en el origen de coordenadas.
b) $F(x) = -0{,}50\,(e^{x/10} - e^{-x/10})$

21 **Un esquimal de 65 kg va sobre de un trineo de 15 kg tirado por siete perros. El trineo asciende por la ladera de una montaña inclinada 10° a velocidad constante de 1,0 m/s. La fricción que experimenta el esquimal y el trineo puede estimarse como un 10% del peso del conjunto. Calcular la potencia desarrollada por cada uno de los perros.**

Sol.: 31 W

22 **El motor de un coche de 950 kg suministra una potencia de 40 kW cuando el vehículo circula por un tramo de carretera horizontal a velocidad constante de 90 km/h. Considerar la fuerza de rozamiento que actúa sobre el coche proporcional a su velocidad.**

a) Calcular, en estas circunstancias, el valor de la fuerza de rozamiento.

b) Determinar la constante de proporcionalidad entre el rozamiento y la velocidad.

Cuando la velocidad es de 90 km/h el coche acelera hasta alcanzar, al cabo de 11 s, una velocidad de 110 km/h.

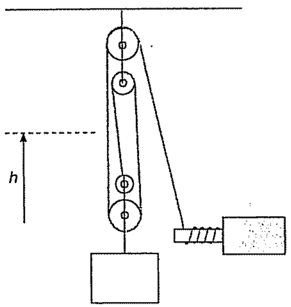
c) Calcular el trabajo realizado por la fuerza de fricción a lo largo del proceso de aceleración, considerando la aceleración constante.

d) Determinar la potencia desarrollada por el motor cuando el coche avanza a velocidad constante de 110 km/h.

Sol.: a) 1,6 kN; *b)* 64 kg/s; *c)* $-5{,}4 \cdot 10^5$ J; *d)* 60 kW

23 **Determinar la tensión de la cuerda, el trabajo y la potencia mecánica desarrollada por el motor, para levantar el bloque de 60 N de la figura una altura de 3,0 m, a velocidad constante $v = 0{,}40$ m/s.**

Sol.: $T = 20$ N; $W = 180$ J; $P = 24$ W



CAPÍTULO 6

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO: SISTEMAS DE PARTÍCULAS

6.1. IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento, $\vec{p}$, de una partícula se define como el producto de su masa por la velocidad.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Su unidad en el SI es el kg · m/s.
La ecuación anterior se puede expresar mediante tres ecuaciones escalares;

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_x$$

Si la masa de una partícula no varía, la derivada temporal de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante que actúa sobre la partícula:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

IMPULSO

El impulso, $\vec{I}$, de una fuerza que actúa sobre una partícula es igual al producto de la fuerza, $\vec{F}$, por el tiempo Δt que actúa. Si la fuerza es constante con el tiempo, el impulso durante un intervalo de tiempo viene dado por la expresión:

$$\vec{I} = \vec{F}\,\Delta t$$

Si la fuerza no es constante con el tiempo, el impulso entre un instante inicial t_i y un instante final t_f viene dado por la expresión:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

El módulo del impulso es igual al área comprendida entre la gráfica fuerza-tiempo, la ordenada correspondiente al tiempo t_i, la ordenada correspondiente al tiempo t_f, y el eje de abscisas (Figura 1). La unidad de impulso en el SI es el N · s.

La *fuerza media*, $\vec{F}_m$, durante un intervalo de tiempo Δt, es una fuerza que produce el mismo impulso que una fuerza variable con el tiempo durante este intervalo de tiempo (Figura 2).

$$\vec{F}_m\,\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

TEOREMA DEL IMPULSO MECÁNICO

El impulso de una fuerza durante un intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento debida a esta fuerza.

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

De esta expresión se deduce que, si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es nula, el impulso es nulo y, por tanto, la cantidad de movimiento de la misma permanece constante.

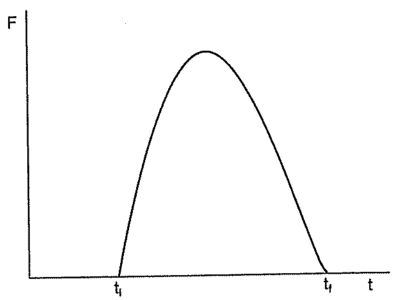


Figura 1

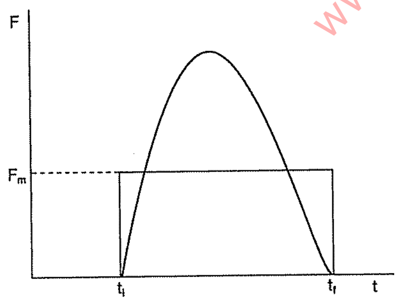


Figura 2

6.2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual a la suma de las cantidades de movimiento de las partículas que forman el sistema.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

La derivada temporal de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual a la suma de las fuerzas externas (fuerzas debidas a partículas que no forman parte del sistema):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext\,(i)} = \vec{F}_{ext}$$

Si la suma de las fuerzas exteriores, $\vec{F}_{ext}$, es nula, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante. Por ello, cuando dos o más partículas interaccionan, si no actúa ninguna otra fuerza exterior, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante.

CENTRO DE MASAS

El centro de masas de un sistema de partículas es un punto que se supone tiene una masa, M, igual a la suma de las masas de las partículas del sistema y una cantidad de movimiento igual a la cantidad de movimiento del sistema.

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM}$$

Siendo $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ representa la masa de una partícula genérica.

El vector de posición del centro de masas de un sistema de partículas se calcula:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{M}$$

$\vec{r}_i$ representa el vector de posición de una partícula genérica.

O bien:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i}{M}$$

Si se trata de un sólido rígido, el vector de posición del centro de masas se calcula:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r}\,dm}{M}$$

dm es la masa de un elemento de sólido situado en la posición $\vec{r}$.

O bien:

$$x_{CM} = \frac{\int_V x\,dm}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\int_V y\,dm}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\int_V z\,dm}{M}$$

En el caso de un sólido homogéneo podemos escribir también:

$$x_{CM} = \frac{\int_V \rho\,x\,dV}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\int_V \rho\,y\,dV}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\int_V \rho\,z\,dV}{M}$$

ρ representa la densidad volúmica de masa.

Si se trata de una placa delgada de espesor uniforme y homogénea:

$$x_{CM} = \frac{\int_A \sigma\, x\, dA}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\int_A \sigma\, x\, dA}{M}$$

σ representa la densidad superficial de masa.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme:

$$x_{CM} = \frac{\int_L \lambda\, x\, dL}{M}$$

λ es la densidad lineal de masa.

Si el objeto tiene un elemento de simetría en él se encuentra el centro de masas; si se trata de un centro de simetría, éste es el centro de masas.

Los centros de masas aparecen tabulados. Cuando un objeto puede considerarse que está formado por varios cuerpos de los que se conoce el centro de masas, se puede suponer que la masa de cada uno de estos cuerpos se encuentra concentrada en su correspondiente centro de masas y puede calcularse el centro de masas del objeto compuesto como si se tratase de un sistema de partículas discretas.

La velocidad y la aceleración del centro de masas, respectivamente, se calculan:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{v}_i}{M} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{a}_i}{M}$$

$\vec{v}_i$ y $\vec{a}_i$ representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de una partícula genérica.

El centro de masas se mueve como si tuviese una masa igual a la del sistema y todas las fuerzas exteriores estuviesen aplicadas en él. Esto puede expresarse:

$$\vec{F}_{ext} = M\, \vec{a}_{CM}$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La energía cinética de un sistema de partículas es igual a la suma de las energías cinéticas de las partículas.

$$E_c = \sum E_{ci} = \sum {}^1\!/_2\, m_i\, v_i^2$$

Si referimos las velocidades al centro de masas, la energía cinética de un sistema de partículas es igual a la suma de las energías cinéticas relativas más la energía cinética asociada al centro de masas, suponiendo que se trate de una partícula de masa M (masa del sistema) y velocidad $\vec{v}_{CM}$:

$$E_c = \sum {}^1\!/_2\, m_i\, v_{i,CM}^2 + {}^1\!/_2\, M\, v_{CM}^2$$

PROPULSIÓN DE COHETES

Los cohetes son impulsados por los gases que expulsan. En este proceso se cumple la conservación de la cantidad de movimiento. El empuje que recibe el cohete viene dado por la expresión:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

v_e representa la velocidad de escape de los gases referida al cohete, y $\frac{dM}{dt}$ representa la masa de combustible expulsada por unidad de tiempo.

Si el cohete tiene una velocidad v_1 cuando la masa del cohete y del combustible es M_1 y una velocidad v_2 cuando ha perdido una cierta cantidad de combustible y la masa es M_2, se cumple:

$$v_2 - v_1 = v_e \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Al escribir esta expresión ya se ha considerado que la velocidad de los gases es de sentido contrario a la del cohete, por tanto, se tomará el módulo de v_e.

COLISIONES

Una colisión consiste en una interacción entre dos partículas que se aproximan e interaccionan durante un cierto intervalo de tiempo. En una colisión sólo se considera las fuerzas de interacción, las otras o no existen o son despreciables frente a las de interacción. Al no considerar fuerzas externas en una colisión se conserva la cantidad de movimiento o, dicho de otra forma, en una colisión la cantidad de movimiento del centro de masas permanece constante.

En las colisiones entre objetos puede haber contacto, aunque desde el punto de vista microscópico es difícil hablar de contacto físico. La normal común a las superficies en contacto durante un impacto se denomina *línea de choque*. Si los centros de masa de los objetos que chocan se localizan sobre esta línea, el choque es un choque *central*. En caso contrario se dice que el choque es *excéntrico*. Solamente consideraremos choques centrales. Si las velocidades están dirigidas a lo largo de la línea de choque, se dice que el choque es *directo* o *frontal*. Si uno de los objetos se mueve en una línea que no es la línea de choque, el choque es *oblicuo*.

En una *colisión elástica* se conserva, además de la cantidad de movimiento, la energía cinética.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad E_{ci} = Ec_f$$

En una *colisión inelástica* se conserva la cantidad de movimiento, pero no se conserva la energía cinética.

En una *colisión completamente inelástica* los objetos que colisionan quedan pegados. Se cumple:

$$m_1\, \vec{v}_{1i} + m_2\, \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\, \vec{v}_f$$

Colisiones frontales elásticas en una dimensión

En este tipo de colisiones la velocidad relativa de las partículas es igual y de signo contrario a la velocidad relativa después del choque.

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Si observamos la colisión desde el centro de masas, las partículas al colisionar invierten sus velocidades.

$$v_{1,CM\,(i)} = -v_{1,CM\,(f)} \text{ y } v_{2,CM\,(i)} = -\, v_{2,CM\,(f)}$$

Las velocidades de las partículas respecto al centro de masas en el momento de máxima aproximación son nulas.

Colisiones frontales inelásticas en una dimensión

La relación cambiada de signo entre la velocidad relativa después de la colisión y la velocidad relativa antes de la colisión recibe el nombre de coeficiente de restitución.

$$r = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}}$$

Si tomamos como referencia el centro de masas:

$$v_{1,CM\,(i)} = -r\, v_{1,CM\,(f)} \text{ y } v_{2,CM\,(i)} = -\, r\, v_{2,CM\,(f)}$$

Colisiones centrales oblicuas

En este tipo de colisiones hay que tener presente que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y que se cumple:

$$m_1\, v_{1i\,(x)} + m\, v_{2i\,(x)} = m_1\, v_{1f\,(x)} + m\, v_{2f\,(x)};\; m_1\, v_{1i\,(y)} + m\, v_{2i\,(y)} = m_1\, v_{1f\,(y)} + m\, v_{2f\,(y)}$$

Si es elástica, se conserva la energía cinética.

En las colisiones oblicuas elásticas entre dos objetos de masas iguales en las que uno está en reposo antes de la colisión, las velocidades finales forman un ángulo recto y se cumple:

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

6.1. Una partícula de masa 4,0 kg tiene una velocidad $\vec{v} = 3{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} - 4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}$. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de esta partícula?

Solución

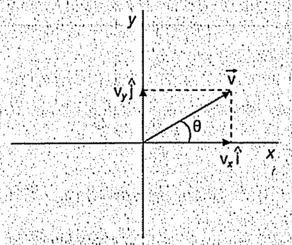
Utilizaremos la expresión $\vec{p} = m\,\vec{v}$ que nos da la cantidad de movimiento.

$$\vec{p} = 4{,}0\ \text{kg} \cdot (3{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} - 4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}) = 12\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} - 16\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i}$$

$$p = \sqrt{(12\ \text{kg} \cdot \text{m/s})^2 + (16\ \text{kg} \cdot \text{m/s})^2} = 20\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\vec{p} = 12\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} - 16\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i},\ p = 20\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

6.2. Un partícula de 450 g tiene una cantidad de movimiento $\vec{p} = 2{,}7\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} + 1{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{j}$. ¿En qué dirección se mueve esta partícula?



Solución

Calcularemos primero la velocidad de la partícula, y a partir de la velocidad podremos saber la dirección del movimiento de la partícula. Para hallar la velocidad utilizaremos la expresión:

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad 2{,}7\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} + 1{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{j} = 0{,}450\ \text{kg}\ \vec{v} \qquad \vec{v} = 6{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

De la figura se deduce:

$$tg\ \theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad tg\ \theta = \frac{4{,}0}{6{,}0} \qquad \theta = 34°$$

La partícula se mueve en una dirección que forma un ángulo de 34° con el eje de abscisas.

6.3. Sobre un objeto actúa durante 4,0 s una fuerza que viene dada por la expresión $\vec{F} = 3{,}0\, t^2\, \hat{i} + 4{,}0\, t\, \hat{j}$, SI. Determinar:

a) El impulso que experimenta el objeto.

b) La fuerza media que ha actuado sobre este objeto.

Solución

a) El impulso que experimenta el objeto.

$$\vec{I} = \int_0^{4{,}0} (3{,}0\, t^2\, \hat{i} + 4{,}0\, t\, \hat{j})\, dt = \left[1{,}0\, t^3\, \hat{i} + 2{,}0\, t^2\, \hat{j}\right]_0^{4{,}0} = 64\ N \cdot s\ \hat{i} + 32\ N \cdot s\ \hat{j}$$

$$I = \sqrt{(64\ N \cdot s)^2 + (32\ N \cdot s)^2} = 71{,}5\ N \cdot s$$

$$\vec{I} = 64\ N \cdot s\ \hat{i} + 32\ N \cdot s\ \hat{j} \qquad I = 72\ N \cdot s$$

b) La fuerza media.

$$\vec{F}_m\, \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt$$

$$\vec{F}_m \cdot 4{,}0\ s = 64\ N \cdot s\ \hat{i} + 32\ N \cdot s\ \hat{j} \qquad \vec{F}_m = 16\ N\hat{i} + 8{,}0\ N\hat{j}$$

$$F_m = \sqrt{(16\ \text{N})^2 + (8{,}0\ \text{N})^2} = 17{,}8\ \text{N}$$

$$\vec{F}_m = 16\ \text{N}\ \hat{i} + 32\ \text{N}\ \hat{j} \qquad F_m = 18\ \text{N}$$

6.4. Sobre un objeto de masa 4,0 kg que se mueve con una velocidad de 11 m/s actúa una fuerza media de 14 N durante 6,0 s. Determinar:

a) El impulso que ha recibido este objeto.

b) La velocidad final.

Solución

a) El impulso que ha recibido el objeto.

$$\vec{I} = \vec{F}\, \Delta t \qquad \text{I} = 14\ \text{N} \times 6{,}0\ \text{s} = 84\ \text{N} \cdot \text{s}$$

$$I = 84\ \text{N} \cdot \text{s}$$

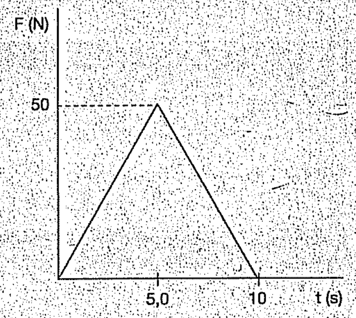
b) La velocidad final.

El impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento. Como el movimiento tiene lugar en una sola dimensión, no es necesario utilizar la notación vectorial.

$$I = mv_f - mv_i \qquad 84\ \text{N} \cdot s = 4{,}0\ \text{kg}\ v_f - 4{,}0\ \text{kg} \times 11\ \text{m/s}$$

$$v_f = 32\ \text{m/s}$$

6.5. Sobre un bloque de 5,0 kg que se encuentra sobre una superficie horizontal actúa una fuerza variable con el tiempo en dirección horizontal. El valor de la fuerza se muestra en la figura. Determinar:



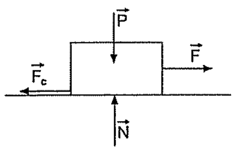
a) El instante en que empieza a moverse el bloque.

b) El momento en que el bloque adquiere la máxima velocidad y su valor. Los coeficientes de fricción estática y de fricción cinética entre la superficie y el bloque son 0,45 y 0,35, respectivamente.

Solución

a) El instante en que empieza a moverse el bloque.

El bloque inicia su movimiento cuando la fuerza de $\vec{F}$ es igual a la fuerza de fricción estática máxima. En la figura se muestra el diagrama del sólido libre del bloque.



La fuerza de fricción estática máxima viene dada por la expresión:

$$F_{e\,\text{máx}} = \mu_e \,\text{N}$$

Como no hay movimiento en la dirección del eje y, se cumple:

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0 \qquad \text{N} - \text{mg} = 0 \qquad \text{N} = \text{mg}$$

Por tanto:

$$F_{e\,\text{máx}} = \mu_e \,\text{mg} \qquad F_{e\,\text{máx}} = 0{,}45 \cdot 5{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 22{,}0 \text{ N}$$

De la gráfica se deduce que de $t = 0$ a $t = 5{,}0$ el valor de la fuerza viene dado por la expresión: $F = 10$ N/s t.

El instante en que F es igual a 22,0 N es:

$$22{,}0 \text{ N} = 10 \text{ N/s } t \qquad t = 2{,}20 \text{ s}$$

El bloque empieza a moverse en el instante $t = 2{,}2$ s.

b) El momento en que el bloque adquiere la máxima velocidad y su valor.

Obsérvese que, desde $t = 0$ a $t = 5{,}0$ s, el módulo F va aumentando y, a partir del instante $t = 5{,}0$ s, F disminuye hasta que se anula. Desde el momento en que se inicia el movimiento, la velocidad del bloque va aumentando mientras la fuerza $\vec{F}$ se mantiene superior a la fuerza de fricción cinética, pero, cuando el módulo de la fuerza de fricción cinética se hace mayor que el módulo de $\vec{F}$, la aceleración tiene sentido contrario al del movimiento y la velocidad empieza a disminuir. En consecuencia, la velocidad máxima se alcanza en el instante en que $|\vec{F}| = |\vec{F}_c|$.

$$F_C = \mu_c \,\text{N} \qquad F_C = 0{,}35 \cdot 5{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 17{,}1 \text{ N}$$

La expresión de F entre $t = 5{,}0$ s y $t = 10$ s es: $F = 5{,}0$ N $- 10$ N/s t.

$$17{,}1 \text{ N} = 50 \text{ N} - 10 \text{ N/s } t \qquad t = 3{,}29 \text{ s}$$

Como lleva 5,0 s en movimiento, la velocidad máxima se alcanza en el instante:

$$t = 5{,}0 \text{ s} + 3{,}29 \text{ s} = 8{,}29 \text{ s} \qquad t = 8{,}3 \text{ s}$$

Para calcular la velocidad máxima haremos $\vec{I} = \Delta\vec{p}$.

Calcularemos el impulso de la fuerza $\vec{F}$, primero desde $t_i = 2{,}20$ s a $t_f = 5{,}0$ y luego desde $t = 5{,}0$ a $t = 8{,}29$ s.

$$I_1 = \int_{2{,}20}^{5{,}0} 10\,t\,dt = \left[5{,}0\,t^2\right]_{2{,}20}^{5{,}0} = 100\,N \cdot s$$

Para calcular el impulso entre $t = 5{,}0$ a $t = 8{,}29$ s, como F viene dada por otra ecuación, tomaremos como origen de tiempos $t = 5{,}0$ s, e integraremos entre $t_i = 0$ y $t_f = 3{,}29$ s.

$$I_2 = \int_0^{3{,}29} (50 - 10t)\,dt = \left[5{,}0\,t - 5{,}0\,t^2\right]_0^{3{,}29} = 110\,N \cdot s$$

La fuerza de fricción cinética es constante con el tiempo y tiene sentido contrario al del movimiento, que es el que hemos tomado como positivo. Esta fuerza ha actuado desde el instante $t_i = 0$ al instante $t_f = 8{,}29$ s, por tanto, $\Delta t = 8{,}29$ s $- 0 = 8{,}29$ s.

$$I_3 = -\,17{,}1 \text{ N} \times 8{,}29 \text{ s} = -141 \text{ N} \cdot \text{s}$$

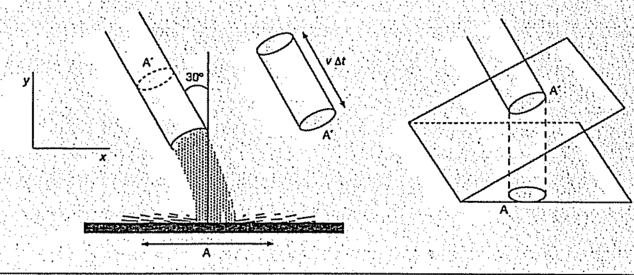
$$I = I_1 + I_2 + I_3 \qquad I = 100 \text{ N} \cdot \text{s} + 110 \text{ N} \cdot \text{s} - 141 \text{ N} \cdot s = 69 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$I = mv_f - mv_f \qquad 69 \text{ N} \cdot \text{s} = 5{,}0 \text{ kg } v_f - 5{,}0 \text{ kg} \cdot 0 \qquad v_f = 13{,}8 \text{ m/s}$$

$$t = 8{,}3 \text{ s}$$
$$v_{\text{máx}} = 14 \text{ m/s}$$

6.6. Un chorro de agua con una velocidad de 30 m/s y una inclinación de 30° respecto a la vertical choca con una superficie plana y horizontal. Después del choque el agua se esparce por la superficie. Determinar la presión sobre la superficie.

Densidad del agua 1 000 kg/m^3.



Solución

Al chocar con la superficie, el agua experimenta una variación en la cantidad de movimiento, suponiendo que no rebota, la componente y de la cantidad de movimiento se anula. El volumen de agua que llega a la superficie en un intervalo de tiempo Δt es el contenido en un cilindro de altura $v\,\Delta t$ y base de área A′, v representa la velocidad del agua, lo que supone una masa $m = \rho\, v\, A'\,\Delta t$. Durante este tiempo tiene lugar una variación de cantidad de movimiento de módulo:

$$|\Delta p_y| = |0 - \rho v\, A'\, \Delta t\, v_y|$$

De la figura se deduce: $v_y = v \cos 30°$. Escribimos:

$$|\Delta p_y| = |0 - \rho v\, A'\, \Delta t\, v \cos 30°|$$

Como el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento, se cumple:

$$|F_y \Delta t| = |0 - \rho v\, A'\, \Delta t\, v \cos 30°| \qquad (1)$$

La presión sobre una superficie es igual a la fuerza normal por unidad de superficie, en este caso, la fuerza que el agua ejerce sobre la superficie, según la tercera ley de Newton, es igual y de sentido contrario que la fuerza ejercida por la superficie sobre el agua. Para calcular la presión nos interesa el módulo de la fuerza, por tanto, prescindiremos del signo. Tendremos:

$$P = \frac{F_y}{A} \qquad (2)$$

De la figura se deduce: $A' = A \cos 30°$. Y de (1) deducimos:

$$F_y = A'\, \rho v^2 \cos 30° \qquad F_y = v^2 A\, \rho \cos^2 \theta \qquad (3)$$

De (2) y (3) resulta:

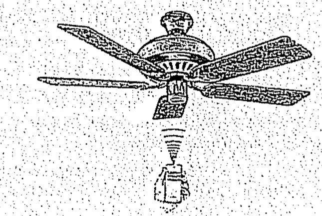
$$P = \frac{v^2 A\, \rho \cos^2 \theta}{A} = v^2 \rho \cos^2 \theta$$

Sustituimos en esta expresión y resulta:

$$P = (30 \text{ m/s})^2 \cdot (1\,000 \text{ kg/m}^3) \cos^2 30° = 675 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

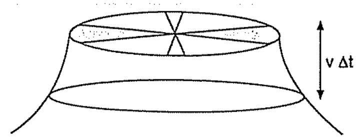
$$P = 6{,}8 \cdot 10^2\ kPa$$

6.7. Un ventilador que está sujeto al techo empieza a girar y envía hacia abajo una corriente de aire de 1,4 m de diámetro con una velocidad de 9,5 m/s. ¿Qué fuerza suplementaria actúa sobre las aspas del ventilador? Densidad del aire $\rho = 1{,}2$ kg/m^3.



Solución

Las aspas del ventilador impulsan el aire, el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento. Según la tercera ley de Newton, el aire ejerce sobre las aspas un impulso del mismo módulo y la misma dirección, pero de sentido contrario. Supongamos una columna de aire de altura $v\,\Delta t$ muy pequeña para que pueda considerarse de forma cilíndrica de diámetro igual al de la corriente que originan las aspas del ventilador.



La masa de esta columna será: $\Delta m = \pi R^2\, v\, \Delta t\, \rho$

Si la velocidad del aire antes de ser impulsado por el ventilador es nula, la variación de cantidad de movimiento será:

$$\Delta p = \pi R^2\, v\, \Delta t\, \rho\, v - 0$$

Si F es la fuerza que actúa sobre la columna de aire, se cumple:

$$F\, \Delta t = \pi R^2\, v\, \Delta t\, \rho\, v - 0 \qquad F = \pi R^2 \rho\, v^2$$

Sustituyendo resulta:

$$F = \pi\, (0{,}70 \text{ m})^2\ 1{,}2 \text{ kg/m}^3\ (9{,}5 \text{ m/s})^2 = 166 \text{ N}$$

Sobre las aspas actúa una fuerza de $1{,}7 \cdot 10^2$ N, dirigida hacia arriba.

PROPULSIÓN DE COHETES

6.8. Un cohete de masa $1{,}2 \cdot 10^3$ kg, combustible incluido, se dispara verticalmente desde el suelo. El cohete consume el combustible a un ritmo de 12,5 kg/s durante 80 s y lo expulsa a una velocidad relativa al cohete de 4,0 km/s. Determinar:

a) El empuje que recibe el cohete debido a la expulsión de los gases.

b) La aceleración en el instante del encendido.

c) La aceleración al consumirse las últimas partículas de combustible.

Solución

a) El empuje que recibe el cohete debido a la expulsión de los gases.

El empuje que recibe un cohete debido a la expulsión de los gases viene dado por la expresión:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

Empuje $= 4{,}0 \cdot 10^3$ m/s $\times$ 12,5 kg/s $= 50 \cdot 10^3$ N $= 50$ kN

b) La aceleración en el instante del encendido.

Además del empuje debido a los gases, sobre el cohete actúa la fuerza de la gravedad, con lo cual la fuerza resultante será:

$$F = 50 \cdot 10^3 \text{ N} - 1{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 38{,}2 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Aplicamos la segunda ley de Newton, $F = ma$.

$$38{,}2 \cdot 10^3 \text{ N} = 1{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg}\ a \qquad a = 31{,}8 \text{ m/s}^2 \qquad a = 32 \text{ m/s}^2$$

c) La aceleración al consumirse las últimas partículas de combustible.

A medida que se van expulsando los gases, la masa del cohete disminuye. Como expulsa 12,5 kg/s de gases, la masa de los gases expulsados durante los 80 s será:

Masa de los gases expulsados = 12,5 kg/s $\times$ 80 s $= 1{,}00 \cdot 10^3$ kg

Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$50 \cdot 10^3 \text{ N} - (1{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg} - 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg}) \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = (1{,}2 \cdot 10^3 \text{ kg} - 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg})\ a$$

$$a = 240 \text{ m/s}^2 \qquad a = 2{,}4 \cdot 10^2 \text{ m/s}^2$$

6.9. Un cohete de masa $3{,}00 \cdot 10^3$ kg, que se mueve por el espacio a $2{,}50 \cdot 10^3$ m/s, contiene $46{,}0 \cdot 10^3$ kg de combustible que expulsa a una velocidad con respecto al cohete de $2{,}00 \cdot 10^3$ m/s y a un ritmo de 500 kg/s. Determinar:

a) El empuje que recibe el cohete.

b) La velocidad del cohete cuando ha expulsado la mitad de los gases y en el momento en que ya se han expulsado todos los gases.

Solución

a) El empuje que recibe el cohete.

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| \qquad \text{Empuje} = 2{,}00 \cdot 10^3 \text{ m/s} \times 500 \text{ kg/s} = 1{,}00 \cdot 10^6 \text{ N}$$

b) La velocidad del cohete cuando ha expulsado la mitad de los gases.

Aplicaremos la ecuación: $v_2 - v_1 = v_e \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$

Cuando se ha expulsado la mitad de los gases quedan todavía en el cohete $23{,}0 \cdot 10^3$ kg.

$$v_2 - 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ m/s} \ln\left(\frac{3{,}00 \cdot 10^3 + 46{,}0 \cdot 10^3}{3{,}00 \cdot 10^3 + 23{,}0 \cdot 10^3}\right) \qquad v_2 = 3{,}77 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Cuando ya se ha consumido todo el combustible:

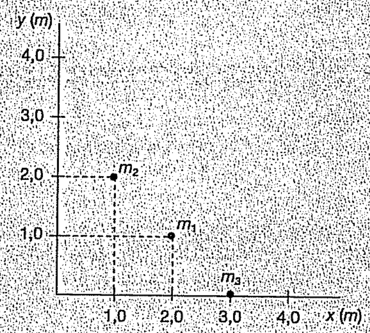
$$v_F - 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ m/s} \ln\left(\frac{3{,}00 \cdot 10^3 + 46{,}0 \cdot 10^3}{3{,}00 \cdot 10^3}\right) \qquad v_F = 8{,}09 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

CENTRO DE MASAS

6.10. Las masas de las partículas del sistema de la figura son $m_1 = 2{,}0$ g; $m_2 = 1{,}0$ g y $m_3 = 2{,}0$ g. Sus respectivas velocidades son $\vec{v}_1 = 20$ m/s $\hat{i} + 5{,}0$ m/s $\hat{j}$; $\vec{v}_2 = 10$ m/s $\hat{j}$ y $\vec{v}_3 = 7{,}5$ m/s $\hat{i} - 12$ m/s $\hat{j}$. Determinar:

a) La posición del centro de masas del sistema.

b) La velocidad del centro de masas.



Solución

a) La posición del centro de masas del sistema.

Las expresiones que nos dan las coordenadas del centro de masas son:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

$$x_{CM} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 2{,}0 \text{ m} + 1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 1{,}0 \text{ m} + 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 3{,}0 \text{ m}}{2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 2{,}2 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 1{,}0 \text{ m} + 1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 2{,}0 \text{ m} + 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 0 \text{ m}}{2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 0{,}80 \text{ m}$$

El vector de posición del centro de masas será $\vec{r}_{CM} = 2{,}2 \text{ m}\ \hat{i} + 0{,}80 \text{ m}\ \hat{j}$

b) La velocidad del centro de masas.

Las expresiones que nos dan las coordenadas de la velocidad del centro de masas son:

$$x_{xCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{ix}}{M} \qquad v_{yCM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{iy}}{M}$$

$$x_{xCM} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 20\ \text{m} + 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times (7{,}5\ \text{m/s})}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = 11\ \text{m/s}$$

$$y_{xCM} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 5{,}0\ \text{m} + 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 10\ \text{m/s} + 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times (-12\ \text{m/s})}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = 1{,}8\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{y\,(CM)} = 11\ \text{m/s}\ \hat{i} - 1{,}8\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

6.11. Determinar el centro de masas de una placa homogénea en forma de triángulo rectángulo de catetos b y c.

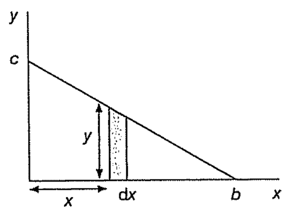
Solución

Calcularemos el centro de masas de esta placa por integración. Utilizaremos la expresión:

$$x_{CM} = \frac{\int_A \sigma\, x\, dA}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\int_A \sigma\, x\, dA}{M}$$

Situaremos los ejes de coordenadas de forma que coincidan con los catetos del triángulo.
Consideraremos una franja vertical de área $dA = y dx$.
Si la densidad superficial de masa de la placa es σ, la masa de este elemento será:

$$dm = \sigma\, y dx$$



La masa de la placa será:

$$M = {}^1\!/_2\, \sigma\, bc$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^b \sigma\, xy\, dx}{\sigma\, bc/2}$$

La coordenada y depende de x, por tanto debemos expresar y en función de x. De la figura se deduce:

$$\frac{y}{c} = \frac{b-x}{b} \qquad y = \frac{c}{b}(b-x)$$

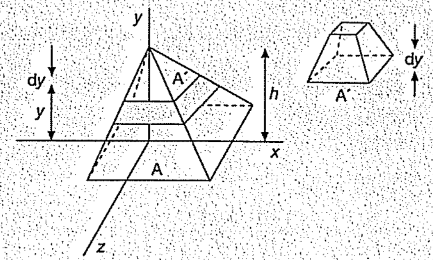
Que sustituimos en la expresión anterior:

$$x_{CM} = \frac{\int_0^b \sigma\, x\, (c/b)\, (b-x)\, dx}{\sigma\, bc/2} = \frac{2}{b^2}\int_0^b x\,(b-x)\, dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{2}{b^2}\,\frac{b^3}{6} = \frac{b}{3}$$

Para hallar la coordenada y, supondremos la placa descompuesta en franjas horizontales. A través de un cálculo similar se obtiene $y_{CM} = c/3$.

$$x_C = b/3 \qquad y_C = c/3$$

6.12. Determinar el centro de masas de una pirámide recta cuadrangular homogénea de altura h y base A.



Solución

Por simetría el centro de masas debe encontrarse en la altura de la pirámide. Tomaremos los ejes de coordenadas de forma que ésta sea el eje y.

Consideraremos la pirámide descompuesta en pequeños paralelepípedos de base A' y altura dy, cuyo volumen será:

$$dV = A'\, dy$$

Y su masa $dm = \rho\, A'\, dy$.

La masa de la pirámide es: $M = 1/3\ \rho\, A\, h$

La coordenada y del centro de masas será:

$$y_{CM} = \frac{\int_0^h \rho\, A'\, y\, dy}{\rho\ 1/3\, Ah} = \frac{3\int_0^h A'\, y\, dy}{Ah}$$

El área de la sección del paralelepípedo depende de la coordenada y. Para expresarla en función de esta coordenada haremos:

$$\frac{A'}{A} = \frac{(h-y)^2}{h^2} \qquad A' = A\,\frac{(h-y)^2}{h^2}$$

Sustituimos en la expresión anterior:

$$y_{CM} = \frac{3\int_0^h A\,\frac{(h-y)^2}{h^2}\, y\, dy}{Ah} = \frac{3\int_0^h A\,(h-y)^2\, y\, dy}{Ah^3} = \frac{3}{h^3}\int_0^h (h^2 y - 2\, hy^2 + y^3)\, dy$$

Integrando resulta:

$$y_{CM} = \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^2 y^2}{2} - \frac{2\, hy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{h^3}\cdot\frac{h^4}{12} = \frac{h}{4}$$

Como el centro de masas está situado en el eje y, sus coordenadas son:

$$x_{CM} = 0 \qquad y_{CM} = h/4 \qquad z_{CM} = 0$$

6.13. Una partícula de 6,0 g se mueve con una velocidad $\vec{v} = 4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 6{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}$. Una segunda partícula de 4,0 g se encuentra en reposo. Determinar:

a) La velocidad de cada partícula relativa al centro de masas del sistema.

b) La cantidad de movimiento de cada partícula en el sistema centro de masas.

Solución

a) La velocidad de cada partícula relativa al centro de masas del sistema.

La velocidad relativa al centro de masas puede calcularse mediante la expresión:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1CM} + \vec{v}_{CM}$$

Calcularemos primero la velocidad del centro de masas:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\ (4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 6{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j})}{6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} + 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = 2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} + 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

Las respectivas velocidades relativas serán:

$$\vec{v}_{1,CM} = (4{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 6{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}) - (2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} + 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}) = 1{,}6\ \text{m/s}\ \hat{i} + 2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

$$\vec{v}_{2,CM} = 0 - (2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} + 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}) = -2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} - 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

$$\vec{v}_{1,CM} = 1{,}6\ \text{m/s}\ \hat{i} + 2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{j} \qquad \vec{v}_{2CM} = -2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} - 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}$$

b) La cantidad de movimiento de cada partícula en el sistema centro de masas.

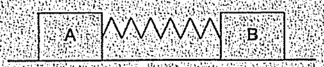
$$\vec{P}_{1,CM} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\ (1{,}6\ \text{m/s}\ \hat{i} + 2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{j}) = 9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} + 14 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{j}$$

$$\vec{P}_{2,CM} = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\ (-2{,}4\ \text{m/s}\ \hat{i} - 3{,}6\ \text{m/s}\ \hat{j}) = -9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} - 14 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{j}$$

Obsérvese que la suma de estas cantidades de movimiento es cero.

$$\vec{P}_{1,CM} = 9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i} + 14 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{j};\ P_{2,CM} = -9{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg m/s}\ \hat{i} - 14 \cdot 10^{-3}\ \text{kg m/s}\ \hat{j}$$

6.14. Los dos bloques A y B que comprimen un muelle se encuentran unidos mediante una cuerda. La superficie sobre la que reposan los bloques es completamente lisa. Demostrar que la energía cinética que adquieren los bloques al romper la cuerda cumple la relación $E_{cB}/E_{cA} = m_A/m_B$. (Suponer despreciable la masa del muelle).



Solución

Como no interviene ninguna fuerza exterior, se conserva la cantidad de movimiento. Como la fuerza elástica es conservativa se conserva la energía; es decir, la energía potencial elástica ha de ser igual a la suma de las energías cinéticas de los bloques.

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$0 = m_A v_A + m_B v_B \tag{1}$$

Conservación de la energía. Sea x la distancia que se encuentra comprimido el muelle:

$$^1/_2\, k x^2 = {}^1/_2\, m_A v_A^2 + {}^1/_2\, m_B v_B^2 \tag{2}$$

Despejamos v_B de (1):

$$v_B = -\frac{m_A v_A}{m_B}$$

Sustituimos en (2):

$$^1/_2\, k x^2 = {}^1/_2\, m_A v_A^2 + {}^1/_2\, m_B \left(-\frac{m_A v_A}{m_B}\right)^2$$

$$^1/_2\, k x^2 = {}^1/_2\, m_A v_A^2 + {}^1/_2\, \frac{m_A}{m_B} m_A v_A^2$$

Que podemos escribir:

$$^1/_2\, k x^2 - {}^1/_2\, m_A v_A^2 = {}^1/_2\, \frac{m_A}{m_B} m_A v_A^2$$

$$^1/_2\, k x^2 - {}^1/_2\, m_A v_A^2 = \frac{m_A}{m_B} E_{cA}$$

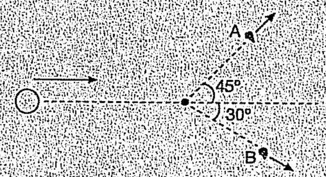
De (2) podemos deducir: $^1/_2\, k x^2 - {}^1/_2\, m_A v_A^2 = E_{cB}$, que combinando con la expresión anterior resulta:

$$E_{cA} = \frac{m_A}{m_B} E_{cA}$$

Es decir:

$$\frac{E_{cB}}{E_{cA}} = \frac{m_A}{m_B}$$

6.15. Un proyectil de 12 kg se mueve a una velocidad de 40 m/s y explota en dos fragmentos A y B de masas 3,0 kg y 9,0 kg, respectivamente. Inmediatamente después de la explosión se mueven en las direcciones indicadas: $\theta_1 = 45°$ y $\theta_2 = 30°$, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad de cada fragmento?



Solución

Como no actúa ninguna fuerza exterior, se conserva la cantidad de movimiento.

$$m \vec{v}_0 = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \qquad 12\ kg \times 40\ m/s\ \hat{i} = 3{,}0\ kg\ \vec{v}_A + 9{,}0\ kg\ \vec{v}_B \tag{1}$$

Podemos expresar las velocidades de los fragmentos en función de sus componentes:

$$\vec{v}_A = v_A \cos 45^\circ\, \hat{i} + v_A \operatorname{sen} 45^\circ\, \hat{j} \qquad \vec{v}_B = v_B \cos 30^\circ\, \hat{i} + v_B \operatorname{sen} 30^\circ\, \hat{j} \qquad (2)$$

Podemos expresar la ecuación (1) mediante dos ecuaciones escalares:

Componentes x:

$$12\ kg\ x\ 40\ \text{m/s} = 3{,}0\ kg\ v_A \cos 45^\circ + 9{,}0\ kg\ v_B \cos 30^\circ$$

Componentes y:

$$0 = 3{,}0\ \text{kg}\ v_A \operatorname{sen} 45^\circ - 9{,}0\ \text{kg}\ v_B \operatorname{sen} 30^\circ$$

Al resolver este sistema resulta:

$$v_A = 82{,}8\ \text{m/s} \qquad v_B = 39{,}0\ \text{m/s}$$

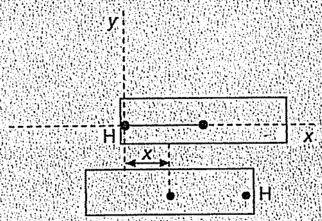
Sustituimos en (2):

$$\vec{v}_A = 82{,}8\ \text{m/s} \cos 45^\circ\, \hat{i} + 82{,}8\ \text{m/s} \operatorname{sen} 45^\circ\, \hat{j} \qquad \vec{v}_B = 39{,}0\ \text{m/s} \cos 30^\circ\, \hat{i} + 39{,}0\ \text{m/s} \operatorname{sen} 30^\circ\, \hat{j}$$

$$\vec{v}_A = 58{,}5\ \text{m/s}\, \hat{i} + 58{,}5\ \text{m/s}\, \hat{j} \qquad \vec{v}_B = 33{,}7\ \text{m/s}\, \hat{i} + 19{,}5\ \text{m/s}\, \hat{j}$$

$$\vec{v}_A = 59\ \text{m/s}\, \hat{i} + 59\ \text{m/s}\, \hat{j},\ \vec{v}_A = 83\ \text{m/s} \qquad \vec{v}_B = 34\ \text{m/s}\, \hat{i} + 20\ \text{m/s}\, \hat{j},\ \vec{v}_B = 39\ \text{m/s}$$

6.16. Un hombre de 84 kg se encuentra de pie en un extremo de una plancha de 4,0 m de longitud y 12 kg de masa. La plancha se encuentra sobre una pista de hielo. El hombre se desplaza hasta el otro extremo de la plancha. Determinar la distancia que ha recorrido el hombre respecto al suelo. Suponer despreciable la fricción entre el hielo y la plancha.



Solución

El centro de masas de la plancha se encuentra en el centro, su coordenada es 2,0 m. Al principio el hombre, H, se encuentra en un extremo de la plancha, su coordenada es 0. Al final está en el otro extremo y de la figura se deduce que su coordenada es $(x + 2{,}0\ \text{m})$.

Como no actúa ninguna fuerza exterior, el centro de masas del sistema no se mueve.

Posición inicial:

$$x_{CM} = \frac{12\ \text{kg} \times 2{,}0\ \text{m}}{12\ \text{kg} + 84\ \text{kg}}$$

Posición final:

$$x_{CM} = \frac{12\ \text{kg} \times 84\ \text{kg}\ (x + 2{,}0\ \text{m})}{12\ \text{kg} + 84\ \text{kg}}$$

Igualamos los segundos miembros de las expresiones anteriores:

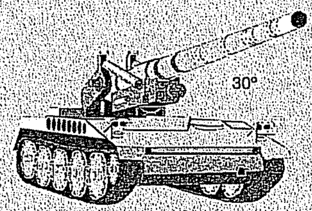
$$\frac{12\ \text{kg} \times 2{,}0\ \text{m}}{12\ \text{kg} + 84\ \text{kg}} = \frac{12\ \text{kg}\ x + 84\ \text{kg}\ (x + 2{,}0\ \text{m})}{12\ \text{kg} + 84\ \text{kg}}$$

Resolvemos esta ecuación y resulta $x = -1{,}5$ m.

Es decir, la plataforma se ha desplazado 1,5 m hacia la izquierda.
El hombre se ha desplazado:

$$\Delta x = 2{,}0\ \text{m} - 1{,}5\ \text{m} = 0{,}5\ \text{m}$$

6.17. Un cañón de 1 350 kg, que no tiene ningún mecanismo antiretroceso, dispara un proyectil de 8,5 kg con una inclinación de 30° y un velocidad de 300 m/s. Suponer que el cañón se encuentra en un terreno horizontal y que puede moverse libremente. Calcular la velocidad de retroceso del cañón.



Solución

La cantidad de movimiento del sistema formado por el proyectil y el cañón no se conserva debido a que existe la fuerza normal que ejerce el suelo, no se conserva por tanto la componente vertical, pero sí se conserva la componente horizontal.

$$p_{xi} = p_{xf} \qquad 0 = 8{,}5\ \text{kg}\ x\ 300\ \text{m/s} \cos 30^\circ + 1\,350\ kg\ v_{fc}$$

$$v_{fc} = -1{,}6\ \text{m/s}$$

6.18. Un niño de 26 kg se encuentra en una pequeña barca que tiene una masa de 35 kg que está en reposo y sin amarrar; en un cierto instante, lanza horizontalmente y hacia atrás un paquete de 5,6 kg a una velocidad respecto a la barca de 6,0 m/s. ¿A qué velocidad retrocederá la barca?

Solución

Inicialmente la cantidad de movimiento es cero. Como no intervienen fuerzas exteriores, se conserva la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$$

Consideraremos sentido positivo el del movimiento de la barca, por tanto, la velocidad del paquete con respecto a la barca será negativa.

Sea v_b la velocidad de la barca respecto a la costa. La velocidad del paquete respecto a la barca es: $v_{p,b} = -6{,}0$ m/s. La velocidad del paquete respecto a la costa será:

$$v_p = v_{p,b} + v_b \qquad v_p = -6{,}0 \text{ m/s} + v_b$$

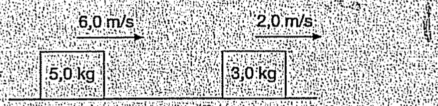
La cantidad de movimiento final será la de la barca y el niño más la del paquete:

$$p_f = (26 \text{ kg} + 35 \text{ kg})\, v_b + 5{,}6 \text{ kg}\,(-6{,}0 \text{ m/s} + v_b)$$

$$(26 \text{ kg} + 35 \text{ kg})\, v_b + 5{,}6 \text{ kg}\,(-6{,}0 \text{ m/s} + v_b) = 0 \qquad v_b = 0{,}50 \text{ m/s}$$

COLISIONES

6.19. Un bloque de masa $m_1 = 5{,}0$ kg se mueve hacia la derecha a una velocidad $v_1 = 6{,}0$ m/s. Otro bloque de masa $m_2 = 3{,}0$ kg se mueve también hacia la derecha con una velocidad de 2,0 m/s. El primer bloque alcanza al segundo y se produce una colisión frontal elástica. ¿Cuáles serán las respectivas velocidades de los bloques después de la colisión?



Solución

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$5{,}0 \text{ kg} \cdot 6{,}0 \text{ m/s} + 3{,}0 \text{ kg} \cdot (2{,}0 \text{ m/s}) = 5{,}0 \text{ kg} \cdot v_{1f} + 3{,}0 \text{ kg} \cdot v_{2f}$$

$$36 \text{ kg m/s} = 5{,}0 \text{ kg}\, v_{1f} + 3{,}0 \text{ kg}\, v_{2f}$$

Por ser una colisión frontal elástica en una dimensión se cumple la siguiente relación entre las velocidades:

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Sustituyendo se obtiene:

$$6{,}0 \text{ m/s} - (2{,}0 \text{ m/s}) = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad 4{,}0 \text{ m/s} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Resolvemos el sistema siguiente:

$$36 \text{ kg m/s} = 5{,}0 \text{ kg}\, v_{1f} + 3{,}0 \text{ kg}\, v_{2f}$$

$$4{,}0 \text{ m/s} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

y resulta: $v_{1f} = 3{,}0$ m/s y $v_{2f} = 7{,}0$ m/s.

Podríamos haber resuelto también el problema desde el punto de vista del centro de masas. En este tipo de colisiones se cumple: $v_{1,CM\,(i)} = -v_{1,CM\,(f)}$ y $v_{2,CM\,(i)} = -v_{2,CM\,(f)}$

Calcularemos primero la velocidad del centro de masas.

$$v_{CM} = \frac{5{,}0 \text{ kg} \times 6{,}0 \text{ m/s} + 3{,}0 \text{ kg} \times 2{,}0 \text{ m/s}}{5{,}0 \text{ kg} + 3{,}0 \text{ kg}} = 4{,}50 \text{ m/s}$$

Las velocidades relativas son:

$$v_{1,CM\,(i)} = 6{,}0 \text{ m/s} - 4{,}50 \text{ m/s} = 1{,}50 \text{ m/s};\ v_{2,CM\,(i)} = 2{,}0 \text{ m/s} - 4{,}50 \text{ m/s} = -2{,}50 \text{ m/s}$$

Después de la colisión:

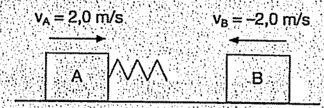
$$v_{1,CM\,(f)} = -1{,}50 \text{ m/s} \qquad v_{2,CM\,(f)} = 2{,}50 \text{ m/s}$$

Las velocidades respecto al laboratorio serán:

$$v_{1f} = -1{,}50 \text{ m/s} + 4{,}50 \text{ m/s} = 2{,}00 \text{ m/s};\ v_{2f} = 2{,}50 \text{ m/s} + 4{,}50 \text{ m/s} = 7{,}00 \text{ m/s}$$

Las velocidades finales son: $v_{1f} = 2{,}00$ m/s $\quad v_{2f} = 7{,}00$ m/s

6.20. Dos bloques A y B, de masas $m_A = 0{,}50$ kg y $m_B = 0{,}30$ kg se dirigen uno hacia el otro con una velocidad $v_A = 2{,}0$ m/s y $v_B = -2{,}0$ m/s y efectúan una colisión elástica. El bloque A lleva acoplado un muelle de constante elástica 60 N/m en la parte delantera. El movimiento tiene lugar en un plano sin fricción.



a) Calcular la energía cinética del sistema relativa al centro de masas. ¿Es la misma que si la calculamos respecto al laboratorio? Comprobar la respuesta.

b) Calcular las velocidades de los bloques respecto al laboratorio y respecto al centro de masas en el momento en que están más próximos.

c) La energía potencial del sistema en el momento en que las masas están más próximas.

d) La velocidad del bloque B en el momento en que la del bloque A es 0,20 m/s.

e) Las velocidades de los bloques después de la colisión.

Solución

a) La energía cinética del sistema relativa al centro de masas.

Calcularemos las velocidades relativas al centro de masas.

$$v_{CM} = \frac{0{,}50 \text{ kg} \times 2{,}0 \text{ m/s} + 0{,}30 \text{ kg} \times (-2{,}0 \text{ m/s})}{0{,}50 \text{ kg} + 0{,}30 \text{ kg}} = 0{,}500 \text{ m/s}$$

$$v_{A,\,CM} = 2{,}0 \text{ m/s} - 0{,}500 \text{ m/s} = 1{,}50 \text{ m/s};\ v_{B,\,CM} = -2{,}0 \text{ m/s} - 0{,}500 \text{ m/s} = -2{,}50 \text{ m/s}$$

$$E_{c(rel)} = {}^1\!/_2\, 0{,}50 \text{ kg} \times (1{,}50 \text{ m/s})^2 + {}^1\!/_2\, 0{,}30 \text{ m/s} \times (2{,}50 \text{ m/s})^2 = 1{,}50 \text{ J}$$

La energía cinética relativa no es la misma que la energía cinética respecto al laboratorio.

$$E_c = {}^1\!/_2\, 0{,}50 \text{ kg} \times (2{,}0 \text{ m/s})^2 + {}^1\!/_2\, 0{,}30 \text{ m/s} \times (2{,}0 \text{ m/s})^2 = 1{,}60 \text{ J}$$

La diferencia es: $E_c - E_{c(rel)} = 1{,}60 \text{ J} - 1{,}50 \text{ J} = 0{,}10 \text{ J}$

Esta diferencia es precisamente la energía asociada al centro de masas.

$$\tfrac{1}{2}\,M\,v_{CM}^2 = \tfrac{1}{2}\,0{,}80\text{ kg} \times (0{,}500\text{ m/s})^2 = 0{,}100\text{ J}$$

b) Las velocidades de los bloques respecto al laboratorio y respecto al centro de masas en el momento en que están más próximos.

En el momento en que los bloques están más próximos, sus velocidades relativas al centro de masas son nulas. Por tanto, sus velocidades respecto al laboratorio son iguales a la del centro de masas.

$$v'_A = 0{,}50\text{ m/s} \qquad v'_B = 0{,}50\text{ m/s}$$

c) La energía potencial del sistema en el momento en que las masas están más próximas.

En este instante, como las velocidades de los bloques son las del centro de masas, la energía cinética del sistema es:

$$E_c = 0{,}100\text{ J}$$

El resto de la energía cinética se ha transformado en energía potencial.

$$U = 1{,}60\text{ J} - 0{,}100\text{ J} = 1{,}50\text{ J}$$

d) La velocidad del bloque B en el momento en que la del bloque A es 0,20 m/s.

Para averiguar la velocidad del bloque B, basta aplicar la conservación de la cantidad de movimiento.

$$P_i = 0{,}50\text{ kg} \times 2{,}0\text{ m/s} + 0{,}30\text{ kg} \times (-2{,}0\text{ m/s}) = 0{,}400\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$P_f = 0{,}50\text{ kg} \times 0{,}20\text{ m/s} + 0{,}30\text{ kg}\,v''_B \qquad v''_B = 1{,}00\text{ m/s}$$

Igualamos la cantidad de movimiento inicial y la cantidad de movimiento final:

$$0{,}400\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 0{,}50\text{ kg} \times 0{,}20\text{ m/s} + 0{,}30\,v''_B \qquad v''_B = 1{,}00\text{ m/s}$$

e) Las velocidades de los bloques después de la colisión.

Después de la colisión las velocidades respecto al centro de masas son del mismo valor y de signo contrario a las que tenían antes de la colisión.

$$v_{A,\,CM} = -1{,}50\text{ m/s} \qquad v_{B,\,CM} = 2{,}50\text{ m/s}$$

Respecto al laboratorio:

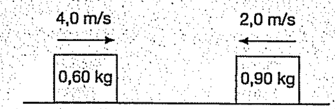
$$v_{Af} = -1{,}50\text{ m/s} + 0{,}500\text{ m/s} = -1{,}00\text{ m/s};\; v_{Bf} = 2{,}50\text{ m/s} + 0{,}500\text{ m/s} = 3{,}00\text{ m/s}$$

6.21. Un bloque de 0,60 kg se dirige hacia la derecha a 4,0 m/s por una superficie lisa. Colisiona con otro bloque de 0,90 kg que se dirige hacia la izquierda a 2,0 m/s. La colisión es inelástica y el coeficiente de restitución es $r = 0{,}75$.

a) Determinar las velocidades de los bloques después de la colisión.

b) Hallar la pérdida de energía en la colisión.

c) Resolver la cuestión *a)* desde el punto de vista del CM.



Solución

a) Las velocidades de los bloques después de la colisión.

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$0{,}60\text{ kg} \times 4{,}0\text{ m/s} + 0{,}90\text{ kg}\,(-2{,}0\text{ m/s}) = 0{,}60\text{ kg}\,v_{1f} + 0{,}90\text{ kg}\,v_{2f} \tag{1}$$

Relación entre las velocidades:

En una colisión inelástica se cumple:

$$r = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}}$$

Que sustituyendo resulta:

$$0{,}75 = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{4{,}0\text{ m/s} - (-2{,}0\text{ m/s})} \tag{2}$$

Al resolver el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$v_{1f} = -2{,}30\text{ m/s} \qquad V_{2f} = 2{,}20\text{ m/s}$$

$$v_{1f} = -2{,}3\text{ m/s} \qquad V_{2f} = 2{,}2\text{ m/s}$$

b) La pérdida de energía en la colisión.

Energía cinética inicial:

$$E_{c(i)} = \tfrac{1}{2}\,0{,}60\text{ kg} \times (4{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}\,0{,}90\text{ kg} \times (2{,}0\text{ m/s})^2 = 6{,}60\text{ J}$$

Energía cinética final:

$$E_{c(f)} = \tfrac{1}{2}\,0{,}60\text{ kg} \times (2{,}30\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}\,0{,}90\text{ kg} \times (2{,}20\text{ m/s})^2 = 3{,}76\text{ J}$$

$$E_{c(i)} - E_{c(f)} = 6{,}60\text{ J} - 3{,}76\text{ J} = 2{,}84\text{ J}$$

Se ha perdido 2,8 J.

c) Desde el punto de vista del CM.

En una colisión frontal inelástica se cumple: $v_{1,CM\,(i)} = -r\,v_{1,CM\,(f)}$ y $v_{2,CM\,(i)} = -\,r\,v_{2,CM\,(f)}$

Calcularemos primero la velocidad del centro de masas:

$$v_{CM} = \frac{0{,}60\text{ kg} \times 4{,}0\text{ m/s} + 0{,}90\text{ kg} \times (-2{,}0\text{ m/s})}{0{,}60\text{ kg} + 0{,}90\text{ kg}} = 0{,}400\text{ m/s}$$

Las velocidades relativas serán:

$$v_{1,CM\,(i)} = 4{,}0\text{ m/s} - 0{,}400\text{ m/s} = 3{,}60\text{ m/s};\ v_{2,CM\,(i)} = (-2{,}0\text{ m/s}) - 0{,}400\text{ m/s} = -2{,}40\text{ m/s}$$

Las velocidades relativas después de la colisión serán:

$$v_{1,CM\,(f)} = -(0{,}75 \times 3{,}60\text{ m/s}) = -2{,}70\text{ m/s};\ v_{2,CM\,(f)} = -\ 0{,}75 \times (-2{,}40\text{ m/s}) = 1{,}80\text{ m/s}$$

Velocidades respecto al laboratorio:

$$v_{i,f} = -2{,}70\text{ m/s} + 0{,}400\text{ m/s} = -2{,}3\text{ m/s};\ v_{2,f} = 1{,}80\text{ m/s} + 0{,}40\text{ m/s} = 2{,}2\text{ m/s}$$

6.22. Un automóvil de 1 000 kg que va a 36 km/h por una calle de una ciudad embiste por detrás a una camioneta de 9 000 kg que está detenida en un semáforo; como consecuencia del choque el automóvil queda empotrado en la camioneta. Determinar:

a) La velocidad del bloque formado por los dos vehículos después del choque.

b) La energía cinética perdida en la colisión.

Solución

a) La velocidad del bloque formado por los dos vehículos después del choque.

Se trata de una colisión completamente inelástica.

$$v_{1i} = 36\text{ km/h} = 10\text{ m/s}$$

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$1\,000\text{ kg} \times 10\text{ m/s} = (1\,000\text{ kg} + 9\,000\text{ kg})\ v_f \qquad v_f = 1{,}0\text{ m/s} = 3{,}6\text{ km/h}$$

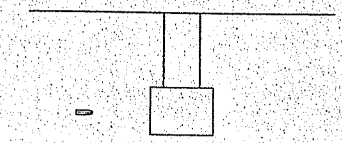
b) La energía cinética perdida en la colisión.

$$E_{ci} - E_{cf} = {}^1\!/_2\ 1\,000\text{ kg} \times (10\text{ m/s})^2 - {}^1\!/_2\ (1\,000\text{ kg} + 9\,000\text{ kg}) \times (1{,}0\text{ m/s})^2 = 45 \cdot 10^3\text{ J}$$

6.23. Un péndulo balístico es un dispositivo, como el de la figura, que permite medir la velocidad de un proyectil. Una bala de 14 g de masa se dispara horizontalmente contra un péndulo balístico. El bloque del péndulo tiene una masa de 5,55 kg. Después de incrustarse la bala, el conjunto bloque-bala asciende una altura de 40 mm. Determinar:

a) La velocidad de la bala antes de chocar con el péndulo.

b) La pérdida de energía en la colisión.



Solución

a) La velocidad de la bala antes de chocar con el péndulo.

En este proceso podemos distinguir dos partes. En primer lugar hay una colisión completamente inelástica entre la bala y el bloque. Después de la colisión, las únicas fuerzas que actúan sobre el conjunto bloque-bala son el peso y las tensiones de las cuerdas; no consideraremos la fricción con el aire. Ya que la tensión es normal a la trayectoria y no realiza trabajo; la única fuerza que realiza trabajo es el peso; por tanto, se conserva la energía mecánica. Tomaremos como referencia para la energía potencial la posición más baja del bloque.

Conservación de la cantidad de movimiento.

$$14 \cdot 10^{-3}\ kg\ v_{1i} = (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg})\ v_f \qquad (1)$$

Conservación de la energía mecánica:

Posición inicial:

$$E_{C1} = {}^1\!/_2\ (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg})\ v_f^2 \qquad U_1 = 0$$

Posición final:

$$E_{C2} = 0 \qquad U_2 = (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg}) \times 9{,}81\text{ m/s}^2 \times 40 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$${}^1\!/_2\ (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg})\ v_f^2 = (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg}) \times 9{,}81\text{ m/s}^2 \times 40 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$v_f = 0{,}885\text{ m/s}$$

Sustituimos en (1):

$$14 \cdot 10^{-3}\text{ kg}\ v_{1i} = (14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} + 5{,}55\text{ kg})\ 0{,}885\text{ m/s} \qquad v_{1i} = 351\text{ m/s};\quad v_{1i} = 3{,}5 \cdot 10^2\text{ m/s}$$

b) La pérdida de energía en la colisión.

Energía cinética inicial:

$$E_{ci} = {}^1\!/_2\ 14 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot (351\text{ m/s})^2 = 862\text{ J}$$

Energía cinética después de la colisión. La energía cinética después de la colisión es igual a la energía potencial del conjunto bala-bloque cuando alcanza la altura máxima.

$$E_{cf} = U = (5{,}55\ \text{kg} + 14 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}) \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 40 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 2{,}18\ \text{J}$$

Energía perdida: $862\ \text{J} - 2{,}18\ \text{J} = 859{,}8\ \text{J} = 8{,}6 \cdot 10^2\ \text{J}$

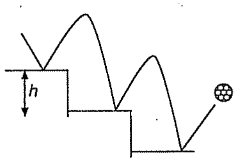
6.24. Los peldaños de una escalera tienen una altura h. Una pelota que desciende por la escalera rebota en cada peldaño hasta llegar justamente al borde del peldaño inmediatamente superior. Determinar el coeficiente de restitución entre la pelota y la escalera.

Solución

Supongamos un peldaño cualquiera, la pelota llega a él procedente de una altura $2h$ y cuando rebota alcanza una altura h. Si suponemos sentido positivo hacia arriba, las velocidades inicial y final, respectivamente, serán:

$$v_i = -\sqrt{2g\,2h} \qquad v_f = \sqrt{2\,g\,h}$$

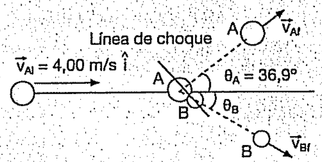
$$r = -\frac{v_f}{v_i} \qquad r = -\frac{-\sqrt{2\,gh}}{\sqrt{2g\,2h}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$



6.25. Una bola A de masa $m_A = 0{,}500$ kg que se mueve hacia la derecha a 4,00 m/s colisiona con otra bola B de masa $m_A = 0{,}300$ kg que está en reposo. Después de la colisión la bola A se mueve en una dirección que forma un ángulo $2_A = 36{,}9°$ con el eje x y la componente x de la velocidad v_{Bf} es $v_{Bf(x)} = 4{,}00$ m/s.

a) Determinar las celeridades v_{Af} y v_{Bf} y el ángulo θ_A.

b) ¿Se trata de una colisión elástica?



Solución

a) Las celeridades v_{Af} y v_{Bf} y el ángulo θ_A.

Se trata de un choque central oblicuo.

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad m_A\,\vec{v}_{Ai} = m_A\,\vec{v}_{Af} + m_B\,\vec{v}_{Bf}$$

Las ecuaciones escalares de las componentes de la cantidad de movimiento son:

$$0{,}500\ \text{kg} \times 4{,}00\ \text{m/s} = 0{,}500\ \text{kg} \times v_{Af} \cos 36{,}9° + 0{,}300\ \text{kg} \times 4{,}00\ \text{m/s} \qquad (1)$$

$$0 = 0{,}500\ \text{kg} \times 2{,}00\ \text{m/s sen}\ 36{,}9° - 0{,}300\ \text{kg}\ v_{Bf(y)} \qquad (2)$$

De la ecuación (1) obtenemos $v_{Af} = 2{,}000$ m/s.
Sustituimos en (2):

$$0 = 0{,}500\ \text{kg} \times 2{,}00\ \text{m/s sen}\ 36{,}9° - 0{,}300\ \text{kg} \cdot v_{Bf(y)}$$

$$v_{Bf(y)} = 2{,}001\ \text{m/s}$$

$$\text{tg}\ \theta_B \frac{v_{Bfy}}{v_{Bfx}} \qquad \text{tg}\ \theta_B = \frac{2{,}001}{4{,}00} \qquad \theta_B = 26{,}6°$$

El módulo de v_{Bf}:

$$v_{Bf} = \sqrt{(v_{Bfx})^2 + (v_{Bfy})^2} \qquad v_{Bf} = \sqrt{(4{,}00\ \text{m/s})^2 + (2{,}001\ \text{m/s})^2} = 4{,}472\ \text{m/s}$$

$$v_{Af} = 2{,}00\ \text{m/s} \qquad v_{Bf} = 2{,}00\ \text{m/s} \qquad \theta = 26{,}6\,°$$

b) ¿Se trata de un choque elástico?

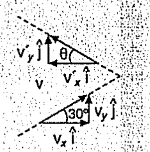
Deberemos comprobar si se ha conservado la energía cinética.

$$E_{ci} = {}^1/_2\ 0{,}500\ \text{kg} \cdot (4{,}00\ \text{m/s})^2 = 4{,}00\ \text{J}$$

$$E_{cf} = {}^1/_2\ 0{,}500\ \text{kg} \cdot (2{,}001\ \text{m/s})^2 + {}^1/_2\ 0{,}300\ \text{kg} \cdot (4{,}472\ \text{m/s})^2 = 4{,}00\ \text{J}$$

Se conserva la energía cinética, por tanto, se trata de una colisión elástica.

6.26. Se lanza una pelota contra una pared vertical perfectamente lisa. Inmediatamente antes de tocar a la pared la pelota tiene una velocidad de 10 m/s en una dirección que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar la velocidad de la pelota cuando rebota de la pared. El coeficiente de restitución entre la pelota y la pared es 0,90.



Solución

Se trata de un choque central oblicuo.
Descomponemos la velocidad en sus componentes x e y:

$$v_x = 10\ \text{m/s}\ \cos 30° = 8{,}66\ \text{m/s}$$

$$v_y = 10\ \text{m/s sen}\ 30° = 5{,}00\ \text{m/s}$$

Como la pared es lisa, el impulso que ejerce la pared sobre la pelota es normal a la pared, por tanto, sólo tiene la componente x. En consecuencia, se conserva la componente y de la velocidad.

$$v_y = v'_y \qquad v'_y = 10 \text{ m/s sen } 30° = 5{,}00 \text{ m/s}$$

La componente x de la velocidad se modifica. La velocidad de la pared es nula, tanto antes de la colisión como después de la colisión. Por tanto:

$$v'_x = -0{,}90\, v_x \qquad v'_x = -0{,}90 \times 8{,}66 \text{ m/s} = -7{,}79 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = -7{,}79 \text{ m/s } \hat{i} + 5{,}00 \text{ m/s } \hat{j}$$

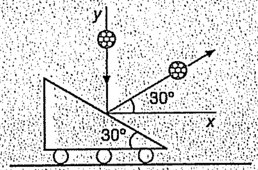
$$v = \sqrt{(7{,}79 \text{ m/s})^2 + (5{,}00 \text{ m/s})^2} = 9{,}25 \text{ m/s} \qquad \text{tg } \theta = \frac{5{,}00}{-7{,}79} \qquad \theta = -33°$$

$$\vec{v} = -7{,}8 \text{ m/s } \hat{i} + 5{,}0 \text{ m/s } \hat{j} \qquad v = 9{,}3 \text{ m/s}^2$$

6.27. Desde una altura de 4,3 m, se deja caer una pelota de masa 0,50 kg sobre una cuña de masa 5,0 kg que se encuentra en reposo. La cuña lleva unas ruedas de forma que puede moverse libremente en la dirección horizontal. El ángulo de inclinación de la cuña es $\theta = 30°$. La pelota después de efectuar un choque elástico con la cuña rebota formando un ángulo de 30° con la horizontal. Suponer que no hay fricción entre la pelota y la cuña. Determinar:

a) La velocidad de la bola inmediatamente después de la colisión.

b) La velocidad de la cuña.



Solución

a) La velocidad de la bola inmediatamente después de la colisión.

Se trata de un choque central oblicuo. Pero la componente vertical de la cantidad de movimiento no se conserva debido a la fuerza que ejerce el suelo sobre la cuña que, como no hay fricción, es vertical.

La velocidad inicial de la pelota es:

$$v_{pi} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 4{,}3 \text{ m/s}} = 8{,}18 \text{ m/s}$$

Conservación de la componente x de la cantidad de movimiento:

$$0 = m_p\, v_{pf} \cos 30° + m_c\, v_{cf} \qquad 0 = 0{,}50 \text{ kg } v_{pf} \cos 30° + 5{,}0 \text{ kg } v_{cf} \tag{1}$$

Conservación de la energía cinética:

$$\tfrac{1}{2} m_p\, v_{pi}^2 = \tfrac{1}{2} m_p\, v_{pf}^2 + \tfrac{1}{2} m_c\, v_{cf}^2; \quad \tfrac{1}{2}\, 0{,}50 \text{ kg} \times (9{,}18 \text{ m/s})^2 = \tfrac{1}{2}\, 0{,}50 \text{ kg } v_{pf}^2 + \tfrac{1}{2}\, 5{,}0 \text{ kg } v_{cf}^2 \tag{2}$$

$$\text{De (1): } v_{cf} = -0{,}10\, v_{pf} \cos 30° \tag{3}$$

Sustituimos en (2): $0{,}50 \text{ kg} \times (9{,}18 \text{ m/s})^2 = 0{,}50 \text{ kg } v_{pf}^2 + 5{,}0 \text{ kg } (0{,}10\, v_{pf} \cos 30°)^2$

$$v_{pf} = 8.85 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{pf} = 8{,}85 \text{ m/s} \cos 30°\, \hat{i} + 8{,}85 \text{ m/s sen } 30°\, \hat{j} = 7{,}66 \text{ m/s } \hat{i} + 4{,}42 \text{ m/s } \hat{j}$$

$$\vec{v}_{pf} = 7{,}7 \text{ m/s } \hat{i} + 4{,}4 \text{ m/s } \hat{j}$$

b) La velocidad de la cuña.

Sustituimos en (3) el resultado obtenido en el apartado anterior:

$$v_{fc} = -0{,}10 \times 8{,}85 \text{ m/s} \cos 30° = -0{,}766 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{fc} = -0{,}77 \text{ m/s } \hat{i}$$

CUESTIONES

6.1. La variación de cantidad de movimiento de un objeto cuando acelera de 0 a 30 m/s:

a) Es mayor que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

b) Es igual que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

c) Es menor que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

d) No se puede afirmar nada ya que depende del tiempo necesario para originar el cambio de velocidad.

6.2. El impulso necesario para que un objeto acelere desde 0 a 30 m/s:

a) Es mayor que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

b) Es igual que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

c) Es menor que cuando acelera desde 30 m/s a 60 m/s.

d) No se puede afirmar nada ya que depende del tiempo necesario para originar el cambio de velocidad.

6.3. Un automóvil de 1 400 kg, que se mueve por el garaje a 18 km/h, choca con la pared y se detiene en 70 ms. El módulo de la fuerza media que hace la pared sobre el parachoques es:

a) $10 \cdot 10^4$ N *b)* $12 \cdot 10^4$ N *c)* $6 \cdot 10^4$ N *d)* 0

6.4. Un balón de 0,5 kg se dirige perpendicularmente a 10 m/s hacia un obstáculo rígido y rebota con una velocidad de -6 m/s. La variación de la cantidad de movimiento del balón es:

a) -2 kg · m/s *b)* 2 kg · m/s *c)* 8 kg · m/s *d)* -8 kg · m/s

6.5.1. Un astronauta de 150 kg (vestido incluido) se impulsa con los pies hacia el exterior de la nave y adquiere una velocidad de 2,0 m/s. La nave, que tiene una masa de 2 500 kg, inicialmente se encuentra en reposo y puede moverse sin ninguna fricción. El impulso dura 0,20 s.

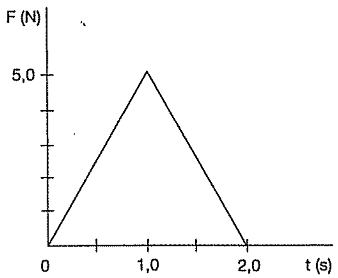
La nave adquiere una velocidad de:

a) 0 *b)* $-0{,}12$ m/s *c)* $-4{,}0$ m/s *d)* 0,12 m/s

6.5.2. La fuerza media que la nave ejerce sobre el astronauta es:

a) $1{,}5 \cdot 10^3$ N *b)* 300 N *c)* $-1{,}5 \cdot 10^3$ N *d)* -150 N

6.6. Sobre una partícula que se encuentra en reposo actúa una fuerza variable con el tiempo tal como indica la figura, la variación de cantidad de movimiento que ha originado esta fuerza ha sido:



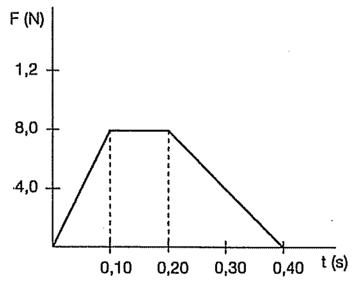
a) 0, ya que la fuerza primero aumenta y después disminuye.

b) 10 kg m/s

c) 5,0 kg m/s

d) No se puede contestar a esta pregunta puesto que no se conoce la masa de la partícula.

6.7. Sobre una partícula de 400 g que se mueve a 2,0 m/s actúa una fuerza que varía con el tiempo de acuerdo con la gráfica. La velocidad de la partícula al cabo de 0,40 s de actuar la fuerza es:



a) 5,0 m/s

b) 3,0 m/s

c) 7,0 m/s

d) 6,0 m/s

6.8. Una bola de 200 g que se mueve a 4,0 m/s incide sobre una pared elástica en una dirección que forma un ángulo de 60° con el plano de la pared. Rebota con la misma celeridad y ángulo. El módulo de la variación de la cantidad de movimiento es:

a) Cero.

b) 1,6 kg m/s

c) 0,35 kg m/s

d) 0,80 kg m/s

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

6.9. El vector de posición del centro de masas de un sistema de partículas viene dado por la expresión $\vec{r}_{CM} = 0{,}5\, t^2\, \hat{i} + 5\, t^2\, \hat{j}\ m$. La fuerza exterior que actúa sobre el sistema es:

a) Una fuerza constante.

b) Una fuerza que depende del tiempo.

c) Sobre el sistema de partículas no actúa ninguna fuerza.

d) No hay suficiente información para saber si actúa una fuerza sobre el sistema de partículas.

6.10. Un objeto que se encuentra en reposo, explota y se divide en dos fragmentos. Estos dos fragmentos se moverán:

a) En direcciones perpendiculares.

b) En la misma dirección y sentido.

c) En la misma dirección y en sentidos contrarios.

d) Pueden moverse en la misma dirección o en direcciones perpendiculares, según sea la explosión.

6.11. Dos discos de masas m_1 y m_2, respectivamente, que se encuentran sobre una masa de aire sin rozamiento, se unen mediante una cuerda elástica que se tensa. A continuación se sueltan de forma que la cuerda se relaja, la relación v_1/v_2 entre los módulos de las velocidades es:

a) m_1/m_2 *b)* $m_1\, m_2$ *c)* 1 *d)* m_2/m_1

6.12. La afirmación «la cantidad de movimiento de un sistema de partículas en un sistema de referencia ligado al centro de masas es nula» se cumple:

a) Siempre.

b) Nunca.

c) Únicamente cuando la resultante de las fuerzas externas es nula.

d) Únicamente cuando la resultante de las fuerzas internas es nula.

6.13. La condición necesaria y suficiente para que se conserve la cantidad de movimiento de un sistema de partículas es:

a) Que alguna de las partículas esté en reposo.

b) Que la resultante de las fuerzas externas sea nula.

c) Que la resultante de las fuerzas externas sea igual a la resultante de las fuerzas internas.

d) Que se conserve la energía.

6.14.1. Un sistema está constituido por dos partículas de masas respectivas $m_1 = 2{,}0$ kg y $m_2 = 4{,}0$ kg. Estas partículas se repelen con una fuerza de 4,0 N. Sobre la primera actúa una fuerza de $\vec{F} = 12$ N$\hat{i}$.

La aceleración del centro de masas será:

a) 1,3 m/s^2 $\hat{i}$ *b)* 0,67 m/s^2 $\hat{i}$ *c)* 4,0 m/s^2 $\hat{i}$ *d)* 2,0 m/s^2 $\hat{i}$

6.14.2. Las aceleraciones de estas partículas son:

a) $\vec{a}_1 = 2{,}0$ m/s^2 $\hat{i}$, $\vec{a}_2 = 2{,}0$ m/s^2 $\hat{i}$

b) $\vec{a}_1 = 4{,}0$ m/s^2 $\hat{i}$, $\vec{a}_2 = 1{,}0$ m/s^2 $\hat{i}$

c) $\vec{a}_1 = 1{,}3$ m/s^2 $\hat{i}$, $\vec{a}_2 = 1{,}3$ m/s^2 $\hat{i}$

d) $\vec{a}_1 = 6{,}0$ m/s^2 $\hat{i}$, $\vec{a}_2 = 1{,}5$ m/s^2 $\hat{i}$

6.15. Un hombre se encuentra sentado en el centro de una canoa en reposo. Si se desplaza 2,0 m hacia delante, la canoa retrocede 1,0 m. Si no consideramos ninguna fuerza externa, podemos afirmar que el centro de masas del sistema se ha desplazado:

a) 1,0 m hacia delante.

b) 0

c) 3,0 m hacia delante.

d) 1,0 m hacia atrás.

6.16. Se tiene dos masas $m_1 = 100$ g y $m_2 = 300$ g en reposo sobre una superficie horizontal perfectamente lisa. Se empujan comprimiendo un pequeño muelle entre ellas que no está sujeto a ninguna de las masas. Cuando las masas se liberan, el muelle las acelera, dando a la masa m_1 una velocidad de 6,0 m/s hacia la derecha. Una vez separadas las masas, el muelle cae al suelo y queda en reposo. La velocidad de la masa m_2 será:

a) Cero.

b) 6,0 m/s hacia la izquierda.

c) 2,0 m/s hacia la derecha.

d) 2,0 m/s hacia la izquierda.

6.17. Un bañista de 80 kg se encuentra sobre un bote de 200 kg que se dirige con una velocidad de 5,0 m/s, respecto a tierra, hacia otro bote idéntico que se encuentra en reposo. El bañista salta desde la proa de su bote hacia el otro, este bote con el bañista a bordo comienza a moverse a 3,0 m/s, respecto a tierra. El bote que antes ocupaba el bañista ahora se mueve a:

a) 2,0 m/s *b)* 2,8 m/s *c)* −2,0 m/s *d)* 0

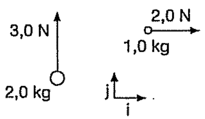
6.18. La aceleración del centro de masas del sistema de la figura es:

a) 2,0 m/s^2 $\hat{i}$ + 1,5 m/s^2 $\hat{j}$

b) 1,0 m/s^2 $\hat{i}$ + 0,50 m/s^2 $\hat{j}$

c) 0,67 m/s^2 $\hat{i}$ + 1,0 m/s^2 $\hat{j}$

d) 1,7 m/s^2 $\hat{i}$



6.19. Un sistema está formado por tres partículas de masas $m_1 = 2{,}0$ kg; $m_2 = 5{,}0$ kg y $m_3 = 7{,}0$ kg. Las dos primeras se mueven a una velocidad $\vec{v}_1 = 3{,}0$ m/s $\hat{i}$ + 9,0 m/s $\hat{j}$ y $\vec{v}_2 = -4{,}0$ m/s $\hat{i}$ + 2,0 m/s $\hat{j}$. Para que el centro de masas esté en reposo respecto al laboratorio, la tercera masa debe moverse a una velocidad:

a) $\vec{v}_3 = 2{,}0$ m/s $\hat{i}$ − 4,0 m/s $\hat{j}$

b) $\vec{v}_3 = -1{,}0$ m/s $\hat{i}$ + 11 m/s $\hat{j}$

c) $\vec{v}_3 = 1{,}0$ m/s $\hat{i}$ −11 m/s $\hat{j}$

d) $\vec{v}_3 = -2{,}0$ m/s $\hat{i}$ + 4,0 m/s $\hat{j}$

6.20.1. En un entrenamiento de fútbol el entrenador situado en la banda distribuye 4 balones a los jugadores. Todos los balones tienen la misma masa, 500 g. En un instante determinado, las velocidades de los balones son $\vec{v}_1 = 0{,}60$ m/s $\hat{i}$, $\vec{v}_2 = -0{,}60$ m/s $\hat{i}$ + 2,0 m/s $\hat{j}$, $\vec{v}_4 = 0$. La velocidad del centro de masas del sistema es $\vec{v}_{CM} = 0{,}10$ m/s $\hat{i}$ + 0,30 m/s $\hat{j}$.

La velocidad del balón 3 en este instante es:

a) 0

b) 0,20 m/s $\hat{i}$ + 0,40 m/s $\hat{j}$

c) 0,15 m/s $\hat{i}$ − 0,35 m/s $\hat{j}$

d) 0,40 m/s $\hat{i}$ − 0,80 m/s $\hat{j}$

6.20.2. La velocidad del balón 4 respecto al centro de masas es:

a) 0

b) 0,10 m/s $\hat{i}$ + 0,30 m/s $\hat{j}$

c) −0,10 m/s $\hat{i}$ − 0,30 m/s $\hat{j}$

d) 0,20 m/s $\hat{i}$ + 0,10 m/s $\hat{j}$

6.21.1. En un instante dado el centro de masas de un sistema de dos partículas está en el eje x, en $x = 3{,}0$ m y tiene una velocidad 6,0 m/s $\hat{j}$. Una partícula está en el origen. La otra partícula tiene una masa de 0,10 kg y está en reposo en el eje x, en $x = 12{,}0$ m.

La masa de la primera partícula es igual a:

a) 0,30 kg *b)* 0,20 kg *c)* 1,2 kg *d)* 0,80 kg

6.21.2. La velocidad de la primera partícula es:

a) 6,0 m/s $\hat{j}$ *b)* 8,0 m/s $\hat{j}$ *c)* 2,0 m/s $\hat{i}$ + 6,0 m/s $\hat{j}$ *d)* 6,0 m/s $\hat{i}$ + 8,0 m/s $\hat{j}$

6.22. La cantidad de movimiento de una partícula viene dada por la expresión $\vec{p} = t^3\,\hat{i} + 4\,t\,\hat{j}$. En el instante $t = 1$ s, el módulo de la fuerza resultante que actúa sobre esta partícula es:

a) 7 N *b)* 0 N *c)* 5 N *d)* 2 N

6.23. En un sistema de partículas aislado (que sólo actúan fuerzas internas):

a) La cantidad de movimiento del sistema siempre permanece constante, lo mismo que la de cualquier partícula considerada individualmente.

b) Siempre permanece constante la energía cinética del sistema y la cantidad de movimiento del sistema.

c) La cantidad del movimiento del sistema siempre permanece constante, pero la de cualquier partícula puede variar.

d) La cantidad de movimiento del sistema siempre es cero, sin que necesariamente lo sea la de cualquier partícula individual.

6.24.1. Un paracaidista A de masa $m_A = 70$ kg desciende unido a otro paracaidista B de masa $m_B = 75$ kg a una velocidad $\vec{v} = -18$ m/s $\hat{j}$. En un momento dado, el paracaidista A se separa del paracaidista B con una velocidad $\vec{v}_A = 15$ m/s $\hat{i}$ − 24 m/s $\hat{j}$.

El paracaidista B continua moviéndose a una velocidad:

a) $\vec{v}_B = 14 \text{ m/s}\,\hat{i} - 12 \text{ m/s}\,\hat{j}$
c) $\vec{v}_B = -14 \text{ m/s}\,\hat{i} - 12 \text{ m/s}\,\hat{j}$
b) $\vec{v}_B = -18 \text{ m/s}\,\hat{j}$
d) $\vec{v}_B = 14 \text{ m/s}\,\hat{i} + 12 \text{ m/s}\,\hat{j}$

6.24.2. Una vez se han separado los paracaidistas:

a) El paracaidista A y el centro de masas del sistema siguen un movimiento rectilíneo.

b) El paracaidista A sigue un movimiento rectilíneo.

c) El paracaidista A y el centro de masas del sistema siguen un movimiento parabólico.

d) El paracaidista A sigue un movimiento parabólico y el centro de masas del sistema sigue un movimiento rectilíneo.

6.25. Un objeto A de masa m_A tiene la misma energía cinética que otro objeto B de masa m_B, siendo $m_A > m_B$. Podemos afirmar que:

a) Los dos tienen la misma cantidad de movimiento.

b) La cantidad de movimiento de A es mayor que la cantidad de movimiento de B.

c) No podemos comparar las cantidades de movimiento de A y de B, porque para ello necesitamos conocer sus velocidades.

d) La cantidad de movimiento de A es menor que la cantidad de movimiento de B.

6.26. Un sistema está formado por tres partículas de masa m_1, m_2 y m_3. Estas partículas se mueven con velocidades distintas. Una fuerza exterior actúa sobre la partícula de masa m_2. Como consecuencia de ello:

a) Se modifica la velocidad de la partícula de masa m_2, pero la velocidad del centro de masas del sistema no varía.

b) Se modifica la velocidad de las tres partículas, pero no se modifica la velocidad del centro de masas.

c) Sólo se modifica la velocidad del centro de masas.

d) Se modifica la velocidad de la partícula de masa m_2 y también la velocidad del centro de masas del sistema.

6.27. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es la verdadera?

a) La cantidad de movimiento respecto al laboratorio de un sistema de partículas es igual a la cantidad de movimiento respecto al laboratorio del centro de masas.

b) La energía cinética de un sistema de partículas es igual a la energía cinética asociada al centro de masas.

c) Si únicamente actúan fuerzas exteriores sobre una partícula de un sistema, no es posible que se modifique la velocidad del centro de masas.

d) Únicamente las fuerzas interiores pueden modificar la energía cinética de un sistema de partículas.

6.28.1. La masa del bloque A es de 4,0 kg y la del bloque B de 1,0 kg. Se hace que los bloques se aproximen y compriman el muelle. Cuando el muelle se ha comprimido 10 cm, se deja evolucionar el sistema libremente desde el reposo sobre la superficie donde se encuentran que supondremos lisa. Como el muelle no

está unido a ningún bloque, en un momento dado, cae al suelo. El bloque A sale despedido con una velocidad de 1,0 m/s, hacia la izquierda.

El bloque B sale despedido:

a) Con una velocidad de 1,0 m/s, hacia la derecha.

b) Permanece en reposo.

c) Con una velocidad de 4,0 m/s, hacia la derecha.

d) Con la misma energía que el bloque A y, por tanto, con una velocidad de 2,0 m/s, hacia la derecha.

6.28.2. La constante elástica del muelle vale:

a) $4{,}0 \cdot 10^2$ N/m *b)* $1{,}5 \cdot 10^2$ N/m *c)* No se puede calcular. *d)* $2{,}0 \cdot 10^3$ N/m

COLISIONES

6.29. Una bola, de masa igual a 3,0 kg y velocidad de 0,20 m/s $\hat{i}$, choca con otra idéntica que se encuentra en reposo. Únicamente a partir de esta información podemos conocer:

a) La fuerza que una bola ejerce sobre la otra.

b) La velocidad de cada bola después de la colisión.

c) La energía cinética total de las bolas después de la colisión.

d) La cantidad de movimiento total de las bolas después de la colisión.

6.30. En cualquier colisión se conserva:

a) La cantidad de movimiento y la energía cinética.

b) Únicamente la cantidad de movimiento,

c) La cantidad de movimiento y la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas.

d) La cantidad de movimiento y la energía cinética de las partículas asociada a su movimiento respecto al centro de masas.

6.31. Se observa desde un determinado sistema de referencia que dos bolas se aproximan una a la otra, a partir de una cierta distancia interaccionan, se detienen y una vez ha finalizado la interacción, las dos bolas se mueven en sentido contrario con las respectivas celeridades que tenían antes de interaccionar. Este sistema de referencia está ligado:

a) Al laboratorio. *c)* Al centro de masas.
b) A una de las bolas. *d)* No es posible que esto ocurra.

6.32.1. Un sistema está formado por dos partículas A y B. La partícula A tiene una masa $m_A = 2{,}0$ kg y se mueve hacia la derecha, sentido que consideraremos positivo, a una velocidad respecto al centro de masas $v_{A,CM} = 12$ m/s. La otra partícula B tiene una masa $m_B = 3{,}0$ kg. La velocidad del centro de masas del sistema es $V_{CM} = 18$ m/s.

La velocidad respecto al centro de masas de la partícula B es:

a) 12 m/s *b)* −12 m/s *c)* 8,0 m/s *d)* −8,0 m/s

6.32.2. La velocidad de la partícula A respecto al laboratorio es:

a) 30 m/s *b)* −30 m/s *c)* 10 m/s *d)* −26 m/s

6.32.3. Estas dos partículas efectúan una colisión elástica. La velocidad de la partícula A respecto al laboratorio después de la colisión será :

a) 12 m/s *b)* −12 m/s *c)* 6,0 m/s *d)* −6,0 m/s

6.33. Un carrito de 40 kg choca con otro carrito de 50 kg (no interviene ninguna fuerza exterior). El módulo de la aceleración media del primer carrito es igual a 0,30 m/s^2. El módulo de la aceleración media del segundo carrito es:

a) 0,30 m/s^2 *b)* 2,0 m/s^2 *c)* 0,24 m/s^2 *d)* 1,6 m/s

6.34. Una bala de 10 g que se mueve a 200 m/s choca con un bloque de 1990 g en el que se incrusta. La velocidad del sistema bloque-proyectil, en m/s, será:

a) 1,0 *b)* 0,995 *c)* 2,0 *d)* 1,005

6.35. Un proyectil de masa 50 g que se mueve a 200 m/s atraviesa un bloque de masa 5,0 kg. Cuando el proyectil sale del bloque, éste se mueve a 0,80 m/s. El proyectil sale del bloque con una velocidad de:

a) 150 m/s *b)* 100 m/s *c)* 120 m/s *d)* 200 m/s

6.36. Un sistema está constituido por dos bloques de masas m_1 = 3,0 kg y m_2 = 2,0 kg. Las velocidades de los cuales son v_1 = 3,0 m/s y v_2 = −2,0 m/s.

Estos bloques efectúan una colisión perfectamente inelástica. La energía mecánica que se ha perdido en esta colisión es:

a) 15 J *b)* 7,0 J *c)* 17 J *d)* 0 J

6.37. Un automóvil A de masa m se dirige hacia el este con una velocidad $\vec{v}_A$. Otro automóvil B de igual masa se dirige hacia el norte con una velocidad $\vec{v}_B$. En un cruce chocan saliendo unidos hacia el noreste en una dirección que forma 30° con el este.

a) El automóvil A iba más deprisa que el B.

b) Los dos automóviles llevaban a la misma celeridad.

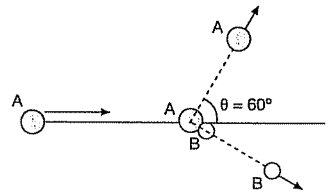
c) No se puede saber cuál iba más rápido.

d) El automóvil B iba más rápido que el automóvil A.

6.38. Un disco de masa m_1 = 2,0 kg, que se mueve sobre una mesa completamente lisa con una velocidad $\vec{v}_1 = 2\text{ m/s }\hat{i} + 6\text{ m/s }\hat{j}$, colisiona con otro disco de masa m_2 = 1 kg que lleva una velocidad $\vec{v}_2 = 5\text{ m/s }\hat{i}$. Después de la colisión los dos discos quedan acoplados. El módulo de la velocidad del conjunto será:

a) 5 m/s *b)* 10 m/s *c)* 13 m/s *d)* 0

6.39.1. Un disco A de 5,0 kg, que se mueve a 2,0 m/s sobre una superficie lisa en una dirección paralela al eje x, colisiona con otro disco B de masa 1,0 kg que se encuentra en reposo. Después de la colisión el disco A se mueve con una velocidad de 1,0 m/s en una dirección que forma un ángulo de 60° con el eje *x*.



La componente *x* de la velocidad del disco B después de la colisión es:

a) 2,5 m/s *b)* 7,5 m/s *c)* −4,3 m/s *d)* −1,5 m/s

6.39.2. La componente *y* de la velocidad del disco B después de la colisión es:

a) 2,5 m/s *b)* 7,5 m/s *c)* −4,3 m/s *d)* −1,5 m/s

SOLUCIONES

6.1. *b)*	**6.12.** *a)*	**6.21.2.** *b)*	**6.31.** *c)*
6.2. *b)*	**6.13.** *b)*	**6.22.** *c)*	**6.32.1.** *d)*
6.3. *a)*	**6.14.1.** *d)*	**6.23.** *c)*	**6.32.2.** *a)*
6.4. *d)*	**6.14.2.** *c)*	**6.24.1.** *c)*	**6.32.3.** *c)*
6.5.1. *b)*	**6.15.** *b)*	**6.24.2.** *d)*	**6.33.** *c)*
6.5.2. *a)*	**6.16.** *d)*	**6.25.** *b)*	**6.34.** *a)*
6.6. *c)*	**6.17.** *b)*	**6.26.** *d)*	**6.35.** *c)*
6.7. *c)*	**6.18.** *c)*	**6.27.** *a)*	**6.36.** *a)*
6.8. *d)*	**6.19.** *a)*	**6.28.1.** *c)*	**6.37.** *a)*
6.9. *a)*	**6.20.1.** *d)*	**6.28.2.** *d)*	**6.38.** *a)*
6.10. *c)*	**6.20.2.** *c)*	**6.29.** *d)*	**6.39.1.** *b)*
6.11. *d)*	**6.21.1.** *a)*	**6.30.** *c)*	**6.39.2.** *c)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Escribir la ecuación de dimensiones del impulso y de la cantidad de movimiento. Comprobar que coinciden.**

2 **Sobre un objeto de 10 kg de masa, que se mueve a una velocidad de 2,0 m/s, actúa durante un cierto tiempo una fuerza de 80 N y la velocidad pasa a ser 8,0 m/s. Determinar:**

a) La variación de cantidad de movimiento.

b) El impulso ejercido sobre el objeto.

c) El tiempo que ha actuado la fuerza.

Sol.: a) 60 kg · m/s; *b)* 60 N · s; *c)* 0,75 s

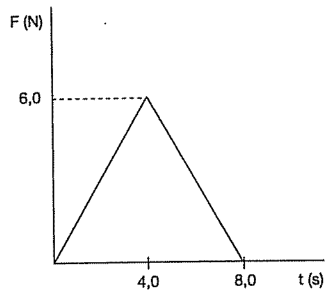
3 **Un jugador de rugby chuta una pelota de masa 0,42 kg y sale con una velocidad de 28 m/s. El tiempo de contacto ha sido $8{,}0 \cdot 10^{-3}$ s. ¿Qué fuerza media ha actuado sobre la pelota?**

Sol.: $1{,}5 \cdot 10^3$ N

4 **Una escopeta de 12 kg dispara una bala de 50 g a una velocidad de 250 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso de la escopeta?**

Sol.: 1,0 m/s

5 **En la figura se muestra cómo varía con el tiempo la fuerza F que actúa sobre una partícula de masa 5,0 kg, que inicialmente está en reposo. A partir de la gráfica, determinar:**



a) El impulso entre el instante $t_i = 0$ y el instante $t_f = 4{,}0$ s.

b) El impulso entre el instante $t_i = 0$ y el instante $t_f = 8{,}0$ s.

c) La velocidad de la partícula en el instante $t = 8{,}0$ s.

Sol.: a) 12 N · s; *b)* 24 N · s; *c)* 4,8 m/s

6 **Una ametralladora efectúa 180 disparos por minuto. La masa del proyectil es de 10 g y sale a una velocidad de 900 m/s. ¿Cuál es la fuerza media de retroceso de la ametralladora?**

Sol.: 27 N

7 **Un hombre de 70 kg se lanza desde una altura de 2,5 m. Al tocar el suelo, el hombre flexiona las piernas y tarda 0,050 s en detenerse por completo. Determinar:**

a) El impulso que recibe el hombre.

b) La fuerza media que hace el suelo sobre el hombre.

Sol.: a) $4{,}9 \cdot 10^2$ N; *b)* 10 kN

8 **Un chorro de agua con una velocidad de 20 m/s incide normalmente sobre una superficie plana y horizontal. Después del choque el agua se esparce por la superficie. Determinar la presión sobre la superficie. Densidad del agua 1 000 kg/m³.**

Sol.: $4{,}0 \cdot 10^2$ kPa

9 **La vela de un velero tiene una superficie de 8,0 m². El aire incide normalmente sobre la vela con una velocidad de 20 m/s. La densidad del aire es 1,2 kg/m³. Determinar la fuerza que ejerce el viento sobre la vela.**

Sol.: 3,8 kN

10 **En su primera etapa, el vehículo espacial Saturno V expulsaba los gases a un ritmo de $1{,}38 \cdot 10^4$ kg/s y a una velocidad relativa de $2{,}46 \cdot 10^3$ m/s. La masa inicial del vehículo era $2{,}85 \cdot 10^6$ kg. Determinar:**

a) El empuje que recibió el vehículo en la primera etapa.

b) La aceleración inicial cuando el vehículo se encontraba, en posición vertical, en la plataforma de lanzamiento.

Sol.: a) 33,9 MN; *b)* 2,10 m/s²

11 **Un coche de bomberos de masa 6 500 kg está detenido y sin frenar, empieza a lanzar agua por la manguera con una velocidad relativa de 25 m/s en una dirección que forma un ángulo de 60° con la horizontal con un ritmo de 0,15 m³/s. Determinar:**

a) La aceleración con que empieza a moverse el camión, suponiendo que, al no estar frenado, puede moverse libremente.

b) La fuerza normal que ejerce el suelo sobre el camión.

Ayuda: El camión de bomberos puede considerarse como un cohete que expulsa los gases.

Sol.: a) 0,29 m/s²; *b)* 67 kN

CENTRO DE MASAS

12 **Un sistema está formado por tres partículas de masas $m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 5{,}0$ kg y $m_3 = 7{,}0$ kg. Las dos primeras se mueven con velocidades $\vec{v}_1 = 3{,}0$ m/s $\hat{\imath} + 9{,}0$ m/s $\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_2 = -4{,}0$ m/s $\hat{\imath} + 2{,}0$ m/s $\hat{\jmath}$. ¿Qué velocidad debe tener la partícula m_3 para que el centro de masas se encuentre en reposo en el sistema L (sistema ligado al laboratorio)?**

Sol.: 2,0 m/s $\hat{\imath}$ − 4,0 m/s $\hat{\jmath}$

13 **Dos partículas de masas $m_1 = 2{,}0$ kg y $m_2 = 4{,}0$ kg con velocidades en el sistema L $\vec{v} = 17$ m/s $\hat{\imath}$ y de 8,0 m/s formando un ángulo de 120° con el eje x. Determinar:**

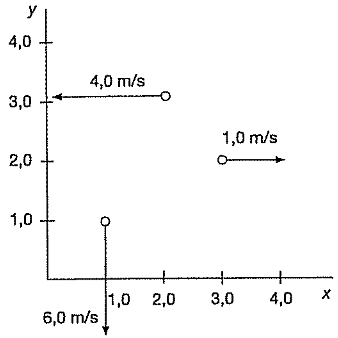
a) La velocidad del centro de masas.

b) La velocidad de cada partícula respecto al centro de masas.

c) La cantidad de movimiento de cada partícula en el sistema de referencia C.

Sol.: *a)* $3{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 4{,}6\ \text{m/s}\hat{j}$; *b)* $v_{1,CM} = 14\ \text{m/s}\ \hat{i} - 4{,}6\ \text{m/s}\hat{j}$, $v_{2,CM} = -7{,}0\ \text{m/s}\ \hat{i} + 2{,}3\ \text{m/s}\hat{j}$; *c)* $\vec{p}_1 = 28\ \text{kg m/s}\ \hat{i} - 9{,}2\ \text{kg m/s}\hat{j}$, $\vec{p}_2 = -28\ \text{kg m/s}\ \hat{i} + 9{,}2\ \text{kg m/s}\hat{j}$

14 **Tres partículas iguales de masa 1,0 kg se mueven en un plano con las velocidades señaladas en la figura. En un cierto instante se encuentran en las posiciones indicadas (las coordenadas están dadas en metros). En un momento dado, sobre la partícula que se encuentra en la posición (2,0, 3,0) actúa una fuerza $\vec{F} = 6{,}0\ \text{N}\ \hat{i}$. Determinar:**



a) La posición del centro de masas al cabo de 2,0 s.

b) La variación de cantidad de movimiento del sistema en estos 2,0 s.

Sol.: *a)* $\vec{r}_{CM\,(2,0)} = 6\ \text{m}\ \hat{i} + 2\ \text{m}\hat{j}$; *b)* $\Delta\vec{p} = 12\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\ \hat{i}$

15 **Demostrar por integración que el centro de masas de una varilla homogénea de sección uniforme está situado en el centro de la varilla.**

16 **Demostrar por integración que el centro de masas de un cilindro homogéneo de altura h se encuentra en el punto *h*/2.**

17 **Determinar el centro de masas de un cono homogéneo de radio R y altura *h*.**

Sol.: $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = h/4$, $z_{CM} = 0$

18 **Determinar el centro de masas de un sólido homogéneo formado cono de radio R y altura *h* acoplado en la parte superior de un cilindro del mismo radio y la misma altura.**

Sol.: $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = 7h/16$, $z_c = 0$

19 **Un sistema está formado por tres partículas $m_A = 2{,}0$ kg, $m_B = 5{,}0$ kg y $m_C = 3{,}0$ kg, que inicialmente se encuentran en reposo.**

a) Sobre la partícula A actúa una fuerza $\vec{F}_1 = 6{,}0\ \text{N}\ \hat{i} + 5{,}0\ \text{N}\hat{j}$ y sobre la partícula B actúa una fuerza $\vec{F}_2 = 3{,}0\ \text{N}\ \hat{i} - 9{,}0\ \text{N}\hat{j}$. Determinar la aceleración del centro de masas.

b) Si la fuerza F_2 actúa sobre la masa C y la fuerza F_1 actúa sobre la masa B, ¿cuál será ahora la aceleración del centro de masas?

Sol.: *a)* $0{,}90\ \text{m/s}^2\ \hat{i} - 0{,}40\ \text{m/s}^2\hat{j}$; *b)* $0{,}90\ \text{m/s}^2\ \hat{i} - 0{,}40\ \text{m/s}^2\hat{j}$

20 **El centro de masas de un globo aerostático de masa M se encuentra a una altura h del suelo. Del globo cuelga una cuerda de longitud l en el extremo de la cual está sujeto un hombre de masa m. El conjunto está en equilibrio. El hombre empieza a trepar por la cuerda hasta que llega el globo. Determinar la altura a la que queda el hombre cuando ha alcanzado al globo. Considerar al hombre como una masa puntual.**

Sol.: $h - (ml/(M + m))$

21 **Un hombre de 80 kg se encuentra en reposo sobre una balsa a 20 m de una roca. La masa de la balsa es de 160 kg. El hombre empieza a andar sobre la balsa a 1,5 m/s, respecto a la balsa, y se dirige hacia la roca. Determinar:**

a) La velocidad con qué se moverá la balsa.

b) Suponiendo despreciable la fuerza de fricción del agua, la distancia a la que se encontrará el hombre de la roca al cabo de 3,0.

Sol.: *a)* 0,50 m/s alejándose de la roca; *b)* 17 m

22 **Un fusil que pesa 6,0 kg dispara balas de 10 g a una velocidad de 300 m/s, respecto a la Tierra. La longitud del cañón es de 50 cm. Determinar:**

a) La velocidad de retroceso del fusil.

b) La fuerza media a la que ha estado sometida la bala.

c) El alcance máximo de la bala, si el disparo se efectúa desde una altura de 1,10 m y la bala sale en dirección horizontal.

Sol.: *a)* $-0{,}50$ m/s; *b)* $9{,}0 \cdot 10^2$ N; *c)* 142 m

23 **Un chico está sentado en un trineo en reposo sobre una pista helada, la masa del trineo y el chico es de 71 kg. En el trineo hay además tres bolas de 2,0 kg cada una. El chico lanza las bolas hacia atrás una tras otra con una celeridad respecto al trineo de 6,0 m/s. La fuerza de fricción entre el trineo y la pista puede considerarse despreciable. Determinar la velocidad del trineo y el chico después de haber lanzado la primera bola, la segunda bola y la tercera bola.**

Sol.: 0,16 m/s, 0,32 m/s, 0,48 m/s

24 **Un cohete de masa M que se mueve a velocidad constante tiene una energía cinética E_c. Explota y se divide en tres fragmentos de igual masa. Inmediatamente después de la explosión, un fragmento se mueve en la misma dirección y sentido que el cohete y tiene una energía cinética K/3; los otros dos fragmentos se mueven en direcciones que forman un ángulo de 60° y − 60°, respectivamente, con la dirección del movimiento del cohete. Supondremos despreciable la masa de la carga explosiva. Determinar:**

a) Las celeridades de los fragmentos.

b) La energía total que han recibido los fragmentos en la explosión.

Sol.: *a)* V, 2V, 2V; *b)* 2 E_c

25 **Una vagoneta de 500 kg se mueve sin fricción en línea recta por una vía a 7,0 m/s. En un cierto instante comienza a recibir grano de una tolva. ¿Cuál será la velocidad de la vagoneta cuando ha recibido 200 kg de grano?**

Sol.: 5,0 m/s

26 **La vagoneta del problema anterior, una vez ha recibido los 200 kg de grano, comienza a vaciarse a través de un tubo vertical, ¿cuál será la velocidad cuando han caído 100 kg de grano?**

Sol.: 5,0 m/s

27 **Un carretón de 24 kg de masa está detenido y sin frenar. Un señor lanza un paquete de 8,0 kg sobre la plataforma del carretón con una velocidad horizontal de 2,0 m/s. Al principio el paquete se desliza sobre la superficie del carretón, a causa de la fuerza de fricción entre ambos el carretón también comienza a moverse. Llega un momento en el que el paquete deja de deslizarse sobre el carretón y los dos se mueven juntos a la misma velocidad. El movimiento del carretón se puede considerar sin fricción.**

a) ¿Cuál será la velocidad final del conjunto paquete-carretón?

b) ¿Cuál será la pérdida de energía cinética como consecuencia de la fricción entre el paquete y el carretón?

Sol.: a) $v_2 = 0{,}50$ m/s; *b)* 8,0 J

28 **En una cantera se ha dinamitado una roca que ha resultado descompuesta en tres fragmentos A, B y C. Los tres fragmentos de masa $m_A = 20$ kg, $m_B = 20$ kg y $m_C = 10$ kg han salido despedidos con velocidades $\vec{v}_A = 15$ m/s $\hat{j}$, $v_B = 10$ m/s $\hat{i}$ y $v_C = v_{Cx}\,\hat{i} + v_{cy}\,\hat{j}$. No considerar la arenisca que se ha desprendido en la explosión. Calcular las componentes y el módulo de $\vec{v}_C$.**

Sol.: $v_{Cx} = -20$ m/s, $v_{cy} = -30$ m/s, $v_c = 36$ m/s

COLISIONES

29 **Dos bolas de billar idénticas que se mueven, respectivamente, a 4 m/s y 6 m/s efectúan una colisión frontal directa y elástica. Determinar las velocidades de las bolas después de la colisión:**

a) Si antes de chocar se mueven en el mismo sentido.

b) Si se mueven en sentidos contrarios.

Sol.: a) $v_{1f} = 6$ m/s y $v_{2f} = 4$ m/s; *b)* $v_{1f} = -6$ m/s y $v_{2f} = 4$ m/s

30 **Un bloque de masa $m_A = 3{,}0$ kg, que se mueve hacia la derecha a 4,0 m/s, choca con otro bloque B de masa $m_B = 8{,}0$ kg que se mueve hacia la izquierda a 1,5 m/s. Determinar:**

a) Las respectivas velocidades de los bloques respecto al centro de masas antes y después de la colisión.

b) Las velocidades de los bloques respecto al laboratorio después de la colisión.

Sol.: a) $v_{1,CM\,(i)} = 4{,}0$ m/s, $v_{2,CM\,(i)} = -1{,}5$ m/s, $v_{1,CM\,(f)} = -4{,}0$ m/s, $v_{2,CM\,(f)} = 1{,}5$ m/s;
b) $v_{1f} = -4{,}0$ m/s, $v_{2f} = 1{,}5$ m/s

31 **Un bloque de masa 5,00 kg que se mueve a 10,0 m/s choca frontalmente con otro idéntico que está en reposo.**

a) Si la colisión es perfectamente inelástica, determinar la velocidad con que ambos bloques se mueven juntos y la variación de energía que tiene lugar en la colisión.

b) Si la colisión es elástica, ¿cuáles serán las velocidades de los bloques después de la colisión?

Sol.: a) $v_f = 5{,}00$ m/s^2, $\Delta E_c = -125$ J; *b)* $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = 10{,}0$ m/s

32 **Demostrar que en una colisión frontal elástica entre dos objetos de la misma masa de velocidades respectivas v_{1i} y v_{2i}, se cumple $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, es decir, se intercambian las velocidades.**

33 **Una bola de acero de 2,0 kg que se mueve con una celeridad de 8,0 m/s colisiona con otra bola de acero de 5,0 kg que se mueve a lo largo de la misma recta y en el mismo sentido a 1,0 m/s. El coeficiente de restitución del acero es de 0,90. Determinar las velocidades de las bolas después de la colisión. Resolver el problema primero respecto a un sistema ligado al laboratorio y después respecto a un sistema ligado al centro de masas.**

Sol.: $v_{1f} = -1{,}5$ m/s, $v_{2f} = 4{,}8$ m/s

34 **Un objeto de masa $m_1 = 1{,}5$ kg está en reposo. Sobre él incide frontalmente un cuerpo de masa $m_2 = 0{,}50$ kg que se mueve inicialmente hacia la derecha con una velocidad de 0,20 m/s. La fuerza de interacción sólo depende de la separación de los cuerpos (una fuerza de este tipo es conservativa). Determinar:**

a) La velocidad final de cada objeto.

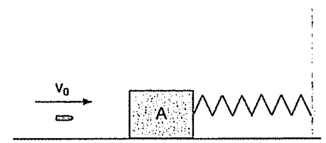
b) La energía cinética de cada objeto cuando la separación pasa por un mínimo.

Sol.: a) $v_{1f} = 0{,}10$ m/s, $v_{2f} = -0{,}10$ m/s; *b)* $E_{c1} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ J, $E_{c2} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ J

35 **Para determinar el coeficiente de restitución entre el marfil y el acero, se deja caer una bola de marfil sobre una gruesa placa de acero firmemente sujeta al suelo. Si la bola cae desde una altura de 1,00 m, rebota hasta una altura de 64 cm. ¿Cuál es el coeficiente de restitución entre el marfil y el acero?**

Sol.: 0,80

36 **Un proyectil de 10 g de masa que se mueve horizontalmente choca y se incrusta en un bloque de 0,99 kg de masa que está en una superficie horizontal sin fricción y unido a un muelle de constante elástica 100 N/m; este muelle tiene el otro extremo sujeto a una pared. Después del impacto el muelle tiene una compresión máxima de 10 cm. Determinar:**



a) La velocidad del proyectil antes de la colisión.

b) La pérdida de energía cinética en la colisión.

Sol.: a) $v_i = 1{,}0 \cdot 10^2$ m/s; *b)* 50 J

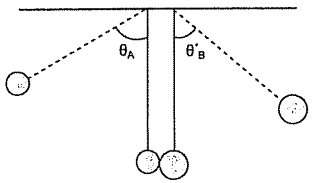
37 **Una bola perfectamente elástica de masa $m_1 = 2{,}0$ kg, que se desliza sin rodar hacia la derecha a 7,0 m/s, efectúa un choque central directo con otra bola también perfectamente elástica de masa $m_2 = 3{,}0$ kg que se desliza en el mismo sentido a 2,0 m/s. Determinar:**

a) La energía cinética del sistema cuando las bolas han alcanzado la máxima deformación.

b) La energía potencial máxima de deformación elástica.

Sol.: a) 40 J; *b)* 15 J

38 **La esfera A de la figura, que tiene una masa de 2,0 kg y que está atada a una cuerda, se suelta desde el reposo cuando $\theta_A = 60°$ y choca con otra esfera B de masa de 3,0 kg, también suspendida de una cuerda. El choque es perfectamente elástico. La distancia del punto de suspensión de las cuerdas al centro de cada esfera es de 2,0 m. Determinar:**



a) La altura máxima que alcanza la esfera B.

b) El ángulo θ'_B correspondiente a esta altura máxima.

c) El ángulo θ'_A que corresponde a la altura máxima que alcanza la bola A al rebotar.

Sol.: *a)* 0,64 m; *b)* 48°; *c)* 11°

39 **Un automóvil de 1 500 kg que viaja hacia el norte a 108 km/h choca con otro de 1 000 kg y ambos quedan detenidos. Determinar la velocidad del segundo automóvil inmediatamente antes del choque.**

Sol.: 162 km/h hacia el sur

40 **Desde el interior de una carreta de 250 kg que está en reposo y que puede moverse libremente se dispara una bala de 30 g a 500 m/s, respecto al laboratorio:**

a) Determinar la velocidad de la carreta mientras la bala está en el aire.

b) Si la bala se incrusta en la pared opuesta, ¿cuál es la velocidad de la bala y la carreta después del impacto?

Sol.: *a)* 6,0 cm/s en sentido contrario al de la bala; *b)* 0

41 **Desde una altura de 82 cm se dejan caer monedas sobre el platillo de una balanza; el choque entre el platillo y las monedas son completamente inelásticos. La masa de una moneda es de 10 g y llegan 50 monedas por segundo. ¿Qué marcará la balanza al cabo de 10 s?**

Sol.: 5,2 kg

42 **Un avión A de $15 \cdot 10^3$ kg que va a 900 km/h a una altura de 960 m choca con otro avión B de $20 \cdot 10^3$ kg que viaja en sentido contrario. A consecuencia del choque los dos aparatos forman un amasijo que cae a una distancia de 98 m del pie de la vertical que pasa por el punto donde se ha producido el choque. Determinar la velocidad del avión B inmediatamente antes del choque.**

Sol.: $6,3 \cdot 10^2$ km/h

43 **Un automóvil de 1 200 kg que viaja hacia el norte a 54 km/h, en un cruce choca con una furgoneta de 2 500 kg que viaja hacia el este a 36 km/h. Los dos vehículos quedan empotrados**

y salen del punto de impacto formando una sola masa. Suponiendo que el choque ha sido central, determinar:

a) La cantidad de movimiento total justo después de la colisión.

b) La velocidad del conjunto de los dos coches inmediatamente después de la colisión.

(Tomar los ejes de coordenadas de forma que el eje x esté dirigido de oeste a este y el eje y de sur a norte).

Sol.: *a)* $\vec{p} = 24 \cdot 10^3$ kg · m/s $\hat{i}$ + $18 \cdot 10^3$ kg · m/s $\hat{j}$; *b)* $\vec{v} = 6,5$ m/s $\hat{i}$ + 4,9 m/s $\hat{j}$, $v = 8,1$ m/s

44 **Un disco de hockey sobre hielo A que está en reposo recibe un impacto de otro disco B idéntico que se mueve en la dirección del eje x y sentido positivo a 20 m/s. La colisión es elástica. Después de la colisión el disco B se mueve en una dirección que forma un ángulo de 37° con el eje x. Determinar la velocidad final de cada disco.**

Sol.: $v_{Af} = 12$ m/s, $2_A = -53°$; $v_{Bf} = 16$ m/s, $2_B = 37°$

45 **Una bola de billar A que se mueve a 4,0 m/s en la dirección del eje x y en sentido positivo colisiona con otra bola idéntica B que está en reposo. Después de la colisión la bola A se mueve en una dirección que forma un ángulo de 30° con el eje x y la bola B se mueve en una dirección que forma un ángulo −45° con el mismo eje. Determinar:**

a) La celeridad de cada bola después de la colisión.

b) La fracción de energía que se ha perdido en la colisión.

Sol.: *a)* $v_{Af} = 2,9$ m/s, $v_{Bf} = 2,0$ m/s; *b)* 20%

46 **Se lanza una pelota a una pared lisa; en el instante antes de chocar tiene una velocidad de módulo 10 m/s que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Cuando rebota, la componente x de la velocidad es 7,8 m/s. Determinar:**

a) El módulo de la velocidad en el instante en que la pelota rebota.

b) La dirección del movimiento de la pelota cuando rebota de la pared.

Sol.: *a)* $v_f = 9,3$ m/s; *b)* 33°

47 **Una pelota de masa $m_A = 0,450$ kg se mueve en una dirección horizontal a 12 m/s y choca elásticamente contra una cuña de masa $m_B = 6,0$ kg que está parada, como consecuencia del choque la pelota rebota hacia arriba en dirección vertical. La cuña tiene unas ruedas y puede moverse libremente sobre el suelo. El ángulo de inclinación de la cuña es $\theta = 45°$. Determinar la velocidad de la cuña y la velocidad de la pelota después del choque.**

Sol.: $v_{fc} = 0,90$ m/s, $v_{fp} = 12$ m/s

48 **Un jugador de billar golpea una bola A y sale con una celeridad de 5,0 m/s, choca con otra bola idéntica B que está en reposo y se desvía 45° de su dirección original y hace carambola con una tercera bola C, idéntica, que también está en reposo, el choque es frontal. Suponiendo las superficies sin rozamiento y los choques perfectamente elásticos, determinar las velocidades finales de las bolas A y C.**

Sol.: Cero y 3,5 m/s en una dirección que forma 45° con la dirección original de la bola A.

CAPÍTULO 7

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO. ELASTICIDAD

7.1. EQUILIBRIO DEL SÓLIDO

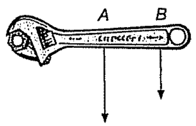
CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Un sólido rígido es un sistema de partículas en el que la distancia entre las partículas permanece constante con el tiempo. Rigurosamente no hay ningún cuerpo que sea perfectamente rígido, ya que al actuar una fuerza los cuerpos se deforman. Pero existen muchos cuerpos que constituyen una buena aproximación a un sólido rígido. En esta primera parte, consideraremos sólidos en los que las deformaciones sean despreciables y que no afecten a las condiciones de equilibrio o de movimiento al actuar sobre ellos una fuerza. Todos los teoremas generales de los sistemas de partículas son aplicables al sólido rígido.

MOMENTO DE UNA FUERZA

Una de las características de un sólido que le diferencia de una partícula es que el sólido puede tener un *movimiento de rotación*. Al considerar el movimiento de un sólido hay que tener en cuenta la forma de éste y los puntos en que se aplican las fuerzas.

Cuando tratamos de desenroscar una tuerca con una llave, sabemos por experiencia que si aplicamos la fuerza en el punto A debemos hacer una fuerza superior que si la aplicamos en el punto B.



El momento de una fuerza respecto a un punto se define como el producto del módulo de la fuerza por el brazo de palanca de la fuerza respecto al punto. El brazo de palanca es la distancia del punto a la línea de acción de la fuerza. El momento de la fuerza F de la figura respecto al punto O es:

$$\tau_0 = F\, b$$

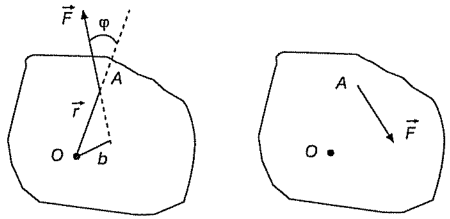
donde b es el brazo de palanca.

Podemos expresarlo también en función del módulo del vector de posición del punto de aplicación de la fuerza respecto al punto O, teniendo en cuenta que $b = r$ sen n, escribimos:

$$\tau_0 = F\, r \operatorname{sen} \varphi$$

En el SI el momento de una fuerza se mide en N · m.

El momento de la fuerza F respecto al punto O nos mide la tendencia de esta fuerza a hacer girar el sólido respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por O.



(a) (b)

Supondremos que las fuerzas están contenidas en un plano, el plano de la figura, en este caso no es necesario utilizar la notación vectorial para el cálculo de momentos.

La fuerza $\vec{F}$ de la Figura *(a)* tiende a hacer girar el objeto en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, sentido *antihorario,* y en la Figura *(b)* tiende a hacer girar el objeto en sentido *horario.* Por convenio, se asigna un signo a los momentos según sea el sentido de la rotación que tiende a originar el momento. Habitualmente, se consideran positivos los giros en sentido antihorario y negativos los giros en sentido horario.

Cuando sobre un sólido actúan distintas fuerzas coplanarias, el momento resultante respecto a un punto se obtiene sumando algebraicamente los correspondientes momentos de todas las fuerzas referidos al mismo punto.

$$\tau_O = \sum_{i=1}^{n} \tau_O^i$$

El momento de una fuerza respecto a un punto puede obtenerse también sumando los respectivos momentos de sus componentes respecto al mismo punto.

En la resolución de problemas muchas veces es conveniente referir los momentos al punto por donde pasen las líneas de acción del mayor número de fuerzas posible, de esta forma los momentos de estas fuerzas serán nulos.

CENTRO DE GRAVEDAD

El centro de gravedad, CG, de un cuerpo es el punto donde actúa el peso. Podemos considerar un sólido como formado por un conjunto de partículas cada una de las cuales tiene su correspondiente peso, la resultante de los pesos de todas ellas es el peso del sólido. El momento del peso de un cuerpo respecto a cualquier punto es igual a la suma de los momentos de las partículas que lo forman referidos al mismo punto. El centro de gravedad de un cuerpo coincide con su *centro de masas,* a no ser que este objeto sea tan extenso que las partículas que lo forman experimenten diferentes aceleraciones de la gravedad.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO

La condición de equilibrio para una partícula es que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella sea nula.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

Esta ecuación puede expresarse en forma escalar mediante tres ecuaciones:

$$F_x = \sum_i F_{xi} = 0 \qquad F_y = \sum_i F_{yi} = 0 \qquad F_z = \sum_i F_{zi} = 0$$

Que en el caso de fuerzas coplanarias se reducen a dos.

En el caso de un sólido esta condición es necesaria pero no suficiente. Debe cumplirse también que la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido respecto a un punto cualquiera sea nula (equilibrio de rotación).

$$\tau = \sum_i \tau^i = 0$$

No es necesario indicar respecto a qué punto se toma los momentos porque si $\sum_i F_i = 0$ y $\sum_i \tau_O^i = 0$ se cumple $\sum_i \tau_{O'}^i = 0$ para cualquier punto O'.

Cuando se cumple la primera condición se dice que el sólido se encuentra en equilibrio *traslacional;* si se cumple la segunda, el sólido está en equilibrio *rotacional.* Si se cumplen las dos, el sólido está en equilibrio traslacional y en equilibrio rotacional.

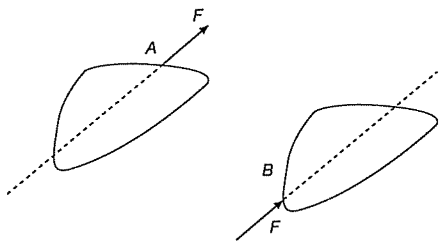
Casos particulares

Equilibrio de un sólido bajo la acción de dos fuerzas. Si un sólido que está sometido sólo a dos fuerzas se encuentra en equilibrio, necesariamente estas fuerzas deben tener el mismo módulo, la misma línea de acción y sentidos opuestos y, por tanto, son también coplanarias.

Equilibrio de un sólido bajo la acción de tres fuerzas. Si un sólido sometido a la acción de sólo tres fuerzas se encuentra en equilibrio, estas fuerzas son coplanarias y las líneas de acción de estas tres fuerzas son concurrentes o bien las tres fuerzas paralelas.

PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

Según el principio de transmisibilidad, el efecto de una fuerza sobre el equilibrio de un sólido es el mismo cualquiera que sea el punto del sólido sobre el que actúa mientras este punto esté en la línea de acción de la fuerza.



7.2. ELASTICIDAD

La elasticidad estudia la relación entre las fuerzas que actúan sobre los objetos y las deformaciones que producen. Aquellos materiales que recuperan su forma original cuando cesa la fuerza que ha provocado la deformación se denominan *elásticos*. Hay materiales, como la plastilina o el barro, que no recuperan la forma cuando se suprime la fuerza que los ha deformado, estos materiales se denominan *inelásticos* o *plásticos*. Muchos materiales se comportan como elásticos hasta un cierto límite de deformación, a partir del cual ya no recuperan su forma original.

La deformación no sólo depende de la fuerza y del tipo de material, sino también depende del área de la superficie sobre la que actúa la fuerza. Se define el *esfuerzo* o *tensión* como la fuerza por unidad de área.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Donde σ representa el esfuerzo, F la fuerza y A el área. En el Sistema Internacional el esfuerzo se mide en Pa.

La deformación de un objeto depende también de sus dimensiones, por ello cuando se habla de deformación nos referimos a la variación relativa de su forma o dimensiones. Por ejemplo, cuando sobre una varilla de longitud l_0 actúa un esfuerzo de tracción se alarga, sea Δl el alargamiento, la deformación será:

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta l}{l_o}$$

Si los esfuerzos y las deformaciones son pequeños, en muchas ocasiones, se cumple la ley de Hooke, según la cual las deformaciones son directamente proporcionales a los esfuerzos. La razón entre el esfuerzo o tensión y la deformación se denomina *módulo de elasticidad.*

$$\textit{Módulo de elasticidad} = \frac{\textit{Esfuerzo}}{\textit{Deformación}}$$

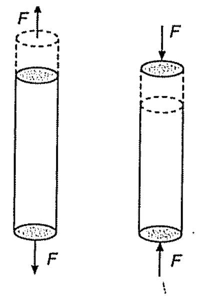
ESFUERZO DE TRACCIÓN Y ESFUERZO DE COMPRESIÓN

Un esfuerzo de tracción produce un alargamiento cuando sobre los extremos de una barra actúan dos fuerzas que son iguales y opuestas y de dirección perpendicular a la superficie de la barra, estas fuerzas tienden a alargarla y se dice que son fuerzas de tracción. El valor del esfuerzo será el cociente entre

el módulo de una fuerza y el área de la superficie de la barra sobre la que actúa la fuerza y la deformación es el cociente entre el alargamiento y la longitud inicial. Si se cumple la ley de Hooke, tendremos:

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{lo}$$

El módulo de elasticidad, Y, se denomina *módulo de Young*. Como la deformación no tiene unidades, ya que es el cociente entre dos longitudes, las unidades del módulo de Young son las mismas que las del esfuerzo. El módulo de Young de un material nos da una información de la resistencia de este material a cambiar de longitud.



Si las fuerzas actúan en sentido contrario a las de tracción, es decir, empujan en lugar de tirar, decimos que la barra está sometida a un *esfuerzo de compresión*. Un esfuerzo de compresión en vez de estirar el material lo comprime. Para materiales homogéneos, como el acero, el módulo de elasticidad de compresión es igual al de tracción, es decir, es el módulo de Young. Para materiales no homogéneos, como el hormigón, los módulos de elasticidad de tracción y de compresión son diferentes.

ESFUERZO DE CORTE O CIZALLADURA

Supongamos, por ejemplo, un bloque en forma de cubo en el que la base y la cara superior, paralela a la base, están sometidas a sendas fuerzas tangenciales a ellas, siendo estas fuerzas de sentido contrario, decimos que este cubo está sometido a un esfuerzo de *corte* o *cizalladura*. Una de las fuerzas puede ser la fuerza de rozamiento estático. El esfuerzo de corte o cizalladura, σ, se define como el cociente del módulo de la fuerza tangente a una superficie y el área, A, de la misma: $\sigma = \frac{F}{A}$

El efecto de estas fuerzas es una deformación consistente en que los planos paralelos a la base se deslizan unos respecto a otros. El volumen del cubo no se ha modificado ya que el área de la base y la altura no varían. La deformación de corte, ε, es el cociente entre el desplazamiento de un vértice del cubo, Δl, y la dimensión transversal h:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{h}$$

Este cociente es igual a la tangente del ángulo ϕ: $\frac{\Delta l}{h} = \text{tg } \phi$

Para ángulos pequeños la tangente es prácticamente igual al ángulo expresado en radianes, tg $\phi = \phi$. Por tanto la deformación es igual ϕ expresado en radianes.

El módulo de elasticidad, G, recibe el nombre de módulo de rigidez o módulo de corte. Es una medida de la resistencia de los planos de un determinado material a deslizar unos respecto a otros. Para deformaciones que cumplen la ley de Hooke podemos escribir:

$$G = \frac{F/A}{\Delta l/h} \text{ o } G = \frac{F/A}{\phi}$$

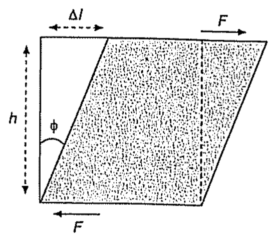
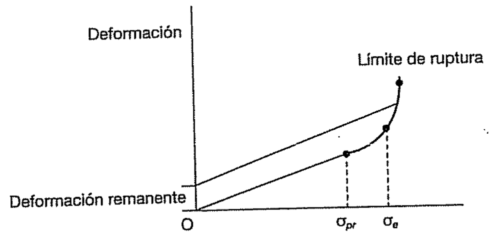


DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

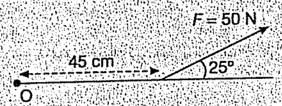
Supongamos, por ejemplo, un alambre que está suspendido verticalmente de un punto fijo y que hemos colocado un pequeño peso en el otro extremo, si vamos añadiendo sucesivamente nuevos pesos, al representar gráficamente las deformaciones frente a las tensiones o esfuerzos nos encontraremos que hasta un cierto valor de esfuerzo σ_{pr}, llamado *límite de proporcionalidad*, hay un tramo recto, es decir, la deformación es proporcional al esfuerzo, se cumple la ley de Hooke. Luego no se cumple dicha ley y la línea se curva. Hasta un determinado esfuerzo σ_e, denominado *límite de elasticidad*, cuando retiramos las cargas, se va siguiendo la curva en sentido inverso, el proceso es reversible, y, cuando se anula la carga, la longitud es la original. Si sobrepasamos el límite de elasticidad, al quitar los pesos la curva de descarga, no coincide con la de carga y, por tanto, no se obtienen las mismas longitudes, este fenómeno se denomina *histéresis mecánica*. Cuando la carga es cero, la longitud del alambre es superior a la original, presenta una *deformación remanente*. Si más allá del límite de elasticidad se sigue aumentando la carga, llega un momento en que con un incremento pequeño de esfuerzo se produce una gran deformación y por último se produce la ruptura en el *límite de ruptura*; el esfuerzo aplicado en este punto es el *esfuerzo de ruptura*.



PROBLEMAS RESUELTOS

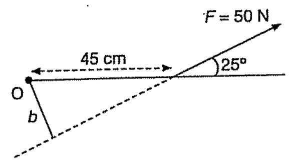
EQUILIBRIO DEL SÓLIDO

7.1. Determinar el momento respecto al punto O de la fuerza de la figura.



Solución

Aplicaremos la expresión de la definición de momento: $\tau_o = F\,b$.



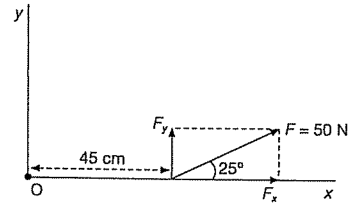
Obsérvese que el brazo de palanca, b, cumple: $b = 0{,}45$ m sen 25°

$$\tau_o = 50\text{ N} \times 0{,}45\text{ m sen } 25° = 9{,}50\text{ N}\cdot\text{m}$$

Esta fuerza producirá un movimiento de rotación en sentido antihorario:

$$\tau_o = 9{,}5\text{ N}\cdot\text{m sentido antihorario}$$

Podemos también descomponer esta fuerza en sus dos componentes, F_x y F_y, calcular el momento de cada una de ellas y luego sumarlos.



La línea de acción de la componente F_x pasa por el punto O, por tanto el brazo de palanca es cero y el momento de esta fuerza respecto a O es nulo. El brazo de palanca de la componente F_y respecto al punto O mide 45 cm. Calcularemos F_y:

$$F_y = 50\text{ N sen } 25° = 21{,}1\text{ N}$$

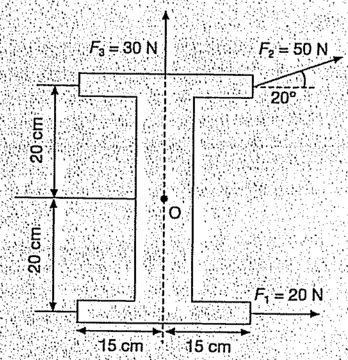
Para calcular el momento aplicaremos la misma expresión que en la solución anterior: $\tau_O = F\,b$

$$\tau_o = 21{,}1\text{ N} \times 0{,}45\text{ m} = 9{,}49\text{ N}\cdot\text{m}$$

Esta fuerza producirá un movimiento de rotación en sentido antihorario:

$$\tau_o = 9{,}5\text{ N}\cdot\text{m sentido antihorario}$$

7.2. Determinar el momento resultante respecto al punto O de las fuerzas que actúan sobre el perfil de la figura.



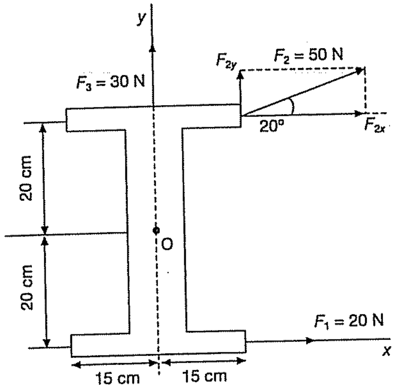
Solución

El momento resultante respecto a un punto de un conjunto de fuerzas coplanarias se obtiene sumando algebraicamente los correspondientes momentos de todas las fuerzas referidos al mismo punto.

$$\tau_O = \sum_{i=1}^{n} \tau_O^i$$

En el caso de la fuerza F_2 la descompondremos en sus componentes F_x y F_y.

$$F_{2x} = 50 \text{ N} \cos 20° = 46{,}9 \text{ N} \qquad F_{2y} = 50 \text{ N sen } 20° = 17{,}1 \text{ N}$$



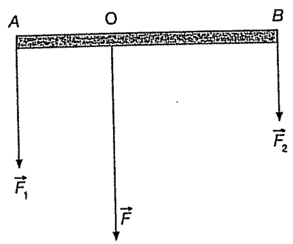
Tomaremos sentido positivo el contrario al del movimiento de las agujas del reloj. La fuerza F_1 tiende a producir un giro en sentido antihorario; la componente x de la fuerza F_2 tiende a producir una rotación en sentido horario, mientras que la componente y de esta fuerza tiende a producir una rotación en sentido antihorario; la línea de acción de la fuerza F_3 pasa por O, por tanto su brazo de palanca es cero.

$$\circlearrowleft + \quad \tau_O = \sum_{i=1}^{n} \tau_O^i \,; \; \tau_O = 20 \text{ N} \times 0{,}20 \text{ m} - 46{,}9 \text{ N} \times 0{,}20 \text{ m} + 17{,}1 \text{ N} \times 0{,}15 \text{ m} + 30 \text{ N} \times 0 = $$
$$= -2{,}81 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_0 = 2{,}8 \text{ Nm sentido horario}$$

7.3. Demostrar que la resultante de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ paralelas, del mismo sentido aplicadas a un objeto cualquiera, por ejemplo una barra, y cuyas líneas de acción pasan respectivamente por los puntos A y B del objeto es una fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo F es $F = F_1 + F_2$ y su línea de acción pasa por un punto O situado entre A y B que cumple $F_1 \times (AO) = F_2 \times (OB)$.

Solución



Como las dos fuerzas coplanarias tienen la misma dirección, el módulo de la resultante, $\vec{F}$, es la suma algebraica de los módulos de las fuerzas. Consideraremos sentido positivo el de las fuerzas, por tanto: $F = F_1 + F_2$.

Además, para que la resultante produzca el mismo efecto mecánico que las dos fuerzas juntas, el momento de la fuerza resultante respecto a cualquier punto ha de ser igual a la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto a este mismo punto. Referiremos los momentos al punto O, de esta forma el momento de F será cero. Tenemos:

$$\tau_O = \sum_{i=1}^{n} \tau_O^i = 0$$

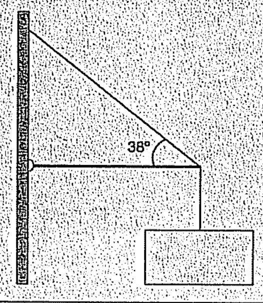
Como para que se cumpla esta expresión es necesario que los momentos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tengan sentidos contrarios, ello exige que el punto O esté situado entre A y B.

$$\circlearrowleft + \quad F_1 \times (AO) - F_2 \times (OB) = 0 \qquad F_1 \times (AO) = F_2 \times (OB)$$

7.4. Un anuncio que pesa 180 N cuelga del extremo de una barra de longitud 1,60 m que pesa 60 N. La barra tiene un extremo unido a una pared por medio de una articulación, el otro extremo está sujeto por un cable atado a la pared que forma un ángulo de 38° con la barra. Determinar:

a) La tensión del cable.

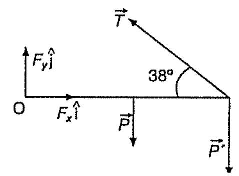
b) Las componentes de la fuerza ejercida por la articulación.



Solución

a) La tensión del cable.

Dibujaremos el diagrama del sólido libre de la barra. Las fuerzas que intervienen son el peso, $\vec{P}$, peso del anuncio $\vec{P}'$, la tensión del cable, $\vec{T}$, la componente vertical, F_y, de la fuerza que hace la articulación y la componente horizontal, F_x, de esta misma fuerza.



Aplicaremos las condiciones de equilibrio del sólido.

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \Sigma F_x = 0 \qquad F_x - T \cos 38° = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \qquad T \text{ sen } 38° + F_y - 180 \text{ N} - 60 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Obsérvese que tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, por tanto, para resolver el problema necesitamos una tercera ecuación que es la segunda condición de equilibrio del sólido.

Referiremos los momentos al punto A.

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_O^i = 0;\ T \times 1{,}60\ \text{m sen } 38° - 180\ \text{N} \times 1{,}60\ \text{m} - 60 \times 0{,}80\ \text{m} = 0\ T = 341\ \text{N}$$

$$T = 3{,}4 \cdot 10^2\ \text{N}$$

Sustituimos en (1):

$$F_x - 341\ \text{N} \cos 38° = 0 \qquad F_x = 268\ \text{N}$$

Ahora sustituimos T en (2):

$$341\ \text{N sen } 38° + F_y - 180 - 60\ \text{N} = 0 \qquad F_y = 30{,}0\ \text{N}$$

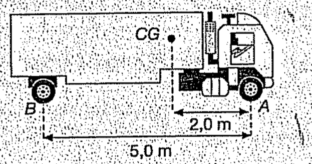
b) Componentes de la fuerza ejercida por la articulación.

$$F_x = 2{,}7 \cdot 10^2\ \text{N} \qquad F_y = 30\ \text{N}$$

7.5. El peso de un camión es 45 kN y el centro de gravedad se encuentra a 2,0 m del eje delantero. La distancia entre ejes es de 5,0 m. Determinar:

a) El peso que soporta cada eje.

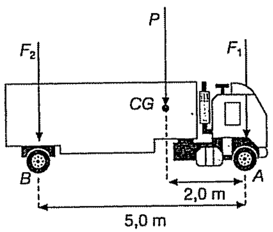
b) El mayor peso que puede transportar y cómo se reparte éste entre los ejes, si el peso sobre cada eje no puede exceder de 60 kN.



Solución

a) El peso que soporta cada eje.

Sobre cada eje actuará una fuerza de forma que la fuerza resultante de estas dos sea el peso del camión.



La suma de estas dos fuerzas debe ser igual al peso y la suma de sus momentos respecto a cualquier punto debe ser igual al momento del peso respecto a este mismo punto. Referiremos los momentos al punto A.

$$+\downarrow \Sigma F_i = P \qquad F_1 + F_2 = 45\ \text{kN}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_A^i = \tau_A^P \qquad 45\ \text{kN} \times 2{,}0\ \text{m} = F_2 \times 5{,}0\ \text{m} \qquad F_2 = 18\ \text{kN}$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$F_1 + 18\ \text{kN} = 45\ \text{kN} \qquad F_1 = 27\ \text{kN}$$

El eje delantero soporta 27 kN y el eje trasero soporta 18 kN.

b) El mayor peso que puede transportar.

Como el peso máximo que puede soportar cada eje es 60 kN, el peso que podrán soportar los dos ejes será $2 \times 60\ \text{kN} = 1{,}2 \cdot 10^2$ kN. Como el camión pesa 45 kN, el peso de la carga será:

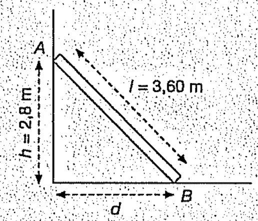
$$1{,}2 \cdot 10^2\ \text{kN} - 45\ \text{kN} = 75\ \text{kN}$$

Este peso se reparte entre los ejes de la siguiente forma:

Eje A 60 kN − 27 kN = 33 kN
Eje B 60 kN − 18 kN = 42 kN

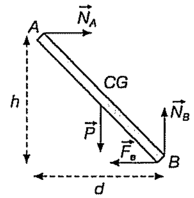
El camión podrá transportar 75 kN repartidos: 33 kN sobre el eje delantero y 42 kN sobre el eje trasero.

7.6. Un tablón de longitud 3,6 m está apoyado en una pared a una altura de 2,8 m del suelo. La pared es completamente lisa. Determinar el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre el tablón y el suelo para que no resbale.



Solución

Dibujaremos el diagrama del sólido del tablón. Las fuerzas que actúan sobre él son las normales $\vec{N}_A$ que hace la pared y $\vec{N}_B$ de que ejerce el suelo, la fuerza de fricción estática, $\vec{F}_e$, con el suelo, con la pared, como es lisa, no hay fricción, y el peso, $\vec{P}$, del tablón.



Aplicaremos las condiciones de equilibrio del sólido.

$$\pm\ \Sigma F_x = 0 \qquad N_A - F_e = 0 \qquad N_A = F_e \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad N_B - mg = 0 \qquad N_B = mg \tag{2}$$

Referiremos los momentos al punto A.

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_A^i = \tau_A^P \qquad N_B d - \text{mg } d/2 - F_e h = 0 \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $F_e = \mu_e N_B$ y (2), en (3) tenemos:

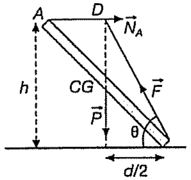
$$N_B d - N_B d/2 - \mu_e N_B h = 0 \qquad d/2 - \mu_e h = 0 \qquad \mu_e = \frac{d}{2h} \tag{4}$$

Calcularemos ahora la distancia, d, del pie del tablón a la pared:

$$d = \sqrt{(3{,}6 \text{ m})^2 - (2{,}8 \text{ m})^2} = 2{,}26 \text{ m}$$

Substituimos en (4): $\mu_e = \dfrac{2{,}26}{2 \times 2{,}8} = 0{,}403$

Podemos resolver este problema de otra forma alternativa. Consideremos que el suelo ejerce sobre el tablón una fuerza $\vec{F}$ cuya componente x es F_e y la componente y es N_B. Entonces el tablón está sometido a tres fuerzas coplanarias: $\vec{P}$, $\vec{N}_A$ y $\vec{F}$. Como las líneas de acción de $\vec{P}$ y $\vec{N}_A$ concurren en un punto, D, también concurrirá en este punto la línea de acción de F.



Se cumple $F_e = F \cos\theta$ y $N_B = F \text{ sen } \theta$, como por otra parte $F_e = \mu_e N_B$, tenemos:

$\mu_e N_B = F \cos\theta$ y $N_B = F \text{ sen } \theta$, que dividiendo miembro a miembro resulta:

$$\mu_e = \frac{F \cos\theta}{F \text{ sen } \theta} = \cot g\theta$$

De la figura se deduce: $\cot g\theta = \dfrac{d/2}{h}$; $\cot g\theta = \dfrac{2{,}26 \text{ m}}{2 \times 2{,}8} = 0{,}403 \qquad \mu_e = 0{,}40$

7.7. Un niño juega con un aro que pesa 5,0 kg y tiene un diámetro de 84 cm. Desea que suba rodando por un escalón de 6,0 cm de altura. De qué forma tendrá que hacer una fuerza menor:

a) Empujando el palo como se muestra en la Figura a.

b) Tirando de él tal como se indica en la Figura b.

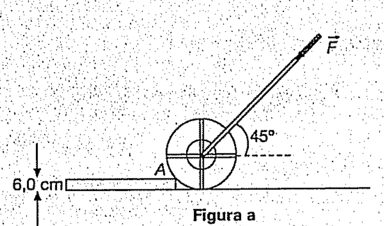


Figura a

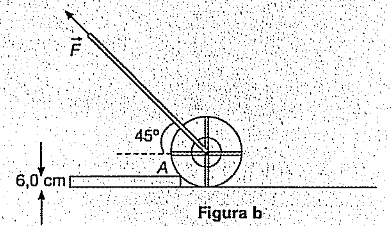
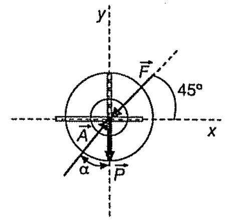


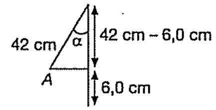
Figura b

Solución

a) Supondremos una situación de movimiento inminente, es decir, las fuerzas son tales que el objeto está a punto de moverse. Dibujamos el diagrama del sólido del disco. Las fuerzas que actúan sobre este disco son el peso $\vec{P}$, la fuerza que hace el palo, $\vec{F}$, y la fuerza que hace el escalón, $\vec{A}$. Como todavía está en equilibrio y sobre el disco actúan tres fuerzas, éstas son coplanarias y, como $\vec{F}$ y $\vec{P}$ concurren en el centro del aro, también concurre en este punto la fuerza $\vec{A}$.



Necesitamos hallar el ángulo α. De la figura deducimos:



$\cos\alpha = \dfrac{36}{42} \qquad \alpha = 31{,}0°$

$$\pm \ \Sigma F_x = 0 \qquad A \text{ sen } 31{,}0° - F\cos 45° = 0 \tag{1}$$

$$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0 \qquad A\cos 31{,}0° - F \text{ sen } 45° - 5{,}0 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 0 \tag{2}$$

De (1) se obtiene:

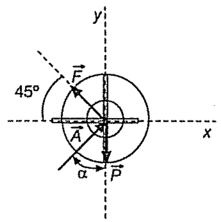
$$A = \frac{F\cos 45°}{\text{sen } 31{,}0°}$$

Sustituimos en (2):

$$\frac{F\cos 45°}{\text{sen } 31{,}0°}\cos 31{,}0° - F \text{ sen } 45° - 5{,}0 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 0 \qquad F = 104 \text{ N}$$

$$F = 10 \cdot 10^2\, N$$

b) Resolveremos este apartado de forma análoga al anterior. Supondremos una situación de movimiento inminente. Dibujamos el diagrama del sólido libre de la rueda.



$$\pm \ \Sigma F_x = 0 \qquad A \text{ sen } 31{,}0° - F\cos 45° = 0 \tag{1}$$

$$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0 \qquad A\cos 31{,}0° + F \text{ sen } 45° - 5{,}0 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 0 \tag{2}$$

De (1) se obtiene:

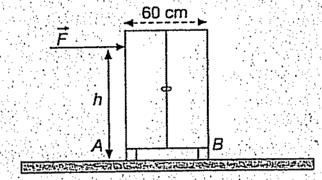
$$A = \frac{F\cos 45°}{\text{sen } 31{,}0°}$$

Sustituimos en (2):

$$\frac{F \cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 31{,}0^\circ} \cos 31{,}0^\circ + F \operatorname{sen} 45^\circ - 5{,}0 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 0 \qquad F = 26{,}0 \text{ N}$$

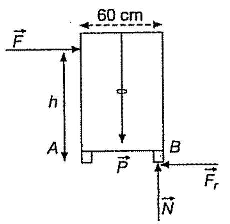
$F = 26$ N, es mejor esta disposición

7.8. Se desea mover hacia la derecha el armario de la figura que tiene una masa de 60 kg, la fuerza requerida para ello es $F = 210$ N. Determinar el valor máximo posible de h para que el armario no vuelque.



Solución

Supondremos que el armario está en una situación de vuelco inminente. Si el giro se va a producir alrededor de B, la fuerza normal, N, está aplicada en B y, por tanto, también la fuerza de fricción, F_r, estará aplicada en este mismo punto. Dibujamos el diagrama del sólido, además de las fuerzas indicadas, hay que considerar el peso, aunque no nos han indicado el centro de gravedad, por simetría podemos suponer que la línea de acción del peso pasa por la línea de unión de las dos puertas, no importa en qué punto está aplicado porque para calcular momentos sólo nos interesa la línea de acción.



Referiremos los momentos al punto B.

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_B^i = 0; \; -210 \text{ N} \times h + 60 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 0{,}30 \text{ m} = 0; \; h = 0{,}840 \text{ m}$$

El valor máximo posible de h es 84 cm.

ELASTICIDAD

7.9. A un alambre de acero de 4,0 m de longitud y 0,50 mm de diámetro que está sujeto al techo se le cuelga en la parte inferior un peso de 40 N. Determinar el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del alambre. Módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa.

Solución

El esfuerzo es la fuerza que actúa por unidad de área de la sección transversal:

$$Esfuerzo = \frac{F}{A} \qquad Esfuerzo = \frac{40\,N}{\pi\,(0{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2{,}03 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

Supondremos que se cumple la ley de Hooke, por tanto podremos aplicar la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta l}{l_0}$$

La deformación o variación relativa de su longitud será: $\dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{F}{YA}$

F/A es el esfuerzo que ya hemos calculado. Sustituimos en esta expresión y resulta:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{2{,}03 \cdot 10^8 \text{ Pa}}{20 \cdot 10^{10} \text{ Pa}} = 1{,}01 \cdot 10^{-3}$$

El alargamiento será: $\Delta l = 4{,}0 \text{ m} \times 1{,}01 \cdot 10^{-3} = 4{,}04 \cdot 10^{-3}$ m

Esfuerzo $= 2{,}0 \cdot 10^8$ *Pa* Deformación $= 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Alargamiento $= 4{,}0$ mm

7.10. Una barra de acero de 2,0 m de longitud y área de la sección transversal igual a 0,10 m² está colgada por un extremo del techo y del otro pende una masa de 100 kg. Determinar:

a) El alargamiento de la barra.

b) El peso máximo que puede colgarse de esta barra. Módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa; esfuerzo de ruptura por tracción del acero $5 \cdot 10^8$ Pa.

Solución

a) Alargamiento de la barra. Supondremos que se cumple la ley de Hooke, por tanto podremos aplicar la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = 2{,}0 \text{ m} \times \frac{100 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2}{20 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \times 0{,}10 \text{ m}^2} = 9{,}81 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$\Delta l = 9{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

b) El peso máximo que puede colgarse de esta barra.

La fuerza máxima de tracción que puede soportar la barra se obtiene multiplicando el esfuerzo de ruptura por el área de la sección transversal:

$$F = 5 \cdot 10^8 \text{ Pa} \times 0{,}10 \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^7 \text{ N}$$

Podrá soportar un peso de $5 \cdot 10^7$ N.

7.11. Un alambre de acero de 1,5 m de longitud y 1,0 mm de diámetro está unido a otro alambre de cobre de idénticas dimensiones. Este conjunto se cuelga por un extremo y en el otro extremo se coloca un peso de 5,0 kg de masa. Determinar:

a) El alargamiento de cada alambre.

b) El alargamiento del conjunto. Módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa; Módulo de Young del cobre $Y = 11 \cdot 10^{10}$ Pa. No considerar los pesos de los alambres.

Solución

a) El alargamiento de cada alambre.

La fuerza que actúa sobre estos alambres es igual para los dos.

Supondremos que se cumple la ley de Hooke, por tanto aplicaremos la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l_0}$$

Alargamiento del alambre de acero:

$$\Delta l_{acero} = \frac{1{,}5 \text{ m} \times 5{,}0 \text{ kg} \times 9{,}81/\text{s}^2}{20 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \times \pi (0{,}50 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 4{,}68 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Alargamiento del alambre de cobre:

$$\Delta l_{cobre} = 1{,}5 \text{ m} \times \frac{5{,}0 \text{ kg} \times 9{,}81 /\text{s}^2}{11 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \times \pi (0{,}50 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 8{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{acero} = 0{,}47 \text{ mm} \qquad \Delta l_{cobre} = 0{,}85 \text{ mm}$$

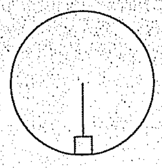
b) El alargamiento del conjunto.

El alargamiento del conjunto se obtiene sumando los alargamientos de los dos alambres.

$$\Delta l = 4{,}68 \cdot 10^{-4} \text{ m} + 8{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1{,}31 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

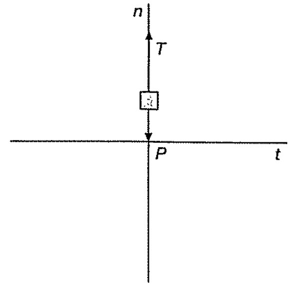
El conjunto se alarga 1,3 mm.

7.12. Un objeto de 20 kg de masa que está sujeto a un hilo de acero de longitud natural 0,50 m gira en un plano vertical a 300 revoluciones por minuto. El área de la sección transversal del hilo es de 7,1 mm². Calcular el alargamiento del hilo cuando el objeto se encuentra en el punto más bajo de la circunferencia. Módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa.



Solución

Dibujaremos el diagrama del cuerpo libre de este objeto. Las fuerzas que intervienen son el peso y la tensión del hilo.



Aplicaremos la segunda ley de Newton.

$$+\uparrow \Sigma F_n = \text{m}\, a_n \qquad T - \text{mg} = \text{m}\, a_n \qquad a_n = v^2/r \qquad (1)$$

La tensión es la fuerza que hace el hilo o la fuerza que actúa sobre el hilo que suponiendo se cumple la ley de Hooke y que, por tanto, podemos aplicar la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l_0}$$

Sustituimos y aislamos T:

$$T = \frac{7{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \times 20 \cdot 10^{10} \text{ Pa}\, \Delta l}{0{,}50 \text{ m}}$$

En la parte inferior el radio de curvatura de la trayectoria que describe el objeto es igual a 0,50 m + Δl, donde Δl es el alargamiento del hilo.

Para hallar la velocidad tangencial a partir de la velocidad angular aplicaremos la expresión:

$$v = \omega r \qquad \omega = 300 \text{ rpm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad/s}; \quad v = 10\pi \text{ rad/s} \times (0{,}50 \text{ m} + \Delta l)$$

Sustituimos en (1) y resulta:

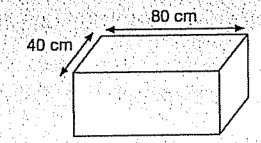
$$\frac{7{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \times 20 \cdot 10^{10} \text{ Pa}\, \Delta l}{0{,}50 \text{ m}} - 20 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ kg} \times \frac{(10\pi \text{ rad/s} \times (0{,}50 \text{ m} + \Delta l))^2}{0{,}50 \text{ m} + \Delta l}$$

$$\Delta l = 0{,}00356 \text{ m}$$

Si al resolver esta ecuación hubiésemos hecho la aproximación 0,50 m + $\Delta l \cong$ 0,50 m, el resultado hubiese sido $\Delta l = 0{,}00354$ m.

El hilo se ha alargado 0,36 cm.

7.13. La pieza de la figura es de latón, tiene forma de paralelepípedo recto, los lados de la base miden 80 cm y 40 cm, la altura mide 60 cm. ¿Qué fuerza paralela a las bases en la dirección del lado de 80 cm hay que aplicar para producir una deformación por corte de 0,16 mm? El módulo de corte del acero es $G = 7{,}5 \cdot 10^{10}$ Pa.



Solución

Supondremos que se cumple la ley de Hooke. La deformación por corte, ε, viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{h}$$

Donde Δl representa el desplazamiento de un vértice y h la dimensión transversal.

$$\text{Deformación} = \frac{0{,}16 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{0{,}80\ \text{m}} = 2{,}00 \cdot 10^{-4}$$

El esfuerzo está relacionado con la deformación por:

$$\text{Esfuerzo} = \text{Deformación por corte} \times G$$

$$\text{Esfuerzo} = 2{,}00 \cdot 10^{-4} \times 7{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{Pa} = 1{,}50 \cdot 10^{7}\ \text{Pa}$$

La fuerza paralela será: F = Esfuerzo de corte $\times A$, donde A es el área de la cara.

$$\text{F} = 1{,}50 \cdot 10^{7}\ \text{Pa} \times (0{,}80\ \text{m} \times 0{,}40\ \text{m}) = 4{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{N}$$

$$F = 4{,}8\ \text{MN}$$

CUESTIONES

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO

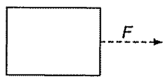
7.1. Es condición necesaria y suficiente para que un sólido rígido esté en equilibrio que:

a) La resultante de todas las fuerzas sea nula.

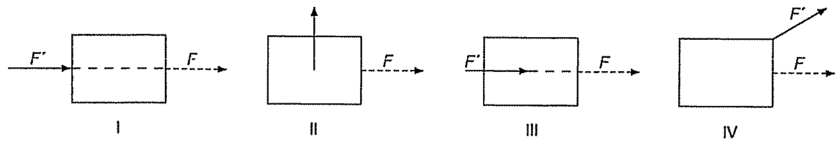
b) El momento resultante de todas las fuerzas respecto a un punto sea nulo.

c) Las fuerzas interiores den resultante nula y su momento resultante sea nulo.

d) Las fuerzas exteriores den resultante nula y su momento resultante sea nulo.

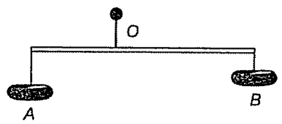
7.2. La fuerza F aplicada al sólido de la figura 

produce el mismo efecto mecánico si se traslada a las posiciones indicadas en las figuras:



a) Todas. *b)* II y IV *c)* I y II *d)* I y III

7.3. Una balanza de brazos desiguales como la de la figura está en equilibrio. Podemos afirmar:



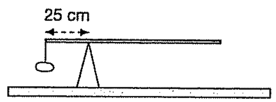
a) Los pesos situados en los platillos son iguales y los momentos de los pesos respecto a O son diferentes.

b) Los pesos situados en los platillos son diferentes y los momentos de los pesos respecto a O son iguales.

c) Los momentos de los pesos respecto a O son iguales y también lo son los pesos situados en los platillos.

d) El peso del platillo A es menor que el peso del platillo B.

7.4. Una regla uniforme de 100 cm está apoyada sobre la división 25 cm y se equilibra cuando se cuelga de la división cero una piedra de 0,80 kg. La masa de la regla es:



a) 0,80 kg *b)* 0,40 kg *c)* 0,20 kg *d)* 1,6 kg

7.5. Dos niños de pesos P_1 y P_2, respectivamente, están en un balancín formado por una barra uniforme apoyada por su punto medio en un soporte. Si la barra está en equilibrio, la relación x_1/x_2 entre las distancias de los niños al punto de apoyo es:

a) P_1 / P_2

b) $P_1 + P_2$

c) P_2 / P_1

d) $P_1 \times P_2$

7.6. Sobre una barra de peso despreciable actúan dos fuerzas cuyas líneas de acción son diferentes, podemos afirmar que:

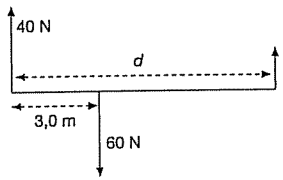
a) La barra está en equilibrio.

b) Si los módulos de las fuerzas son iguales, la barra está en equilibrio.

c) La barra no está en equilibrio.

d) Si no conocemos los módulos de las fuerzas no podemos afirmar nada respecto a la situación de equilibrio de la barra.

7.7. Sobre la varilla de la figura, que se encuentra en equilibrio, actúan tres fuerzas. La distancia d vale:



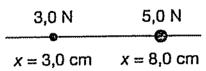
a) No se puede saber, ya que no conocemos una fuerza.

b) 2,0 m

c) 9,0 m

d) 5,0 m

7.8. La barra de la figura que tiene una longitud de 10 cm y un peso de 2,0 N tiene acopladas dos bolas, una de peso 3,0 N situada en $x = 3{,}0$ cm y otra de peso 5,0 N situada en $x = 8{,}0$ cm. El centro de gravedad de este sistema se encuentra en:



a) $x = 5{,}0$ cm *c)* $x = 4{,}0$ cm

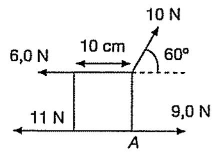
b) $x = 6{,}9$ cm *d)* $x = 5{,}9$ cm

7.9. El eje delantero de un coche se encuentra a una distancia de 1,2 m de la vertical que pasa por el centro de gravedad del coche y el eje trasero a una distancia de 1,8 m de la misma vertical. Si el eje delantero soporta una carga de 9,0 kN, el eje trasero soporta una carga de:

a) 6,0 kN *c)* 9,0 kN

b) 14 kN *d)* 10 kN

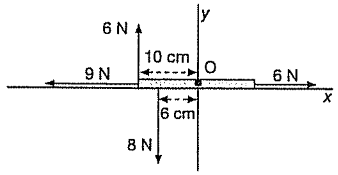
7.10. Sobre una placa cuadrada de 10 cm de lado actúan las fuerzas indicadas en la figura. El momento de fuerza resultante respecto al vértice A es: sen 60° = 0,87, cos 60° = 0,50



a) 0,10 N · m, sentido antihorario. *c)* 1,0 N · m, sentido antihorario.

b) 0,27 N · m, sentido horario. *d)* 0,10 N · m sentido horario.

7.11. La barra de la figura que es homogénea y tiene 20 cm de longitud se encuentra sobre un plano horizontal completamente liso y sobre ella actúan las fuerzas indicadas. Para que esta barra esté en equilibrio es necesario aplicarle:



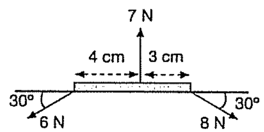
a) Una fuerza $\vec{F} = 3\,N\,\hat{i} + 2\,N\,\hat{j}$ en $x = -6$ cm.

b) Una fuerza $\vec{F} = -3\,N\,\hat{i} - 2\,N\,\hat{j}$ *a* en $x = 4$ cm.

c) Una fuerza $\vec{F} = -3\,N\,\hat{i} - 2\,N\,\hat{j}$ en $x = 6$ cm.

d) Una fuerza $\vec{F} = 3\,N\,\hat{i} + 2\,N\,\hat{j}$ en $x = 6$ cm.

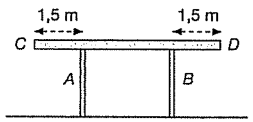
7.12. La regla de la figura:



a) Está en equilibrio porque $\sum \tau_0^i = 0$. *c)* Está en equilibrio porque $\sum \tau_0^i = 0$ y $\sum F_i = 0$.

b) No está en equilibrio porque $\sum \tau_0^i \neq 0$. *d)* No está en equilibrio porque $\sum F_i \neq 0$.

7.13. Un tablón homogéneo de 6,0 m de largo y masa 30 kg descansa sobre dos muros A y B, la distancia del extremo D a la que podrá llegar una persona de 75 kg sin que el tablón vuelque es:



a) 60 cm *b)* 1,0 m *c)* 2,9 m *d)* 90 cm

7.14. La ley de Hooke:

a) Afirma que sólo pueden deformarse los materiales plásticos.

b) Afirma que cuando se cumplen ciertas condiciones, las deformaciones son directamente proporcionales a los esfuerzos.

c) Se cumple para cualquier esfuerzo que actúe sobre un material.

d) Únicamente se cumple para varillas metálicas muy estrechas.

7.15. Se aplica una fuerza de tracción de 100 N a una barra de sección transversal 10 cm^2. El esfuerzo que se ha aplicado a la barra es:

a) 100 N *b)* $1,0 \cdot 10^5$ Pa *c)* 10 Pa *d)* 50 N

7.16. Un esfuerzo de compresión de $2,0 \cdot 10^5$ Pa se aplica a una barra de 0,50 cm^2 de área de su sección transversal. La fuerza aplicada es:

a) $1,0 \cdot 10^5$ N *b)* $2,0 \cdot 10^6$ N *c)* 10 N *d)* 4,7 kN

7.17. Dos varillas de latón tienen la misma longitud, pero el área de la sección transversal de la varilla A es el doble de la de la varilla B. Al aplicar las mismas fuerzas de tracción en los extremos de cada una de estas varillas:

a) Las dos se alargarán lo mismo.

b) La varilla A se alarga la mitad que la varilla B.

c) La varilla A se alarga el doble que la varilla B.

d) El alargamiento de la varilla A es cuatro veces el alargamiento de la varilla B.

7.18. Las áreas de las secciones transversales de dos varillas de aluminio son iguales, pero la longitud de la varilla A es el doble de la longitud de la varilla B. Al aplicar la mismas fuerzas de tracción en los extremos de cada una de estas varillas:

a) El alargamiento de la varilla A será el doble de la de la varilla B.

b) El alargamiento de la varilla A será la mitad de la de la varilla B.

c) Ambas varillas experimentan el mismo alargamiento.

d) Los esfuerzos aplicados a cada varilla son diferentes.

7.19. El esfuerzo de ruptura del aluminio es de $2 \cdot 10^8$ Pa, la sección mínima de un alambre de este material que debe resistir una carga de 36 kN ha de ser:

a) 2,4 cm^2 *b)* 1,8 cm^2 *c)* 12 cm^2 *d)* 0,43 cm^2.

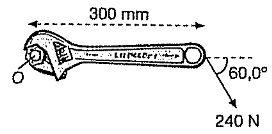
SOLUCIONES

7.1. *d)*	**7.6.** *d)*	**7.11.** *d)*	**7.16.** *c)*
7.2. *d)*	**7.7.** *c)*	**7.12.** *d)*	**7.17.** *b)*
7.3. *b)*	**7.8.** *d)*	**7.13.** *d)*	**7.18.** *a)*
7.4. *b)*	**7.9.** *a)*	**7.14.** *b)*	**7.19.** *b)*
7.5. *c)*	**7.10.** *a)*	**7.15.** *b)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

EQUILIBRIO DEL SÓLIDO

1. Sobre la llave de la figura se ejerce una fuerza de 240 N. Determinar:

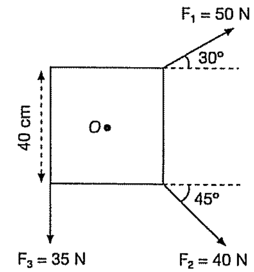


a) El momento de esta fuerza respecto a O.

b) El módulo de la fuerza perpendicular a la llave que produce el mismo momento respecto a O.

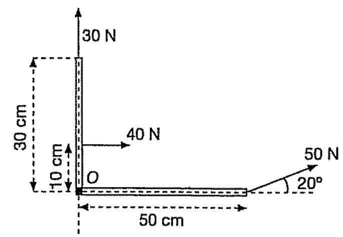
Sol.: a) 62,4 Nm, sentido horario; *b)* 208 N

2. Determinar el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre la plancha cuadrada de la figura respecto al punto O, situado en el centro del cuadrado.



Sol.: 3,3 N · m sentido antihorario.

3. Determinar el momento resultante respecto al punto O de las fuerzas que actúan sobre el soporte de la figura.

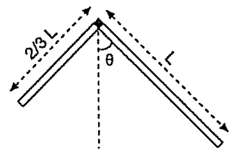


Sol.: 4,6 Nm

4. Demostrar que la resultante de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ paralelas, de sentidos contrarios aplicadas a un objeto cualquiera, por ejemplo, una barra, y cuyas líneas de acción pasan respec-

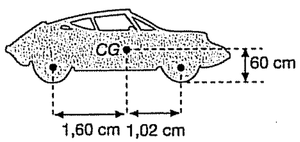
tivamente por los puntos A y B del objeto es una fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo es $F = F_1 - F_2$ y su línea de acción pasa por un punto O situado en la recta que determinan los puntos A y B y que cumple $F_1 \times (AO) = F_2 \times (OB)$.

5 **Un soporte rectangular está apoyado en un clavo. Uno de los brazos tiene una longitud L y el otro mide 2/3 L. Determinar el ángulo θ que forma el brazo L con la vertical cuando se encuentra en equilibrio.**



Sol.: 24°

6 **El coeficiente de fricción estática entre las cubiertas de las ruedas del automóvil y el pavimento es 0,75. La masa del automóvil es de 1 625 kg. El centro de gravedad se halla situado a 60 cm del pavimento y a 1,02 m de la rueda delantera. La distancia entre el eje delantero y el eje trasero es 2,62 m. Determinar la máxima aceleración de este automóvil cuando viaja por una carretera horizontal suponiendo:**



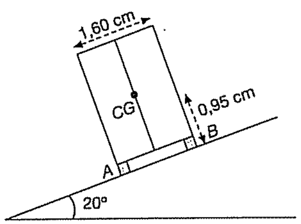
a) Tracción en las cuatro ruedas.

b) Tracción delantera.

c) Tracción trasera.

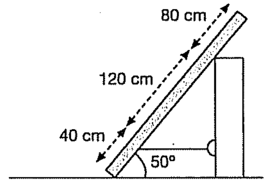
Sol.: a) 7,4 m/s^2; *b)* 3,8 m/s^2; *c)* 3,5 m/s^2

7 **El armario de la figura tiene una masa de 90 kg y se encuentra en reposo sobre una rampa de 20° de inclinación respecto a la horizontal. Determinar la fuerza normal que ejerce el suelo sobre cada pata. Considerar despreciable la anchura de las patas.**



Sol.: 5,9 · 10^2 N; 2,4 · 10^2 N

8 **Un tablón de 2,40 m de longitud que pesa 350 N está apoyado sobre un muro y se mantiene en equilibrio mediante un cable tal como indica la figura. El suelo y el tablón son completamente lisos. Determinar:**

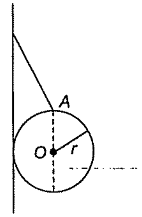


a) La tensión del cable.

b) Las respectivas fuerzas normales ejercidas por el suelo y por el muro sobre el tablón.

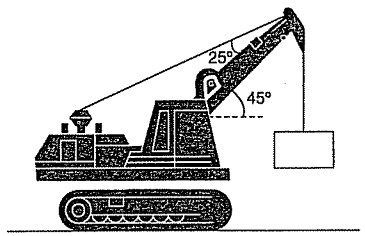
Sol.: a) 1,5 · 10^2 N; *b)* 2,2 · 10^2 N, 2,0 · 10^2 N

9 **El disco homogéneo de la figura de radio r lleva un hilo enrollado en su superficie. El hilo está sujeto por el otro extremo a una pared vertical. El punto A se encuentra en la misma vertical que el centro O de la esfera. Determinar el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre el disco y la pared para que el disco se mantenga en equilibrio y en contacto con la pared.**



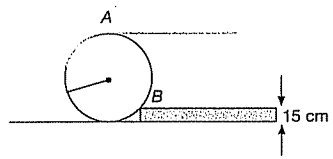
Sol.: 1

10 **La pluma de la grúa de la figura pesa 12 kN y mide 12 m. La grúa levanta un peso de 52 kN. Determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por el pivote inferior sobre la pluma.**



Sol.: 97 kN, 1,3 · 10^2 kN, 47° con la horizontal

11 **Se desea que un disco de peso 490 N y radio 60 cm ascienda por un escalón de una altura de 15 cm, para ello se enrolla una cuerda a su alrededor y se tira de ella horizontalmente. El disco no resbala sobre el escalón.**



a) ¿Con qué fuerza hay que tirar de la cuerda?

b) ¿Qué fuerza ejerce el escalón sobre el disco?

Sol.: a) $1{,}9 \cdot 10^2$ N; *b)* $5{,}2 \cdot 10^2$ N

ELASTICIDAD

12 Un extremo de un alambre de cobre de 1,2 m de longitud y de sección 0,15 cm² está sujeto al techo y del otro extremo cuelga un peso de masa 210 kg. Determinar:

a) El esfuerzo que actúa sobre el alambre.

b) El alargamiento del alambre. Módulo de Young del cobre $Y = 11 \cdot 10^{10}$ Pa.

Sol.: a) $1{,}4 \cdot 10^8$ Pa; *b)* 1,5 mm

13 Un alambre de aluminio de 1,46 m de longitud y 1,0 mm de diámetro se alarga 1,3 mm cuando de él se cuelga un peso de 5,0 kg. ¿Cuál es el módulo de Young de este aluminio?

Sol.: $7{,}0 \cdot 10^{10}$ Pa

14 Un poste vertical de acero que tiene una altura de 2,5 m y un radio de 0,12 m soporta una carga de $8{,}0 \cdot 10^4$ N. Determinar:

a) La deformación del poste.

b) Su variación de longitud. Módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa. No considerar el peso del poste.

Sol.: a) $8{,}8 \cdot 10^{-6}$; *b)* $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ m

15 El cable de un ternal (sistema de tres poleas) que se utiliza para elevar material de construcción en una obra es de acero y tiene un diámetro de 8,0 mm.

a) Calcular la carga que podrá elevar un ternal de este tipo.

b) Resolver la misma cuestión pero teniendo en cuenta que en el momento del arranque tiene una aceleración de 0,80 m/s². Esfuerzo de ruptura por tracción del acero $5 \cdot 10^8$ Pa.

Sol.: a) $3 \cdot 10^3$ kg; *b)* $2 \cdot 10^3$ kg

16 Una varilla de cobre de 80 cm de longitud está soldada a una varilla de acero de longitud *l* y un área de la sección transversal doble que la del cobre. Se aplica en cada uno de los extremos de este conjunto sendas fuerzas de tracción del mismo módulo y las dos varillas experimentan el mismo alargamiento. ¿Cuál es la longitud *l* de la varilla de acero? Módulo de Young del cobre $Y = 11 \cdot 10^{10}$ Pa, módulo de Young del acero $Y = 20 \cdot 10^{10}$ Pa.

Sol.: 2,9 m

17 Una varilla de cobre de sección 4,5 cm² está unida por los extremos a otra varilla de aluminio de la misma longitud y distinta sección. Esta doble varilla se somete a tracciones iguales en módulo y sentidos opuestos de 3,6 kN y las dos varillas experimentan el mismo alargamiento. Determinar:

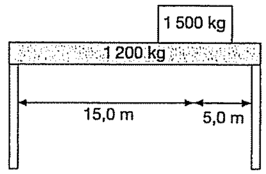
a) La sección de la varilla de aluminio.

b) El esfuerzo en cada varilla.

c) La deformación en cada varilla. Módulo de Young del cobre $Y = 11 \cdot 10^{10}$ Pa, módulo de Young del aluminio $Y = 7{,}0 \cdot 10^{10}$ Pa.

Sol.: a) 7,1 cm²; *b)* 8,0 MPa, 5,1 MPa: *c)* $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ m

18 La figura muestra una viga de $1{,}2 \cdot 10^3$ kg que soporta un bloque de $15 \cdot 10^3$ kg. La viga está apoyada en dos soportes de acero que tienen la misma área de la sección transversal y que vale 530 cm². Determinar:



a) La fuerza que hace cada apoyo.

b) La deformación (contractiva relativa) de estos apoyos. Módulo de Young del acero $20 \cdot 10^{10}$ N/m².

Sol.: a) 9,6 kN, 17 kN; *b)* 0,90 mm, 1,6 mm

19 El límite de elasticidad de un cable de acero es $2{,}4 \cdot 10^8$ Pa. ¿Qué diámetro mínimo debe tener un cable de este tipo para que pueda soportar una carga de 150 kg y no se exceda el límite elástico?

Sol.: 2,8 mm

20 Sobre una cara de un cubo de cobre de 3,5 cm de lado actúa una fuerza cortante de 3,4 kN, la cara paralela a ésta permanece en reposo. ¿Cuál es la deformación cortante de este cubo? Módulo de corte del cobre $4{,}4 \cdot 10^{10}$ Pa.

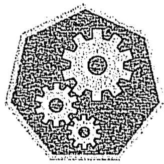
Sol.: $6{,}3 \cdot 10^{-5}$

21 El esfuerzo de ruptura por tracción del aluminio es $2{,}0 \cdot 10^8$ Pa. ¿Qué fuerza es necesaria para cortar una varilla de aluminio de 0,80 cm de diámetro?

Sol.: 10 kN

CAP O

8



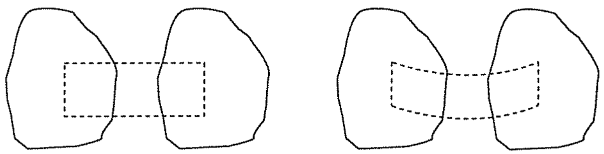
DINÁMICA DEL SÓLIDO

8.1. DINÁMICA DEL SÓLIDO

CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

Traslación

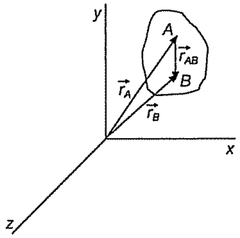
El movimiento es de traslación cuando cualquier recta que une dos partículas del sólido permanece paralela a sí misma durante todo el movimiento, es decir, mantiene la misma orientación. En una traslación las partículas describen trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se dice que la traslación es *rectilínea*. Si son líneas curvas, la traslación es *curvilínea*.



Traslación rectilínea Traslación curvilínea

En un movimiento de traslación, en cualquier instante, las velocidades y aceleraciones de todas las partículas tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Consideremos un sólido que tiene un movimiento de traslación y dos partículas cualesquiera A y B del sólido, cuyos vectores de posición respecto a un sistema de referencia son $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$, respectivamente, $\vec{r}_{AB}$ es el vector de posición de B respecto a A. Estos tres vectores están relacionados por la expresión:



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$

Derivando respecto al tiempo los dos miembros de esta expresión, resulta:

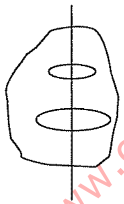
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

La derivada temporal de $\vec{r}_{BA}$ es cero, ya que el módulo de este vector es constante, se trata de un sólido rígido, y también lo es su dirección, puesto que el sólido realiza un movimiento de traslación.

Derivando de nuevo respecto al tiempo se obtiene:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO



En el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo las partículas del sólido se mueven en planos paralelos y describen circunferencias cuyo centro se encuentra en el eje, llamado eje de rotación. Si el eje de rotación corta al sólido, las partículas del sólido que pertenecen al eje tienen velocidades y aceleraciones nulas.

Consideraremos un punto P de un sólido que está en rotación, este punto describe una circunferencia cuyo centro es un punto A del eje de rotación. La posición de este punto y la del sólido queda perfectamente fijada por el ángulo que forma la recta AP con el plano *yz*. Este ángulo es la *coordenada angular* del sólido. Se acostumbra a adoptar el convenio de que si el giro tiene lugar en sentido antihorario la coordenada angular es positiva y si tiene lugar en sentido horario la coordenada angular es negativa. En el SI la coordenada angular se mide en rad/s.

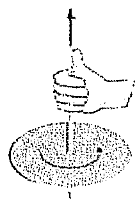
La *velocidad angular,* ω, es la rapidez de variación de la coordenada angular, en el SI se mide en rad/s. La velocidad angular media, ω_m, en un intervalo de tiempo Δt en el que la coordenada angular varía de θ_1 a θ_2 es:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{dt}$$

La velocidad angular instantánea, ω, viene dada por la derivada de la coordenada angular respecto al tiempo:

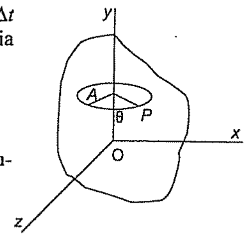
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad angular puede expresarse como una magnitud vectorial. La dirección de este vector es la del eje de rotación, su módulo es la derivada temporal de la coordenada angular y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha. Para aplicar esta regla se curva los dedos de la mano derecha alrededor del eje de rotación de forma que el dedo índice indique el sentido de rotación y se extiende el dedo pulgar a lo largo del eje que indica el sentido de la velocidad angular. En el caso de la figura la velocidad angular está dirigida a lo largo del eje y, podemos expresarla de la siguiente forma: $\vec{\omega} = \omega\hat{j}$.



Regla de la mano derecha

La *aceleración angular* es la variación de la velocidad angular por unidad de tiempo, en el SI se mide en rad/s². La aceleración angular media, α_m, en un intervalo de tiempo es la variación media de la velocidad angular por unidad de tiempo. Si en un intervalo de tiempo Δt en el que la velocidad angular varía de ω_1 a ω_2, la aceleración angular media en este intervalo de tiempo es:



$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular instantánea es la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

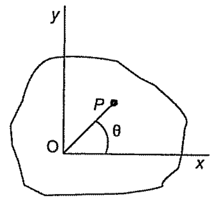
La aceleración angular también puede expresarse como una magnitud vectorial. La dirección es la del eje de rotación, el módulo es la derivada temporal de la velocidad angular y el sentido es el mismo que el de la velocidad angular. Si el módulo de ésta aumenta, acelera, y de sentido contrario al de la velocidad angular, si el módulo de ésta disminuye, frena.

MOVIMIENTO PLANO

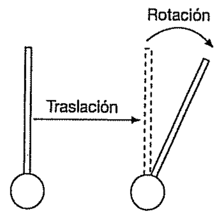
Decimos que un sólido tiene un movimiento plano cuando cada una de las partículas del sólido se mueven en planos que son paralelos a algún plano fijo de referencia. Es decir, cada una de las partículas del sólido permanece en un plano. Es muy cómodo tomar como referencia el plano que contiene el centro de masas del sólido al que se acostumbra a denominar *plano del movimiento.* Todos los puntos de un sólido rígido, que tiene un movimiento plano, conservan, a lo largo del movimiento, la distancia al plano del movimiento o algún otro plano de referencia paralelo a él. Un ejemplo de movimiento plano es la rotación alrededor de un eje fijo.

Como todos los puntos que se encuentran en una perpendicular al plano del movimiento o a algún otro plano de referencia paralelo a éste tienen el mismo movimiento, podemos definir perfectamente el movimiento plano de un sólido considerando únicamente una sección representativa del sólido situada en uno de estos planos.

Consideraremos una sección representativa situada en este plano:



Desde el punto de vista cinemático un movimiento plano equivale a una traslación y a una rotación.



8.2. DINÁMICA

CARÁCTER VECTORIAL DEL MOMENTO DE FUERZA

Así como en el movimiento de una partícula las aceleraciones se deben a la acción de las fuerzas, en el movimiento de rotación una aceleración angular se debe a un momento de fuerza. El momento de una fuerza respecto a un punto tiene carácter vectorial.

El módulo de este vector es el producto del módulo de la fuerza por la distancia del punto a la línea de acción de la fuerza: $\tau_O = Fb = Fr$ sen φ. Figura 1.

El momento de una fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto O nos indica la tendencia de la fuerza a hacer girar un sólido rígido respecto a un eje que pasa por O y es perpendicular al plano determinado por O y F. El sentido viene dado por la regla de la mano derecha; para aplicar esta regla aquí, basta con cerrar la mano derecha alrededor del eje de rotación de forma que los dedos indiquen el sentido del movimiento que tiende a producir este momento, el dedo pulgar indica el sentido del momento. En el caso de la Figura 2 la fuerza tiende a hacer girar el sólido en sentido antihorario y el momento está dirigido hacia arriba. Si tendiera a hacer girar el sólido en sentido contrario, es decir, en sentido horario, el momento estaría dirigido hacia abajo.

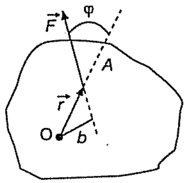


Figura 1

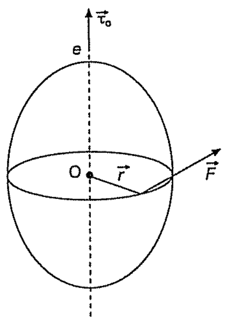
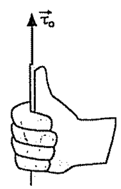
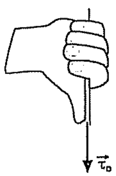


Figura 2



Regla de la mano derecha



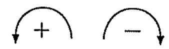
Si la fuerza tendiera a hacer girar en sentido horario, el momento estaría dirigido hacia abajo

El momento de una fuerza respecto a un punto puede expresarse mediante un producto vectorial, para ello se establece un vector $\vec{r}$ que va desde el punto al punto A, origen del vector que representa la fuerza, Figura 1, entonces el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto a O se expresa:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Obsérvese que de acuerdo con la definición de producto vectorial como un vector cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores por el seno del ángulo que forman, se obtiene $\tau_O = Fr$ sen φ, que coincide con lo que hemos escrito anteriormente.

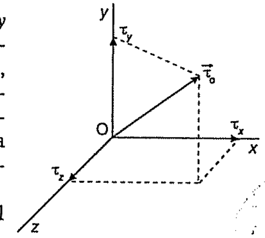
Como ya hemos indicado, en un problema en dos dimensiones no es necesario utilizar la notación vectorial, basta asignar un signo al momento según tienda a producir una rotación en sentido horario o en sentido antihorario, esto se indica de la siguiente forma:



MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE

Sea $\vec{\tau}_O$ el momento de un fuerza $\vec{F}$ respecto a un punto O que pertenece, por ejemplo, al eje y, el momento de esta fuerza respecto al eje y es la componente y del momento respecto al punto O, $\vec{\tau}_O$. Podemos descomponer el momento $\vec{\tau}_O$ en sus tres componentes rectangulares τ_x, τ_y, τ_z, si O es el origen de coordenadas estas componentes son los respectivos momentos respecto a los tres ejes de coordenadas. Si esta fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un sólido rígido, estas componentes miden la tendencia de la fuerza a hacer girar el sólido alrededor de los ejes, x, y y z, respectivamente.

El momento de una fuerza respecto a un eje es independiente del punto del eje respecto al cual se ha determinado el momento.



MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

En un sistema de partículas se cumple que el centro de masas se mueve como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en este punto y actuaran sobre él todas las fuerzas externas. Lo cual se expresa:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_c$$

Dado que un sólido rígido es un sistema de partículas en el que las distancias entre las mismas permanecen constantes, esta expresión es aplicable también a un sólido rígido.

Si el sólido se mueve en un plano y este es el plano xy, podemos escribir esta ecuación en forma de dos ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = ma_{cx} \qquad \sum F_y = ma_{cy}$$

ECUACIÓN DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN

Consideremos un sólido que gira alrededor del eje y de un sistema fijo de coordenadas, $Oxyz$, siendo el eje y un eje de simetría del sólido, la ecuación que relaciona el momento resultante y la aceleración angular es:

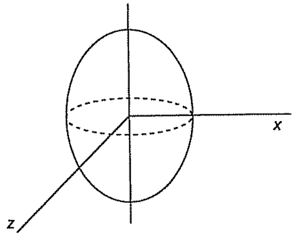
$$\sum \vec{\tau}_O = I_y\,\vec{\alpha}$$

$\sum \tau_O$ representa el momento resultante de las fuerzas externas respecto al punto O, I_y representa el momento de inercia del sólido respecto al eje y.

Para poder aplicar esta ecuación es necesario que el eje de giro sea un eje de simetría. Se puede demostrar que para todo punto de un sólido, cualquiera que sea su simetría, existen tres ejes, denominados *ejes principales de inercia*, para los cuales se cumple la ecuación anterior. Si el sólido tiene un eje de simetría éste será un eje principal.

Si el eje de rotación no es un eje principal de inercia, entonces:

$$\sum \tau_y = I_y\,\alpha$$



Donde $\sum \tau_y$ representa el momento resultante de las fuerzas externas respecto al eje y, I_y es el momento de inercia del sólido respecto al eje y y α es la aceleración angular.

El momento de inercia I_y nos indica la inercia del sólido frente a la rotación, en el SI se mide en kg · m^2. Para un sistema de partículas:

$$I_y = \sum m_i r_i^2$$

Donde m_i son las respectivas masas de las partículas y r_i son las correspondientes distancias al eje y. Esta expresión nos indica que la inercia a la rotación no sólo depende de la masa, sino también de cómo está distribuida esta masa alrededor del eje de rotación.

Cálculo de momentos de inercia

En el caso de un sólido rígido, al tratarse de una distribución continua de masas el sumatorio de la expresión anterior se convierte en una integral:

$$I_y = \int r^2 \, dm$$

Como $dm = \rho \, dV$, siendo ρ la densidad del sólido, podemos escribir:

$$I_y = \int r^2 \rho \, dV$$

Que si la densidad es la misma en todos los puntos del sólido se puede escribir:

$$I_y = \rho \int r^2 \, dV$$

Debemos escoger el elemento de volumen dV de forma que todos sus puntos estén prácticamente a la misma distancia del eje de giro.

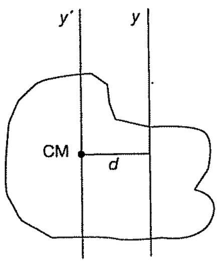
Si en lugar de un objeto tridimensional se trata de una chapa plana, entonces $dm = \sigma dA$, siendo σ la densidad superficial del sólido.

Y si se trata de una línea, como una varilla, $dm = \lambda dx$, siendo λ la densidad lineal del sólido.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

El momento de inercia, I_y, de un sólido respecto a un eje cualquiera y, es igual al momento de inercia, $I_{y'C}$, respecto a un eje paralelo y' que pase por el centro de masas más el producto de la masa del sólido por el cuadrado de la distancia, d, entre ambos ejes.

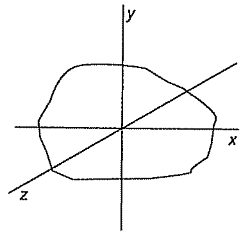
$$I_y = I_{y'C} + md^2$$



Teorema de los ejes perpendiculares

El momento de inercia de una lámina plana (de espesor despreciable) respecto a un eje y normal a ella es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes x y z perpendiculares cualesquiera situados en el plano de la lámina y que pasan por el punto O de intersección del eje y con la lámina.

$$I_y = I_x + I_z$$



Radio de giro

El radio de giro, k, respecto a un eje cualquiera se define por la expresión:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Si escribimos esta expresión $I = m\,k^2$, podemos deducir que el radio de giro representa la distancia al eje de giro al que suponemos situado en un punto de masa igual a la del sólido que tenga el mismo momento de inercia que el sólido.

MOVIMIENTO PLANO GENERAL

En el caso de una placa o un sólido simétrico respecto al plano del movimiento (hay un gran número de problemas del movimiento de un sólido rígido que se adaptan a este modelo) que supondremos es el plano xy, el movimiento plano general viene descrito por las ecuaciones siguientes:

$$\sum F_x = ma_{Cx} \qquad \sum F_y = ma_{Cy} \qquad \sum \tau_C = I_{Cz}\,\alpha$$

I_{Cz} representa el momento de inercia respecto a un eje z que pasa por el centro de masas; $\Sigma\tau_C$ representa el momento resultante de las fuerzas externas respecto al centro de masas. Solamente las componentes de las fuerzas situadas en el plano del movimiento contribuyen al movimiento.

Las dos primeras ecuaciones describen el movimiento de traslación del centro de masas y la tercera describe la rotación del sólido alrededor de un eje z perpendicular al plano del movimiento que pasa por el centro de masas.

Obsérvese que las dos primeras ecuaciones están referidas a un sistema inercial y la tercera está referida a un sistema ligado al centro de masas. La deducción de la ecuación $\Sigma\tau_C = I_{Cz}\,\alpha$ se basa en la ley de Newton y esta ley sólo se cumple cuando tomamos como referencia un sistema que sea inercial. Pero se cumple también para un sistema ligado al centro de masas aunque esté acelerado, se trata de una propiedad del centro de masas.

Hemos visto que, desde el punto de vista cinemático, cualquier movimiento plano equivale a una traslación y a una rotación. Desde el punto de vista dinámico esto es más restringido, el movimiento plano de una chapa o de un sólido de forma cualquiera que cumple las condiciones de simetría indicadas equivale a una traslación más una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

Casos particulares:

a) Cuando el sólido tiene un movimiento de traslación, el momento resultante respecto al centro de masas de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido es nulo y no hay aceleración angular, el sólido. Entonces en las ecuaciones anteriores, tenemos

$$\sum F_x = ma_{Cx} \quad \sum F_y = ma_{Cy} \quad \sum \tau_C = 0$$

La traslación tiene lugar únicamente cuando la línea de acción de la fuerza resultante $\vec{F}$ pasa por el centro de masas. (En general no se cumple que el momento resultante respecto a un punto de un sistema de fuerzas es igual al momento respecto al mismo punto de la fuerza resultante).

b) Cuando una placa o un sólido que cumple las condiciones de simetría indicadas gira alrededor de un eje fijo, la fuerza exterior resultante es nula, el movimiento viene descrito por:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_C = I_{Cz}\,\alpha$$

Se trata de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masas perpendicular al plano del movimiento.

Si la rotación tiene lugar alrededor de un eje que pasa por un punto fijo O diferente al centro de masas entonces:

$$\sum \tau_O = I_{Oz}\,\alpha$$

I_{Oz} representa el momento de inercia respecto a un eje z que pasa por el punto O; $\sum \tau_O$ representa el momento resultante respecto al punto O.

Rodadura

Un caso interesante de movimiento plano es el movimiento de *rodadura* de una rueda o de otros objetos rodantes como una esfera o un cilindro. Supondremos que el centro de masas coincide con el centro de simetría. En un movimiento de rodadura el sólido no desliza y la distancia que avanza el centro de masas en una vuelta es $2\pi r$, por tanto, $x_C = r\theta$, donde x_C es la distancia recorrida por el centro de masas mientras gira un ángulo θ y r es el radio. Si derivamos esta expresión respecto al tiempo se obtiene: $v_C = r\omega$, v_C es la velocidad del centro de masas y ω la aceleración angular, y al hacer la segunda derivada resulta $a_C = r\alpha$, a_C es la aceleración del centro de masas y α es la aceleración angular. La velocidad instantánea del punto de contacto con el suelo de un objeto rodante es nula, si no fuese así deslizaría; en consecuencia la fuerza de fricción con el suelo es una *fuerza de fricción estática*.

8.3. TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

TRABAJO DE UN MOMENTO DE FUERZA

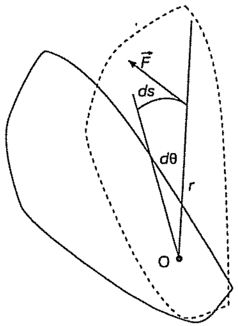
Consideremos un sólido sobre el que actúa una fuerza exterior $\vec{F}$ aplicada en el punto A, que está girando alrededor de un eje que pasa por O.

El trabajo debido al momento respecto a O de esta fuerza cuando el sólido gira un ángulo diferencial $d\theta$ es:

$$dW = \tau_O\, d\theta$$

El trabajo total W cuando el sólido gira desde una posición angular θ_1 y θ_2 es:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_O\, d\theta$$



Si el momento τ_O es constante, el trabajo para un desplazamiento angular $\Delta\theta$ será:

$$W = \tau_O\, \Delta\theta$$

Si se expresa el momento en Nm y el ángulo en radianes, el trabajo viene dado en joules.

Únicamente hay que considerar el trabajo de las fuerzas externas ya que el trabajo neto de las fuerzas internas es nulo. En efecto, supongamos dos partículas, las fuerzas de interacción entre las partículas tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Si el sólido es rígido, el desplazamiento de las dos partículas es idéntico, por tanto el trabajo neto de las dos fuerzas es nulo. (Si el sólido no es rígido o en el caso de un sistema de partículas, normalmente los desplazamientos de las dos partículas no son idénticos).

ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN

La energía cinética de traslación es la misma que la de un sistema de partículas, únicamente hay que tener presente que en el caso de un sólido rígido todas las partículas tienen la misma velocidad:

$$E_c = {}^1\!/_2\, m\, v^2$$

m representa la masa del sólido.

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

La energía cinética de un sólido que gira alrededor de un eje fijo, sea éste el eje z, viene dada por la expresión:

$$E_C = {}^1\!/_2\, I_z\, \omega^2$$

I_z es el momento de inercia respecto al eje z y ω es la velocidad angular.

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

La energía cinética de un sólido en movimiento plano es: $E_c = {}^1\!/_2\, m\, v_C^2 + {}^1\!/_2\, I_{cz}\, \omega^2$.

Si el sólido tiene un movimiento de traslación, la velocidad angular es nula y entonces la energía cinética es igual a ${}^1\!/_2\, m\, v_C^2$. Mientras que si el sólido tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas, la energía cinética es igual a ${}^1\!/_2\, I_{cz}\, \omega^2$. Podemos interpretar los dos términos de la expresión de la energía cinética de la siguiente forma: el primer término representa la energía cinética de traslación del centro de masas del sólido; el segundo término representa la energía cinética de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas.

Esta expresión puede aplicarse a cualquier sólido rígido con movimiento plano, cualquiera que sea su forma, es decir, no es necesario que cumpla ninguna condición de simetría.

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA PARA UN SÓLIDO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

El trabajo neto de todas las fuerzas externas y momentos externos es igual a la suma de las variaciones de las energías cinéticas de todas las partículas del sólido.

$$W_{1\to 2} = E_{c(2)} - E_{C(1)}$$

Si todas las fuerzas que actúan sobre el sólido son conservativas esta expresión se puede escribir:

$$U_1 + E_{C(1)} = U_2 + E_{C(2)}$$

Que es la ecuación de la conservación de la energía mecánica.

U_1 y U_2 representan la energía potencial en el punto 1 y en el punto 2, respectivamente. La energía potencial gravitatoria de un sólido puede calcularse suponiendo todo el peso concentrado en el centro de masas y considerar este punto como una partícula en traslación.

La potencia es el trabajo por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau\omega$$

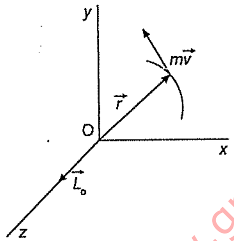
Si el momento se expresa en Nm y la velocidad angular en rad/s, entonces la potencia viene expresada en watt, W.

8.4 MOMENTO ANGULAR

MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

El momento angular, $\vec{L}_O$, de una partícula respecto a un punto O es el momento de la cantidad de movimiento, $\vec{P} = m\vec{v}$, respecto al punto O.

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



r representa el vector de posición de la partícula respecto al punto O. Al variar la posición de la partícula varía $\vec{r}$, por tanto, el momento angular va variando con el tiempo. El momento angular en todo instante es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{v}$. En el SI el momento angular se mide en kg m²/s.

El *momento resultante* respecto a un punto O de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada temporal del momento angular de la partícula respecto al punto O.

$$\sum \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

En el caso de una partícula el momento angular resultante respecto a un punto coincide con el momento de la fuerza resultante respecto al mismo punto.

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

De la expresión anterior se deduce el *teorema de la conservación del momento angular,* según el cual si el momento resultante respecto a un punto que actúa sobre una partícula es nulo, el momento angular de la partícula respecto a este punto permanece constante. Obsérvese que para que el momento resultante de fuerza sea nulo no es necesario que lo sea la fuerza resultante.

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

El momento angular respecto a un punto O de un sistema de partículas es igual a la suma de los momentos angulares respecto a O de los momentos angulares de todas las partículas del sistema.

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_o^i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

El *momento resultante* respecto a un punto O de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas es igual a la derivada temporal del momento angular del sistema respecto al punto O.

$$\sum \vec{\tau}_o^i = \frac{d\sum \vec{L}_o^i}{dt}$$

Según el *teorema de conservación del momento angular,* si el momento resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es nulo, el momento angular del sistema permanece constante.

MOMENTO ANGULAR DE UN SÓLIDO EN MOVIMIENTO PLANO

En el caso de una placa o de un sólido simétrico respecto al plano del movimiento, suponiendo que este plano sea paralelo al plano xy, el momento angular respecto al centro de masas cumple:

$$\vec{L}_C = I_{cz}\vec{\omega}$$

Esto quiere decir que $\vec{L}_C$ y $\vec{\omega}$ son paralelos.

En el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo que pasa por un punto O de un sólido simétrico respecto al plano del movimiento, que suponemos que es el plano xy, se cumple:

$$\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$$

No siempre $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son paralelos. Si el eje de rotación es un eje de simetría (de una forma más general es un eje principal de inercia), entonces $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ sí son paralelos y sí podemos escribir $\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$.

Si el eje de rotación no es un eje principal de inercia entonces $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen direcciones diferentes paralelas, entonces como $\vec{\omega}$ es siempre paralelo al eje de rotación, $\vec{L}$ no es paralelo al eje de rotación. Cuando el eje no es un eje principal de inercia, para un sistema de coordenadas $Oxyz$, suponiendo la rotación alrededor del eje z se cumple:

$$L_{Oz} = I_{Oz}\,\omega$$

I_{Oz} es el momento de inercia respecto al eje z que pasa por O; L_{Oz} es la componente z del momento angular.

De una forma general se cumple:

$$\vec{\tau}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt}$$

$\vec{\tau}_C$ es el momento resultante respecto al centro de masas de las fuerzas externas. Si $\vec{\tau}_C$ es nulo el momento angular se mantiene constante, es lo que se conoce como teorema de la *conservación del momento angular.*

La expresión anterior también se cumple cuando referimos los momentos a un punto fijo O en un sistema inercial de referencia:

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

ANALOGÍAS ENTRE LAS MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN Y DEL MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

Movimiento de traslación	*Movimiento de rotación*
Coordenada x	Coordenada angular θ
Velocidad $v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración $a = \frac{dv}{dt}$	Aceleración angular $\alpha = \frac{d\alpha}{dt}$
Fuerza F	Momento de fuerza τ_O
Masa m	Momento de inercia I
Trabajo $dW = F_S\,dS$	Trabajo $dW = t_O\,d\theta$
Energía cinética $E_c = {}^1/_2\,m\,v^2$	Energía cinética de rotación $E_c = {}^1/_2\,I\,\omega^2$
Cantidad de movimiento $p = mv$	Momento angular $L_o = I_{oz}\,\omega$

PROBLEMAS RESUELTOS

MOMENTO DE INERCIA

8.1. Determinar el momento de inercia de una varilla homogénea, de sección uniforme y longitud l, respecto:

a) A un eje perpendicular a la misma que pasa por uno de sus extremos.

b) A un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro de masas.

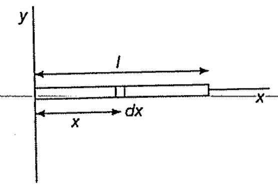
Solución

a) Respecto a un eje perpendicular a la misma que pasa por uno de sus extremos.

Tomamos un elemento de longitud dx situado a una distancia x del eje respecto al cual queremos calcular el momento de inercia que es el eje y. La masa de este elemento de longitud es $dm = \lambda\, dx$, siendo λ la densidad lineal de la varilla, que al ser la varilla uniforme es una constante. Para calcular el momento de inercia de la varilla aplicaremos la expresión:

$$I_y = \int r^2\, dm$$

donde r representa la distancia al eje que en nuestro caso denotamos por x. Los límites de integración son 0 y l.



Tenemos:

$$I_y = \int_0^l x^2\, \lambda\, dx = \lambda \int_0^l x^2\, dx = \lambda \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l = \frac{1}{3}\lambda l^3$$

Como la masa m de la varilla es igual: $m = \lambda l$, escribimos:

$$I_y = \frac{1}{3}\, m\, l^2$$

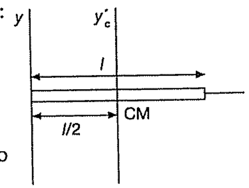
b) Respecto a un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro de masas.

Aplicaremos el teorema de Steiner o de los ejes paralelos: $I_y = I_{y'C} + md^2$.

I_y representa el momento de inercia respecto al eje y paralelo al eje $I_{y'C}$ que pasa por el centro de masas d es la distancia entre ambos ejes y m es la masa del sólido. En nuestro caso la distancia entre los dos ejes es $l/2$. Al aplicar el teorema de Steiner tenemos:

$$\frac{1}{3}\, m\, l^2 = I_{y'C} + m\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$I_{y'C} = \frac{1}{12}\, m\, l^2$$



Este apartado también podía haberse resuelto mediante un cálculo similar al del anterior.

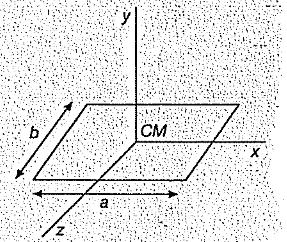
8.2. Determinar el momento de inercia de la lámina rectangular homogénea de la figura respecto:

a) Al eje z.

b) Al eje x.

c) Al eje y.

El origen de coordenadas se encuentra en el centro de masas de la lámina.



Solución

a) Respecto al eje z.

Tomaremos un elemento de masa que sea un rectángulo de base dx y altura b, si σ es la densidad superficial de la chapa, la masa de este elemento será:

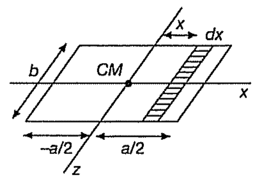
$$dm = \sigma\, b\, dx$$

La distancia de este elemento al eje z es x. El momento de inercia será:

$$I_z = \int_{-a/2}^{a/2} \sigma b x^2\, dx = \sigma b \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \sigma\, b\, \frac{a^3}{12}$$

Como la masa de la plancha es $m = \sigma$ ab, nos queda:

$$I_z = \frac{1}{12}\, m\, a^2$$



b) Respecto al eje x.

Un cálculo análogo al que hemos realizado para el eje z nos conduce a:

$$I_z = \frac{1}{12}\, m\, b^2$$

c) Respecto al eje y.

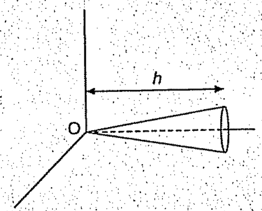
Aplicaremos el teorema de los ejes perpendiculares. Los ejes x y z están en el plano de la figura, son perpendiculares entre sí y pasan por el punto de intersección de la lámina con el eje y. Se cumple:

$$I_y = I_x + I_z$$

Sustituyendo resulta: $I_y = \frac{1}{12} m\, a^2 + \frac{1}{12} m\, b^2 = \frac{1}{12} m\,(a^2 + b^2)$

$$I_y = \frac{1}{12} m\,(a^2 + b^2)$$

8.3. Determinar el momento de inercia de un cono circular recto y homogéneo respecto a su eje de revolución. Altura $= h$ y radio $= r$. Dato, momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución $I = {}^1\!/_2\, mr^2$



Solución

Tomaremos como elemento de masa diferencial un disco de radio r' y altura dx. Si la densidad del material que forma el cono es ρ, la masa, dm, de este elemento será: $dm = \rho\, \pi\, r'^2\, dx$.

El radio r' varía con la distancia x al eje, hallaremos la relación entre ambos. Por semejanza de triángulos podemos escribir:

$$\frac{r'}{r} = \frac{x}{h} \qquad r' = \frac{r}{h} x$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos:

$$dm = \rho \pi \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx$$

Como el momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución es $I = {}^1\!/_2\, mr^2$, el momento de inercia del disco que consideramos respecto al eje x será:

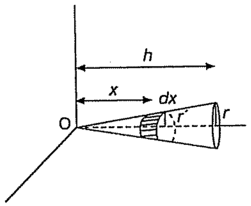
$$dI_x = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2 \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{r^4}{h^4} x^4\, dx$$

El momento de inercia del cono respecto al eje x se obtiene integrando entre 0 y h:

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi \frac{r^4}{h^4} x^4\, dx = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{r^4}{h^4} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{10} \rho \pi\, r^4\, h$$

La masa del cono es $m = \frac{1}{3} \rho\, \pi\, r^2\, h$, sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$I_x = \frac{3}{10} m\, r^2$$



ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

8.4. Sobre un volante que tiene un momento de inercia de 4,0 kg · m² y que se encuentra en reposo actúa un momento de fuerza de 3,6 N · m. Determinar:

a) La aceleración angular del volante.

b) Su velocidad angular al cabo de 10 s.

Solución

a) La aceleración angular del volante.

Aplicaremos la ecuación de la dinámica de rotación:

$$\sum \tau_C = I_{Cr}\, \alpha$$

Sustituyendo resulta:

$$3{,}6\ \text{N} \cdot \text{m} = 4{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\, \alpha \qquad \alpha = 0{,}90\ \text{rad/s}^2$$

b) La velocidad angular al cabo de 10 s.

Como la aceleración ha sido constante, la velocidad angular en un cierto instante viene dada por la expresión:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

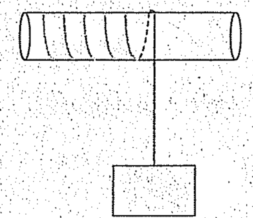
Al ser la velocidad inicial es cero, tenemos:

$$\omega = 0{,}90\ \text{rad/s}^2 \times 10\ \text{s} = 9{,}0\ \text{rad/s} \qquad \omega = 9{,}0\ \text{rad/s}$$

8.5. Un cilindro de masa 94 kg y radio $r = 8{,}3$ cm lleva una cuerda enrollada en su superficie de la que cuelga un peso de 35 kg. El cilindro gira perfectamente sobre su eje que se encuentra en posición horizontal. Determinar:

a) La aceleración angular del cilindro y la aceleración del peso.

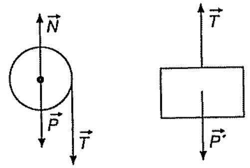
b) La tensión de la cuerda. Suponer que el cable no desliza sobre la superficie del cilindro y que es indeformable.



Solución

a) La aceleración angular del cilindro y la aceleración del peso.

Dibujaremos el diagrama del sólido libre del cilindro y del peso. Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son el peso, $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{N}$, que hace el eje y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$. Sobre el peso actúa el peso, $\vec{P}'$, y la tensión de la cuerda $\vec{T}$. Como se trata de un movimiento plano consideraremos una sección, el plano del movimiento.



Escribiremos las ecuaciones de la dinámica correspondientes al movimiento del cilindro y al del peso. El primero tiene un movimiento de rotación alrededor de su eje y el segundo, un movimiento de traslación.

Cilindro:

$$\circlearrowleft + \quad \sum \tau_C = I_{cx}\,\alpha \qquad T\,r = I_{Cx}\,\alpha$$

r representa el radio del cilindro.

Como el momento de inercia de un cilindro respecto a su eje es $I = {}^1\!/_2\, mr^2$, escribimos:

$$T\,r = {}^1\!/_2\, \text{m}\, r^2\, \alpha \qquad \text{T} = {}^1\!/_2\, \text{m}\, r\, \alpha \tag{1}$$

Peso:

$$+\downarrow \quad \sum F_y = \text{m}a \qquad \text{m}'g - T = \text{m}'a \tag{2}$$

Sustituimos el valor de T de (1) en (2):

$$\text{m}'g - {}^1\!/_2\, \text{m}r\,\alpha = \text{m}'a \tag{3}$$

Tenemos una ecuación y dos incógnitas. Como el cable no desliza sobre la superficie del cilindro y además lo consideramos indeformable, cuando el peso desciende una distancia y, el cilindro gira un ángulo θ relacionado con y por $y = r\theta$. Si derivamos dos veces respecto al tiempo esta expresión, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\,(r\theta)}{d^2t^2} \qquad a = r\alpha \tag{4}$$

a representa la aceleración del peso y α, la aceleración angular del cilindro; es lo que se conoce como condición cinemática. Sustituimos el valor $r\alpha$ en (3) por el que acabamos de obtener y resulta:

$$\text{m}'g - {}^1\!/_2\, \text{m}\, a = \text{m}'a$$

Sustituimos ahora por los correspondientes valores:

$$35\text{ kg} \times 9{,}81\text{ m/s}^2 - {}^1\!/_2\, 94\text{ kg}\, a = 35\text{ kg}\, a \qquad a = 4{,}18\text{ m/s}^2$$

En (4) tenemos:

$$4{,}18\text{ m/s}^2 = 8{,}3 \cdot 10^{-2}\text{ m}\,\alpha \qquad \alpha = 50{,}3\text{ rad/s}$$

$$a = 4{,}2\text{ m/s}^2 \qquad \alpha = 50\text{ rad/s sentido horario}$$

b) La tensión de la cuerda.

Sustituimos en (1) y teniendo en cuenta que $r\alpha = a$:

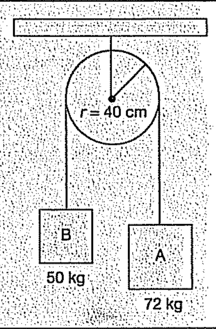
$$T = {}^1\!/_2\, 94\text{ kg} \times 4{,}18\text{ m/s}^2 = 196\text{ N} \qquad T = 2{,}0 \cdot 10^2\text{ N}$$

8.6. Una polea tiene un radio $r = 40$ cm, una masa de 10 kg y el radio de giro es de 30 cm. De los extremos del cable de la polea penden sendos pesos de 72 kg y 50 kg respectivamente. La polea debe vencer un momento de fricción de 1,2 N m. Determinar:

a) La aceleración de los pesos.

b) La aceleración angular de la polea.

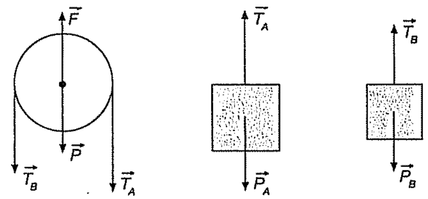
c) La fuerza vertical que hace el pivote de la polea. Suponer que el cable no se desliza sobre la superficie de la polea y que es indeformable.



Solución

a) La aceleración de los pesos.

Dibujaremos el diagrama del sólido libre de la polea y de los pesos. Las fuerzas que actúan sobre la polea son el peso, $\vec{P}$, la fuerza que hace el pivote, $\vec{F}$, y las tensiones de la cuerda, $\vec{T}_A$ y $\vec{T}_B$ que, como consideramos la masa de la polea habrá que suponer que son distintas. Sobre el peso A actúa su peso, $\vec{P}_A$ y la tensión, $\vec{T}_A$. Sobre el peso B actúa su peso, $\vec{P}_B$ y la tensión, $\vec{T}_B$.



Los pesos pesan:

$$P_A = 72\text{ kg} \times 9{,}81\text{ m/s}^2 = 706\text{ N}$$
$$P_B = 50\text{ kg} \times 9{,}81\text{ m/s}^2 = 490\text{ N}$$

Para calcular el momento de inercia de la polea nos dan su radio de giro, aplicaremos entonces la expresión: $I = \text{m}\,\text{k}^2$, donde k representa el radio de giro. Sustituimos:

$$I = 10\text{ kg} \times (0{,}30\text{ m})^2 = 0{,}90\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Aplicaremos ahora las ecuaciones de la dinámica a cada elemento:

$$\text{Peso A: } +\downarrow\ 706\text{ N} - T_A = 72\text{ kg a} \tag{1}$$

$$\text{Peso B: } +\uparrow\ T_B - 490\text{ N} = 50\text{ kg a} \tag{2}$$

$$\text{Polea: } \circlearrowleft + \quad \sum \tau_C = \text{I}_{Cx}\,\alpha;\ T_A\, 0{,}40\text{ m} - T_B\, 0{,}40\text{ m} - 1{,}2\text{ N} \cdot \text{m} = 0{,}90\text{ kg} \cdot \text{m} \tag{3}$$

Además de los momentos de las tensiones T_A y T_B (el momento de P y el de F son nulos) hemos contado también el momento debido a la fricción.

Como el cable es indeformable y no se desliza sobre la superficie de la polea, podemos aplicar también la condición cinemática

$$a = r\,\alpha;\ a = 0{,}40 \text{ m } \alpha \qquad (4)$$

Despejamos T_A y T_B de (1) y (2), respectivamente:

$$T_A = 706 \text{ N} - 72 \text{ kg } a \qquad T_B = 490 \text{ N} + 50 \text{ kg } a \qquad (5)$$

Sustituimos en (3):

$$(706 \text{ N} - 72 \text{ kg } a) \times 0{,}40 \text{ m} - (490 \text{ N} + 50 \text{ kg } a) \times 0{,}40 \text{ m} - 1{,}2 \text{ N}\cdot\text{m} = 0{,}90 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \frac{a}{(0{,}40 \text{ m})}$$

Resolvemos esta ecuación y se obtiene $a = 1{,}66 \text{ m/s}^2$.

Peso A: $a = 1{,}7 \text{ m/s}^2$ hacia abajo y peso b: $a = 1{,}7 \text{ m/s}^2$ hacia arriba.

b) La aceleración angular de la polea.

De (4) se obtiene:

$$1{,}66 \text{ m/s}^2 = 0{,}40 \text{ m } \alpha \qquad \alpha = 4{,}15 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha = 4{,}2 \text{ rad/s}^2 \text{ en sentido horario}$$

c) La fuerza vertical que hace el pivote de la polea.

La polea no tiene movimiento de traslación, por tanto:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad F - P - T_A - T_B = 0$$

$$P = 10 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 98{,}1 \text{ N}$$

De (5): $T_A = 706 \text{ N} - 72 \text{ kg} \times 1{,}66 \text{ m/s}^2 = 586 \text{ N}$; $T_B = 490 \text{ N} + 50 \text{ kg} \times 1{,}66 \text{ m/s}^2 = 573 \text{ N}$

$$F - 98{,}1 \text{ N} - 586 \text{ N} - 573 \text{ N} = 0 \qquad F = 1257 \text{ N}$$

$$F = 1{,}3 \text{ kN}$$

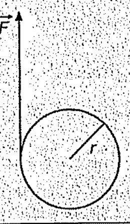
MOVIMIENTO PLANO GENERAL

8.7. Una cuerda indeformable está enrollada en el contorno de un disco homogéneo de radio r y masa m. Se tira de la cuerda hacia arriba con una fuerza $\vec{F}$. Determinar:

a) La aceleración del centro de masas del disco.

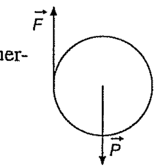
b) La aceleración angular del disco.

Efectuar el cálculo numérico para $r = 30$ cm, m = 0,90 kg, $F = 12$ N.



Solución

a) La aceleración del centro de masas del disco.



Las fuerzas que actúan sobre el disco son el peso, $\vec{P}$, y la fuerza $\vec{F}$ que hace la cuerda. Dibujamos el diagrama del sólido libre.

Aplicaremos la ecuación de Newton.

$$+\uparrow \sum F_y = m\,a_C \qquad F - mg = m\,a_C \qquad a_c = \frac{F - mg}{m}$$

Sustituimos las letras por sus valores respectivos:

$$a_c = \frac{12\,N - 0{,}90 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}90 \text{ kg}} = 3{,}52 \text{ m/s}^2 \qquad a_C = 3{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) La aceleración angular del disco.

Aplicaremos la ecuación de la dinámica de rotación.

$$(+) \quad \sum \tau_C = I_{Cz}\,\alpha \qquad F \cdot r = I_{Cz}\,\alpha$$

El momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución es $I = {}^1/_2 \text{ m } r^2$. Sustituimos en la expresión anterior y resulta:

$$F \cdot r = {}^1/_2 \text{ m } r^2\,\alpha \qquad F = {}^1/_2 \text{ m } r\,\alpha \qquad \alpha = \frac{2F}{\text{m } r}$$

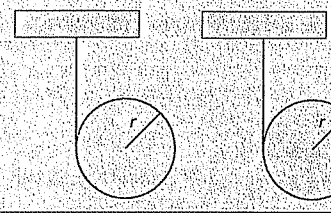
Substituimos las letras por los correspondientes valores:

$$\alpha = \frac{2 \times 12\,N}{0{,}90 \text{ kg} \times 0{,}30 \text{ m}} = 88{,}8 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 89 \text{ rad/s}^2$$

8.8. Un aro y un disco del mismo radio r y de la misma masa m llevan enrolladas sendas cuerdas en su periferia. Ambos se sueltan desde el reposo y desde la misma altura al mismo tiempo, a la vez que la cuerda permanece sujeta.

a) Determinar la aceleración de cada uno.

b) ¿Cuál de los dos tardará menos tiempo en descender una altura h? Suponer que las cuerdas no se deforman ni deslizan sobre la superficie de los sólidos.

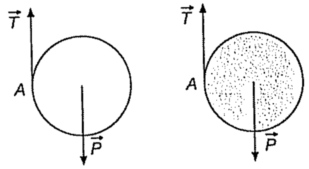


Solución

a) La aceleración de cada uno.

Las fuerzas que actúan sobre el anillo y sobre el disco en ambos casos son las mismas, se trata del peso, $\vec{P}$, y de la tensión, $\vec{T}$, de la cuerda. Dibujamos los correspondientes diagramas del sólido libre.

Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.



Traslación del sólido:

$$+\downarrow \sum F_y = \mathrm{m}\, a_C \qquad \mathrm{mg} - T = \mathrm{m}\, a_C \tag{1}$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\sum \tau_C = I_{cz}\, \alpha \quad , \quad T \cdot r = I_{Cz}\, \alpha \tag{2}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. Como la cuerda es indeformable y no se desliza, cuando el centro de masas desciende una altura y se desenrolla una longitud de cuerda igual a y que cumple $y = r\theta$, siendo θ el ángulo que ha girado el sólido, en consecuencia, podemos escribir otra ecuación:

$$a_C = r\alpha$$

Sustituimos el valor de α que se obtiene de esta ecuación en (2):

$$Tr = I_{cz}\frac{a_c}{r} \qquad T = I_{cz}\frac{a_c}{r^2}$$

Sustituimos ahora T en (1):

$$\mathrm{mg} - I_{cz}\frac{ac}{r^2} = \mathrm{m}\, a_c \qquad a_c = \frac{mg}{\mathrm{m} + \frac{I_{cz}}{r^2}} \tag{3}$$

Aro. El momento de inercia de un aro respecto a su eje de revolución es $I = \mathrm{m}\, r^2$. Sustituimos en (3)

$$a_c = \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m} + \frac{mr^2}{r^2}} = \frac{g}{2} \qquad a_C = \frac{g}{2}$$

Disco. El momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución es $I = {}^1/_2\, \mathrm{m} r^2$. Sustitui mos en (3):

$$a_c = \frac{mg}{m + \frac{1/2mr^2}{r^2}} = \frac{2g}{3} \qquad a_C = \frac{2g}{3}$$

b) ¿Cuál de los dos tardará menos tiempo en descender una altura h? La aceleración del disco e mayor que la del aro, por tanto tardará menos tiempo el disco. Esto puede justificarse también porqu el disco tiene un momento de inercia menor que el del aro.

OBSERVACIÓN

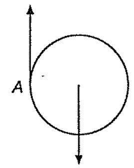
Si nos fijamos en el punto A de cualquiera de los sólidos, tenemos que, cuando el centro de masas de: ciende una altura y, el punto A gira un arco y que cumple $y = r\,\theta$, siendo θ el ángulo que ha girado

punto A y, por tanto, el sólido ha girado el mismo ángulo. Derivando los miembros de esta expresión tenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\,(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \qquad v_c = r\omega$$

v_C representa la velocidad del centro de masas y ω, la velocidad angular del sólido; $r\omega$ es la velocidad tangencial del punto A respecto al centro de masas, v_{AC}. Tenemos que $v_C = v_{AC}$, lo que quiere decir que los módulos de ambas velocidades son iguales, pero el momento que estamos considerando que es el que indica la figura los sentidos son distintos, ya que el centro de masas se mueve hacia abajo y el punto A se mueve hacia arriba. La velocidad del punto A, v_A, respecto al sistema de referencia que hemos tomado, un sistema de referencia ligado a la tierra, será:

$$+\downarrow v_A = v_C - v_{AC} = 0$$

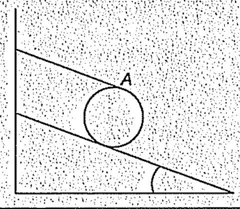


En este instante el punto A está en reposo, pero, como tiene una aceleración, sólo permanece en reposo un instante. El movimiento del sólido puede interpretarse como si en este instante girase alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por A, este eje se denomina *eje instantáneo de rotación.* Este eje corta el plano de la sección en un punto que se denomina *centro instantáneo de rotación.* A medida que el sólido se mueve el centro instantáneo de rotación va cambiando. El centro instantáneo de rotación puede estar situado en la sección o fuera de ella, en el primer caso la partícula del sólido que coincide con el centro instantáneo en un determinado instante debe tener velocidad nula.

8.9. El disco de la figura tiene un radio de 300 mm y una masa de 6,0 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y el plano inclinado es 0,20. Determinar:

a) La aceleración del centro de masas del disco.

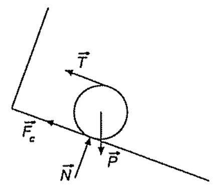
b) La tensión de la cuerda. Suponer que la cuerda es indeformable y que no desliza por la superficie del disco.



Solución

a) La aceleración del centro de masas del disco.

El punto A es un centro instantáneo de rotación; únicamente es posible el movimiento de deslizamiento por el plano, en consecuencia, la fuerza de fricción es de fricción cinética. Las fuerzas que intervienen son el peso, P, la tensión de la cuerda, $\vec{T}$, la fuerza normal que realiza el plano, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción cinética, $\vec{F}_c$. Dibujamos el diagrama del sólido libre.



El peso del disco es:

$$P = 6,0 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 58,8 \text{ N}$$

El momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución es $I = \frac{1}{2} m\, r^2$. Tenemos por tanto: $I = {}^1\!/_2\, 6,0 \text{ kg} \times (0,300 \text{ m})^2 = 0,270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.

Movimiento de traslación.

$$+\searrow \quad \sum F_x = m\, a_C \qquad 58,8 \text{ N sen } 30° - F_c - T = 6,0 \text{ kg}\, a_C \qquad F_c = 0,20\, N \qquad (1)$$

$$+\nearrow \quad \sum F_y = 0 \qquad N - 58,8 \text{ N cos } 30° = 0 \qquad N = 50,9 \text{ N}$$

$$F_c = 0,20 \times 50,9\, N = 10,1 \text{ N}$$

En (1) tenemos:

$$58,8 \text{ N sen } 30° - 10,1 \text{ N} - T = 6,0 \text{ kg}\, a_C \qquad (2)$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\sum \tau_{cz} = I_{cz}\, \alpha\, ;\; T \cdot 0,300 \text{ m} - 0,20 \times 50,9 \text{ N} \times 0,300 \text{ m} = 0,270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\, \alpha \qquad (3)$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, pero, como A es un centro instantáneo de rotación, podemos aplicar la condición cinemática:

$$a_C = 0,300 \text{ m}\, \alpha$$

En (3) tenemos:

$$T \cdot 0,300 \text{ m} - 0,20 \times 50,9 \text{ N} \times 0,300 \text{ m} = 0,270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times \frac{a_C}{(0,300 \text{ m})} \qquad (4)$$

Despejamos T en (2):

$$T = 19,3 \text{ N} - 6,0 \text{ kg}\, a_C \qquad (5)$$

Sustituimos en (4):

$$(19,3 \text{ N} - 6,0 \text{ kg}\, a_C)\, 0,300 \text{ m} - 3,05 \text{ N} \cdot \text{m} = 0,270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times \frac{a_C}{(0,300 \text{ m})}\, ;\; a_C = 1,01 \text{ m/s}^2$$

$$a_C = 1,0 \text{ m/s}^2$$

b) Tensión de la cuerda.

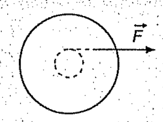
Sustituimos en (5):

$$T = 19,3 \text{ N} - 6,0 \text{ kg} \times 1,01 \text{ m/s}^2 = 13,2 \text{ N}$$

$$T = 13 \text{ N}$$

RODADURA

8.10. Un carrete está formado por dos discos de radio 160 mm unidos por un tambor de 80 mm de radio. El carrete tiene una masa de 5,0 kg y un radio de giro de 120 mm. El tambor lleva un hilo arrollado tal como indica la figura. Se tira del hilo con una fuerza $\vec{F}$ de módulo 18 N. Determinar la aceleración del centro de masas y la aceleración angular del carrete:

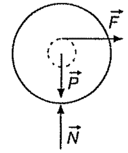


a) Si el carrete se mueve por una superficie completamente pulida;

b) Si se mueve por una superficie rugosa de coeficientes de fricción estática y cinética $\mu_e = 0,20$ y $\mu_c = 0,15$, respectivamente; en este segundo caso el carrete ¿deslizará o rodará?

Solución

a) Si el carrete se mueve por una superficie completamente pulida.



Dibujaremos el diagrama del sólido libre. Las fuerzas que intervienen son el peso, $\vec{P}$, la fuerza $\vec{F}$ y la fuerza que hace el suelo, $\vec{N}$.
Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.
El carrete se mueve hacia la derecha a la vez que gira.
Movimiento de traslación:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = m\, a_C \qquad 18 \text{ N} = 5,0 \text{ kg}\, a_C \qquad a_C = 3,6 \text{ m/s}^2$$

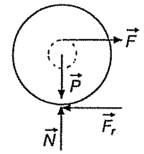
El momento de inercia. Aplicaremos la expresión $I = m\, k^2$ que nos da el momento de inercia en función del radio de giro.

$$I = 5,0 \text{ kg} \times (0,120 \text{ m})^2 = 7,20 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\sum \tau_C = I_{Cz}\, \alpha \qquad 18 \text{ N} \times 0,080 \text{ m} = 7,20 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\, \alpha \qquad \alpha = 20 \text{ rad/s}^2$$

b) Si se mueve por una superficie rugosa.



Ahora además de las fuerzas del caso anterior interviene la fuerza de fricción, que, como no sabemos si se trata de fricción estática o cinética, denotaremos $\vec{F}_r$. Dibujamos el diagrama del sólido libre.

Supondremos que el carrete rueda sin deslizar. Para comprobar si esta suposición es correcta, hallaremos el valor de $\vec{F}_r$ y compararemos el valor obtenido con el valor máximo de la fuerza de fricción estática.
Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.
Movimiento de traslación.

$$\sum F_x = m\, a_C \qquad 18 \text{ N} - F_r = 5,0 \text{ kg}\, a_C \qquad (1)$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\sum \tau_C = I_{Cz}\, \alpha \qquad 18 \text{ N} \times 0,080 \text{ m} + F_r\, 0,160 \text{ m} = 7,20 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\, \alpha \qquad (2)$$

Como suponemos que se trata de un movimiento de rodadura, aplicaremos la condición cinemática:

$$a_C = r\,\alpha \qquad a_C = 0{,}160\ \text{m}\ \alpha \tag{3}$$

Aislamos a_C en (1):

$$a_C = \frac{18\,N - F_r}{5{,}0\ \text{kg}} \tag{4}$$

Sustituimos este valor en (3) y aislamos α:

$$\alpha = \frac{18\,N - F_r}{5{,}0\ \text{kg} \times 0{,}160\ \text{m}}$$

Ahora sustituimos en (2):

$$18\,N \times 0{,}80\ \text{m} + F_r \times 0{,}160\ \text{m} = 7{,}20 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \left(\frac{18\,N - F_r}{5{,}0\ \text{kg} \times 0{,}160\ \text{m}}\right);\ F_r = 0{,}720\ \text{N}$$

Calcularemos el valor máximo de la fuerza de fricción estática. El valor máximo de la fuerza de fricción estática viene dado por la expresión:

$$F_{e\,\text{máx.}} = \text{m}_e\,N$$

Para hallar N hacemos:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad N - 5{,}0\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \qquad N = 49{,}0\ \text{N}$$

Entonces:

$$F_{e\,\text{máx}} = 0{,}20 \times 49{,}0\ \text{N} = 9{,}80\ \text{N}$$

$$F_r < 49{,}0\ \text{N}$$

Como $F_r < F_{e\,\text{máx}}$, es posible el movimiento de rodadura.

Para calcular a_C sustituiremos el valor de F_r obtenido en (4):

$$a_C = \frac{18\,N - 0{,}720\,N}{5{,}0\ \text{kg}} = 3{,}45\ \text{m/s}^2 \qquad a_C = 3{,}5\ \text{m/s}^2$$

De (3) se obtiene:

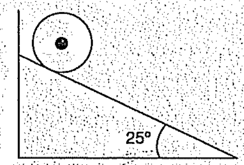
$$3{,}45\ \text{m/s}^2 = 0{,}160\ \text{m}\ \alpha \qquad \alpha = 21{,}5\ \text{rad/s}^2$$

$$\alpha = 22\ \text{rad/s}^2$$

8.11. Un cilindro de radio 50 cm y masa 6,0 kg desciende rodando por un plano inclinado 25°. Determinar:

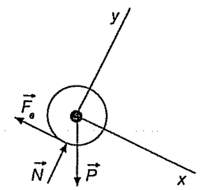
a) La aceleración del centro de masas y la aceleración angular.

b) La velocidad del centro de masas y la velocidad angular al cabo de 4,0 s de iniciar el descenso, si partió del reposo.



Solución

a) La aceleración del centro de masas y la aceleración angular.



Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son el peso, $\vec{P}$, la fuerza normal que hace el plano, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción que, como el cilindro está rodando, será de fricción estática. Dibujamos el diagrama del sólido.

Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.

El peso del cilindro es $P = 6{,}0\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 58{,}8\ \text{N}$.

El momento de inercia de un cilindro respecto a su eje de revolución es: $I = {}^1/_2\ \text{m}\ r^2$, que sustituyendo se obtiene: $I = {}^1/_2\ 6{,}0\ \text{kg} \times (0{,}50\ \text{m})^2 = 0{,}750\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Movimiento de traslación.

$$+\searrow \quad \sum F_x = \text{m}\,a_C \qquad 58{,}8\ \text{N sen } 25° - F_e = 5{,}0\ \text{kg}\ a_C \tag{1}$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\circlearrowright\!+ \quad \sum \tau_C = I_{Cz}\,\alpha \qquad F_e \times 0{,}50\ \text{m} = 0{,}750\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \alpha \tag{2}$$

Como suponemos que se trata de un movimiento de rodadura, aplicaremos la condición cinemática:

$$a_C = r\,\alpha \qquad a_C = 0{,}50\ \text{m}\ \alpha \tag{3}$$

Aislamos F_e en (1):

$$F_e = 58{,}8\ \text{N sen } 25° - 5{,}0\ \text{kg}\ a_C$$

Sustituimos (2) este valor de F_e y el de α por el que se obtiene en (3):

$$(58{,}8\ \text{N sen } 25° - 5{,}0\ \text{kg}\ a_C) \times 0{,}50\ \text{m} = 0{,}750\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{a_C}{0{,}50}\ \text{m};\ a_C = 3{,}10\ \text{m/s}^2$$

$$a_C = 3{,}1\ \text{m/s}^2$$

De (3): $3{,}10\ \text{m/s}^2 = 0{,}50\ \text{m}\ \alpha \qquad \alpha = 6{,}20\ \text{rad/s}^2 \qquad \alpha = 6{,}2\ \text{rad/s}^2$

b) La velocidad del centro de masas y la velocidad angular al cabo de 4,0 s de iniciar el descenso. Sigue un movimiento uniformemente acelerado.

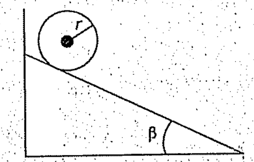
$$v_C = a_C\, t \qquad v_C = 3{,}10\ \text{m/s}^2 \times 4{,}0\ \text{s} = 12{,}4\ \text{m/s} \qquad v_C = 12\ \text{m/s}$$

$$\omega = \alpha t \qquad \omega = 6{,}20\ \text{rad/s}^2 \times 4{,}0\ \text{s} = 24{,}8\ \text{rad/s} \qquad \omega = 25\ \text{rad/s}$$

8.12. Determinar la máxima inclinación que puede tener un plano inclinado para que descienda rodando por él:

a) Un aro de radio *r*;

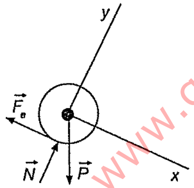
b) Un disco del mismo radio. Suponer que el aro y el disco son del mismo material y que el coeficiente de fricción estática con el plano es μ_e.



Solución

Las fuerzas que actúan sobre el sólido son el peso, $\vec{P}$, la fuerza normal que hace el plano, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción que, como el sólido está rodando, será de fricción estática. Dibujamos el diagrama del sólido libre.

Aplicaremos las ecuaciones del movimiento plano general.



Movimiento de traslación.

$$+\searrow \quad \sum F_x = \text{m}\, a_C \qquad \text{mg sen}\, \beta - F_e = \text{m}\, a_C \tag{1}$$

$$+\nearrow \quad \sum F_y = 0 \qquad N - \text{mg cos}\, \beta = 0 \qquad N = \text{mg cos}\, \beta \tag{2}$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\circlearrowright+ \quad \sum \tau_C = I_{Cz}\, \alpha \qquad F_e\, r = I_{Cz}\, \alpha \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $a_C = r\,\alpha$ de (3) se deduce:

$$a_C = \frac{F_e r^2}{I_{Cz}}$$

Sustituimos en (1):

$$mg \text{ sen}\, \beta - F_e = \text{m}\frac{F_e r^2}{I_{Cz}} \tag{4}$$

El valor máximo de F_e es: $F_{e\,\text{máx}} = \mu_e N$

Sustituimos *N* por el valor hallado en (2):

$$F_{e\,\text{máx}} = \mu_e \text{ mg cos}\, \beta$$

Sustituimos ahora en (4):

$$\text{mg sen}\, \beta - \mu_e \text{mg cos}\, \beta = \frac{m\, r^2}{I_{Cz}}\, \mu_e \text{mg cos}\, \beta \qquad tg\, \beta = \mu_e\left(1 + \frac{m\, r^2}{I_{Cz}}\right) \tag{5}$$

a) Un aro de radio *r*.

El momento de inercia de un aro respecto a su eje de revolución es:

$$I = \text{m}\, r^2$$

Sustituimos en (5):

$$tg\, \beta = \mu_e\left(1 + \frac{mr^2}{mr^2}\right) \qquad tg\, \beta = 2\mu_e$$

b) Un disco de radio *r*.

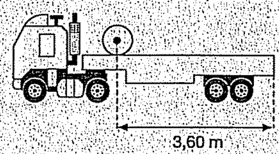
El momento de inercia de un disco respecto a su eje de revolución es:

$$I = {}^1\!/_2\, \text{m}\, r^2$$

Sustituimos en (5):

$$tg\, \beta = \mu_e\left(1 + \frac{mr^2}{1/2\, mr^2}\right) \qquad tg\, \beta = 3\mu_e$$

8.13. Un barril se encuentra, como indica la figura, en la plataforma de un camión que está detenido. El camión arranca con una aceleración de módulo 0,90 m/s^2 y el cilindro rueda sin deslizar por la plataforma. Determinar:



a) El tiempo que tarda el barril en caer al suelo.

b) La velocidad angular en este instante. Considerar el barril como un cilindro homogéneo.

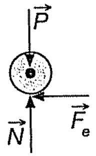
Solución

a) El tiempo que tarda el barril en caer al suelo.

Antes de caer al suelo el barril debe recorrer una distancia de 3,60 m sobre la plataforma del camión. Determinaremos la aceleración del centro de masas del barril respecto a la plataforma. Denotaremos por a_C la aceleración del centro de masas respecto a un sistema de referencia ligado al suelo y por a_p la aceleración de la plataforma respecto al mismo sistema, la aceleración a_{cp} del centro de masas del barril respecto a la plataforma cumple:

$$a_C = a_p + a_{cp} \tag{1}$$

Calcularemos primero a_C. La fuerzas que actúan sobre el barril son el peso, $\vec{P}$, la normal que hace la plataforma, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción, dado que el barril rueda, es la fuerza de fricción estática, F_e. Dibujamos el diagrama del sólido libre del barril.



El momento de inercia del barril respecto a su eje de revolución es:

$$I = {}^1\!/_2\, \mathrm{m}\, r^2$$

Aplicamos las ecuaciones del movimiento plano general.

Movimiento de traslación.

$$\sum F_x = \mathrm{m}\, a_c - F_e = \mathrm{m}\, a_c \qquad (2)$$

Rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro de masas.

$$\sum \tau_C = I_{Cz}\, \alpha \qquad F_e\, r = {}^1\!/_2\, \mathrm{m}\, r^2\, \alpha \qquad (3)$$

Como el barril rueda sobre la plataforma se cumple: $a_{cp} = r\,\alpha$. Podemos rescribir (3):

$$F_e\, r = {}^1\!/_2\, \mathrm{m}\, r^2 \frac{a_{cp}}{r} \qquad F_e = {}^1\!/_2\, \mathrm{m}\, a_{cp}$$

Sustituimos en esta expresión el valor de F_e que nos da (2):

$$-\mathrm{m}\, a_C = {}^1\!/_2\, \mathrm{m}\, a_{cp} \qquad a_C = -{}^1\!/_2\, a_{cp}$$

Sustituimos este valor en (1):

$$-{}^1\!/_2\, a_{cp} = a_p + a_{cp} \qquad a_{cp} = -2/3\, a_c$$

El camión se mueve hacia la izquierda, en el sentido que hemos tomado como negativo, la aceleración del camión tiene un módulo de 0,90 m/s², por tanto $a_c = -0{,}90\ \mathrm{m/s^2}$ y $a_{cp} = -2/3\,(-0{,}90\ \mathrm{m/s^2}) = 0{,}600\ \mathrm{m/s^2}$.

El centro de masas sigue un movimiento uniformemente acelerado habiendo partido del reposo. La ecuación de la posición es:

$$x = {}^1\!/_2\, a\, t^2$$

Sustituyendo se obtiene:

$$3{,}60\ \mathrm{m} = {}^1\!/_2\, 0{,}600\ \mathrm{m/s^2}\, (t^2) \qquad t = 3{,}46\ \mathrm{s}$$

$$\text{Tarda } t = 3{,}5\ \mathrm{s}$$

b) La velocidad angular del barril en el instante en que cae al suelo.

La aceleración angular del barril cumple: $a_{cp} = r\,\alpha$, que sustituyendo se obtiene:

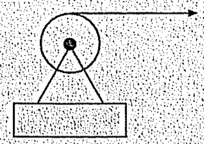
$$0{,}60\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}40\ \mathrm{m}\ \alpha \qquad \alpha = 1{,}50\ \mathrm{rad/s^2}$$

Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado:

$$\omega = \alpha\, t \qquad \omega = 1{,}50\ \mathrm{rad/s^2} \times 3{,}46\ \mathrm{s} = 5{,}19\ \mathrm{rad/s} \qquad \omega = 5{,}2\ \mathrm{rad/s}$$

TRABAJO Y ENERGÍA

8.14. El disco de la figura, de masa 88 kg y de radio 20 cm, tiene una cuerda inextensible, de 0,50 m de longitud, arrollada a su periferia. Se tira de la cuerda con una fuerza constante de 22 N en dirección tangente al disco y éste empieza a girar a la vez que la cuerda se desenrolla. Determinar en el momento en que el disco ha dado media vuelta:



a) El trabajo efectuado.

b) La energía cinética del disco.

Solución

a) El trabajo efectuado por la cuerda.

La fuerza ejerce sobre la periferia del disco una fuerza de 22 N, y su momento respecto al centro O es:

$$\tau_O = 22\ \mathrm{N} \times 0{,}20\ \mathrm{m} = 4{,}40\ \mathrm{N \cdot m}$$

El trabajo para un desplazamiento angular $\Delta\theta$ viene dado por la expresión:

$$W = \tau\Delta\theta$$

$\Delta\theta$ debe expresarse en radianes, media vuelta es igual a π rad. Aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$W = 4{,}40\ \mathrm{N \cdot m} \times \pi\ \mathrm{rad} = 13{,}8\ \mathrm{J}$$

$$W = 14\ \mathrm{J}$$

b) La energía cinética del disco.

Si ninguna otra fuerza ha efectuado trabajo alguno, el trabajo neto es 14 J y este valor es la variación de energía cinética. En efecto, según el teorema trabajo-energía, el trabajo neto de todas las fuerzas externas y momentos externos es igual a la suma de las variaciones de las energías cinéticas de todas las partículas del sólido:

$$W_{1\to 2} = E_{c\,(2)} - E_{C(1)}$$

Como inicialmente el disco estaba en reposo $E_{C(1)} = 0$. Por tanto:

$$E_c = 14\ \mathrm{J}$$

8.15. La potencia que desarrolla el motor de un automóvil cuando gira a 6 000 rpm es de 115 kW. Determinar el momento de fuerza correspondiente.

Solución

La expresión que relaciona la potencia y el momento de fuerza es:

$$P = \tau\omega$$

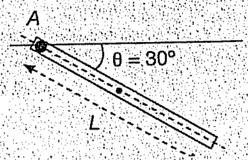
Expresaremos la velocidad angular en rad/s:

$$6\,000\ rpm \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{\mathrm{rev}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ s} = 628{,}31\ \mathrm{rad/s}$$

Tenemos:

$$115 \cdot 10^3\,\text{kW} = \tau \times 628{,}31\ \text{rad/s} \qquad \tau = 183\ \text{N} \cdot \text{m}$$

8.16. Una barra rígida uniforme de longitud L y masa m puede girar libremente sobre un pivote sin fricción situado en uno de sus extremos. Se suelta la barra desde la posición horizontal. Determinar para el instante en que $\theta = 30°$:



a) La velocidad angular de la barra.

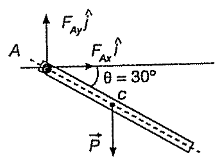
b) La velocidad tangencial del extremo de la barra.

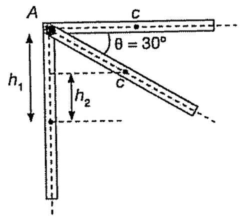
Efectuar los cálculos para $L = 80$ cm .

Solución

a) La velocidad angular de la barra.

La barra gira alrededor del pivote. Las fuerzas que actúan sobre la barra son el peso, $\vec{P}$, y la fuerza que hace el pivote, cuyas componentes son F_{Ax} y F_{Ay}. A es el punto de intersección del pivote con la sección representativa. Los momentos de F_{Ax} y F_{Ay} respecto al punto A son nulos, por tanto no efectúan trabajo. La única fuerza que efectúa trabajo es el peso. Como se trata de una fuerza conservativa se conserva la energía mecánica. Tomaremos como referencia para la energía potencial la posición del centro de masas cuando la barra está en posición vertical.





Posición inicial:

$$U = \text{mg}h_1 \qquad U_1 = \text{mg}\,L/2 \qquad E_{c(1)} = 0$$

Posición final:

El centro de masas de la barra está a una altura $h_2 = L/2 - L/2 \operatorname{sen}\theta$.
El momento de inercia de la barra respecto a un eje que pasa por A es:

$$I_A = 1/3\ \text{m}\,L^2$$

$$U_2 = \text{mg}\,(L/2 - L/2 \operatorname{sen}\theta) \qquad E_{c(2)} = {}^1/_2\, I\, \omega^2 \qquad E_{c(2)} = {}^1/_2\, {}^1/_3\, \text{m}\, L^2\, \omega^2$$

Conservación de la energía:

$$\text{mg}\,L/2 = \text{mg}\,(L/2 - L/2 \operatorname{sen}\theta) + 1/6\ \text{m}\,L^2\,\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{3\,g \operatorname{sen}\theta}{L}} \qquad (1$$

Cálculo numérico:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times \operatorname{sen} 30°}{0{,}80\ \text{m}}} = 4{,}28\ \text{rad/s} \qquad \omega = 4{,}3\ \text{rad/s}$$

b) La velocidad tangencial del extremo de la barra.

El extremo de la barra está a una distancia L del eje de giro. La velocidad está relacionada con la velocidad angular por: $v = \omega r$. Tenemos: $v = \omega L$.

Substituimos el valor de w por el que se obtiene de (2) y resulta:

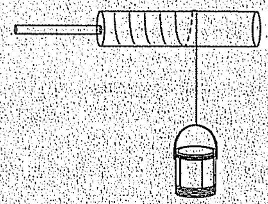
$$v = L\sqrt{\frac{3\,g \operatorname{sen}\theta}{L}} \qquad v = \sqrt{3\,g\,L \operatorname{sen}\theta}$$

Cálculo numérico:

$$v = \sqrt{3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 0{,}80\ \text{m} \times \operatorname{sen} 30°} = 3{,}43\ \text{m/s}$$

$$v = 3{,}4\ \text{m/s}$$

8.17. Un cubo para sacar agua de un pozo tiene una masa de 20 kg y está atado al extremo de una cuerda arrollada a un torno cilíndrico de 20 cm de radio y un momento de inercia de 0,20 kg m². Se suelta el cubo desde el reposo y desciende 10 m antes de chocar con el agua. Determinar en el momento de chocar con el agua:



a) La velocidad del cubo.

b) La velocidad angular del torno. Suponer que la cuerda es de masa despreciable e indeformable y que no se desliza por la superficie del torno.

Solución

a) La velocidad del cubo.

Las fuerzas que intervienen son el peso del cubo y la tensión de la cuerda, el peso es una fuerza conservativa y el trabajo neto que hace la tensión es nulo, ya que el trabajo que hace sobre el cubo se cancela con el trabajo que hace sobre el torno. En consecuencia, se conserva la energía mecánica. Suponemos que inicialmente el sistema está en reposo, por tanto, sólo tiene energía potencial gravitatoria. Tomaremos como referencia para la energía potencial la superficie del agua del pozo.

Posición inicial:
La energía potencial gravitatoria viene dada por la expresión $U = \text{mgh}$.

$$U_1 = 20\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 10\ \text{m} = 1{,}96 \cdot 10^3\ \text{J}$$

$$E_{c\,(1)} = 0$$

Posición final:

$$U_2 = 0$$

Respecto a la energía cinética habrá que considerar la energía cinética del cubo y la energía cinética de rotación del torno.

La energía cinética de un objeto que tiene un movimiento de traslación es $E_c = {}^1/_2\, m\, v^2$, la energía cinética de rotación alrededor de un eje es $E_c = {}^1/_2\, I\, \omega^2$, I es el momento de inercia del sólido respecto al eje de rotación. Tenemos, por tanto:

$$E_{c\,(2)} = {}^1/_2\ 20\ \text{kg}\ v^2 + {}^1/_2\ 0{,}20\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\ \omega^2$$

v representa la velocidad del cubo y ω, la velocidad angular del disco.

Como la cuerda es indeformable y no se desliza, podemos aplicar la condición cinemática:

$$\omega = \frac{v}{0{,}20} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta esta expresión y que $U_1 + E_{c\,(1)} = U_2 + E_{c\,(2)}$, podemos escribir:

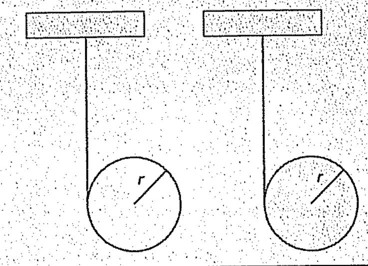
$$1{,}96 \cdot 10^3\ J = \frac{1}{2} 20\ \text{kg}\ v^2 + \frac{1}{2} 0{,}20\ kg \cdot m^2 \left(\frac{v}{0{,}20}\right)^2 \qquad v = 12{,}5\ \text{m/s}$$

$$v = 13\ \text{m/s}$$

b) La velocidad angular del torno. Aplicaremos la expresión (1):

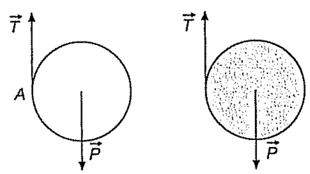
$$\omega = 12{,}5\ \frac{\text{m/s}}{0{,}20\ \text{m}} = 62{,}5\ \text{rad/s} \qquad \omega = 63\ \text{rad/s}$$

8.18. Un aro y un disco homogéneos, del mismo radio r y de la misma masa m, llevan enrolladas sendas cuerdas en su periferia. Ambos se sueltan desde el reposo al mismo tiempo y desde la misma altura a la vez que la cuerda permanece sujeta. Determinar la velocidad de cada sólido después de que su centro ha descendido una distancia h. Suponer que estas cuerdas son indeformables y que no deslizan.



Solución

Dibujaremos el diagrama del sólido. Las fuerzas que intervienen son el peso, $\vec{P}$, y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$. Como la cuerda es indeformable y no desliza, el punto A de contacto de la cuerda está en reposo respecto a la cuerda, en consecuencia la tensión, al no desplazarse su punto de aplicación, no efectúa trabajo. La única fuerza que realmente realiza trabajo es el peso y como es una fuerza conservativa se conserva la energía mecánica. Tomaremos como referencia para la energía potencial la posición final del centro de masas.



Posición inicial:

$$U_1 = mgh$$

$$E_{c(1)} = 0$$

Posición final:

$$U_2 = 0$$

$$E_{c\,(2)} = {}^1/_2\, m\, v_C^2 + {}^1/_2\, I_C\, \omega^2$$

Como la cuerda es indeformable y no desliza, podemos aplicar la condición cinemática $v_C = r\,\omega$. Sustituimos en la expresión anterior el valor de ω que se obtiene a partir de esta última y resulta:

$$E_{c(2)} = \frac{1}{2} m\, v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \frac{v_C^2}{r^2} = \frac{v_C^2}{2}\left(m + \frac{I_C}{r^2}\right)$$

Conservación de la energía mecánica:

$$mgh = \frac{v_C^2}{r^2}\left(m + \frac{I_C}{r^2}\right) \qquad v_C = \sqrt{\frac{2\,mgh}{m + \frac{I_c}{r^2}}} \tag{1}$$

Aro.

El momento de inercia respecto a su eje de revolución es $I = \text{m}r^2$. Sustituimos en (1):

$$v_C = \sqrt{\frac{2\,mgh}{m + \frac{mr^2}{r^2}}} = \sqrt{gh}$$

$$v_C = \sqrt{gh}$$

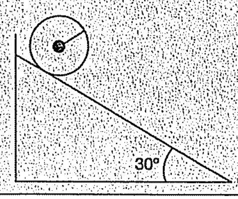
Disco.

El momento de inercia respecto a su eje de revolución es $I = {}^1/_2\, \text{m}r^2$. Sustituimos en (1):

$$v_C = \sqrt{\frac{2\,mgh}{m + \frac{1/2\,mr^2}{r^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,gh = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

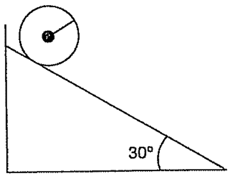
v (aro) $= (g\,h)^{1/2}$ $\qquad v$ (disco) $= 2\,(g\,h/3)^{1/2}$

8.19. Desde la parte superior de un plano inclinado 30° se deja en libertad un cilindro de 5,0 cm de radio, el cilindro desciende rodando. Determinar la velocidad del centro de masas y la velocidad angular del cilindro una vez ha rodado 3,0 m.

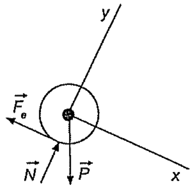


Solución

Las fuerzas que intervienen son el peso, $\vec{P}$, la fuerza normal, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción, $\vec{F}_e$. Dibujamos el diagrama del sólido libre.



Como la fuerza de fricción es de fricción estática no realiza trabajo puesto que su punto de aplicación no se desplaza, la energía mecánica se conserva. Tomaremos como punto de referencia para la energía potencial la posición final del centro de masas del cilindro.



Posición inicial:

$$U_1 = mgh$$

$$E_c\,(1) = 0$$

Posición final:

$$U_2 = 0$$

$$E_c\,(2) = {}^1/_2\, m\, v_C^2 + {}^1/_2\, I_C\, \omega^2 \qquad (1)$$

El momento de inercia de un cilindro respecto a su eje de revolución es:

$$I = {}^1/_2\, mr^2$$

Como el cilindro desciende rodando se cumple la condición cinemática $v_C = r\,\omega$.

Teniendo en cuenta estas dos últimas expresiones, escribiremos la (1):

$$E_{c(2)} = \frac{1}{2}\text{m}\, v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\text{m}\, r^2\frac{v_C^2}{r^2} = \frac{3}{4}\text{m}\, v_C^2$$

Conservación de la energía:

$$mgh = {}^3/_4\,\text{m}\, v_C^2$$

Si l es la longitud de plano que ha recorrido el cilindro, y θ es el ángulo de inclinación del plano se cumple: $h = \text{l sen}\,\theta$.

Escribiremos la expresión anterior:

$$\text{g l sen}\,\theta = = {}^3/_4\, v_C^2 \qquad v_C = 2\sqrt{\frac{g\, l\,\text{sen}\,\theta}{3}}$$

Sustituimos:

$$v_C = 2\sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s} \times 3{,}0\ \text{m} \times sen\ 30°}{3}} = 4{,}42\ \text{m/s}$$

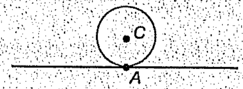
$$v_C = 4{,}4\ \text{m/s}$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \frac{4{,}42\ \text{m/s}}{5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 88{,}4\ \text{rad/s}$$

$$\omega = 88\ \text{rad/s}$$

8.20. Demostrar que la E_c de un objeto rodante, por ejemplo una esfera, es la misma que la que tendría si consideramos una rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por el punto A de contacto con el suelo y que es perpendicular al plano del movimiento.



Solución

La energía cinética del sólido rodante es:

$$E_c = {}^1/_2\, mv_C^2 + {}^1/_2\, I_C\, \omega^2$$

Como el sólido está rodando se cumple: $v_C = r\,\omega$

r representa el radio del sólido.

Sustituimos en la expresión de la energía cinética:

$$E_c = {}^1/_2\, mr^2\omega^2 + {}^1/_2\, I_C\,\omega^2 + {}^1/_2\, mr^2\,\omega^2 = {}^1/_2\,(I_C + mr^2)\,\omega^2$$

De acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, $I_C + mr^2$ es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masas que se encuentra a una distancia r de este eje, esto es un eje que pasa por A:

$$I_A = I_C + mr^2$$

Sustituimos en la expresión anterior y resulta:

$$E_c = {}^1/_2\, I_A\,\omega^2$$

ω representa la velocidad angular de los puntos del sólido, y también del punto A, respecto al centro de masas. En consecuencia será la velocidad angular del centro de masas C respecto a A. Es decir, la velocidad angular del punto A vista desde el centro de masas C es la misma que la velocidad angular del centro de masas vista desde A.

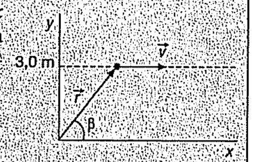
Por tanto, la energía cinética del sólido rodante es la misma si consideramos una rotación alrededor de un eje instantáneo que pasa por el punto de contacto con el suelo que si consideramos que la rodadura es una traslación del centro de masas y una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas y que es perpendicular al plano del movimiento.

MOMENTO ANGULAR

8.21. Un objeto de masa 4,0 kg se mueve paralelamente al eje x siguiendo la recta $y = 2{,}0$ m bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = 20\ \text{N}\ \vec{i}$. Suponiendo que en el instante $t = 0$ se encontraba en reposo en la posición (0, 3,0 m), determinar:

a) La expresión del momento angular de este objeto respecto al punto O y calcular su valor para el instante $t = 4{,}5$ s.

b) La variación del momento angular por unidad de tiempo.



Solución

a) La expresión del momento angular de este objeto respecto al punto O y su valor para el instante $t = 4{,}5$ s.

El momento angular de una partícula viene dado por la expresión:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (1)$$

Podemos calcular primero el módulo de este producto vectorial:

$$L_O = r\,p \text{ sen } \beta \qquad (2)$$

De la figura se deduce r sen $\beta = 3{,}0$ m.

Por otro lado, según la regla de la mano derecha, el vector momento angular tiene dirección perpendicular al plano del papel y sentido hacia dentro del papel.

Calcularemos el módulo de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (3)$$

Para hallar la velocidad necesitamos conocer la aceleración.

Aplicamos la segunda ley de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$.

$$20\,N\,\hat{i} = 4{,}0 \text{ kg } a \qquad a = 5{,}0 \text{ m/s}^2\,\hat{i}$$

Como la aceleración es constante el movimiento de este objeto es uniformemente acelerado, por tanto la velocidad viene dada por $\vec{v} = \vec{a}\,t$.

$$\vec{v} = 5{,}0 \text{ m/s}^2\,t\,\hat{i}$$

Tenemos por tanto en (3):

$$\vec{p} = 4{,}0 \text{ kg} \times 5{,}0 \text{ m/s}\,t\,\hat{i} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2\,t\,\hat{i} \qquad (4)$$

De donde $p = 20$ kg · m/s² t.

Sustituimos en (2) los valores de r sen β y de p:

$$L_O = 3{,}0 \text{ m} \times 20 \text{ kg m/s}^2\,t = 60 \text{ kg m}^2\text{/s}^2\,t$$

Como el momento angular está dirigido papel adentro, su expresión en forma vectorial será:

$$\vec{L}_O = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}^2\,t\,(-\hat{k}) = -60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}^2\,t\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_O = -60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}^2\,t\,\hat{k} \qquad (5)$$

Para $t = 4{,}5$ s:

$$\vec{L}_O = -(60 \text{ kg m}^2\text{/s}^2 \times 4{,}5 \text{ s})\,\hat{k} = -2{,}70 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_O = -2{,}7 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}\,\hat{k}$$

Hubiésemos podido efectuar directamente el producto vectorial (1), para ello habría que escrib $\vec{r}$ y $\vec{p}$ en forma vectorial.

$\vec{r} = x\,\hat{i} + 3{,}0 \text{ m}\,\hat{j}$; x varía con el tiempo, pero veremos que en este caso no es necesario conoc su valor para calcular $\vec{L}_O$.

De (4): $\vec{p} = 20$ kg · m/s² $t\,\hat{i}$

$$\vec{L}_O = (x\,\hat{i} + 3{,}0 \text{ m}\,\hat{j}) \times (20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2\,t\,\hat{i}) = -60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}^2\,t\,\hat{k}$$

b) La variación del momento angular por unidad de tiempo.

Utilizaremos la expresión:

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Supondremos que $F = 20$ N $\hat{i}$ es la fuerza neta que actúa sobre este objeto.

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\vec{\tau}_O = (x\,\hat{i} + 3{,}0 \text{ m}\,\hat{j}) \times (20 \text{ N}\,\hat{i}) = -60 \text{ N} \cdot \text{m}\,\hat{k}$$

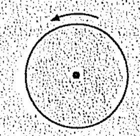
Resulta, por tanto:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -60\,N \cdot \text{m}\,\hat{k}$$

Hubiésemos también podido derivar la expresión (5) que nos da el momento angular.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(-60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}^2\,t\,\hat{k})}{dt} = -60 \text{ N} \cdot \text{m}\,\hat{k}$$

8.22. Un disco homogéneo de radio 0,60 m y masa 15 kg gira en sentido antihorario a 458 rpm. Determinar su momento angular.



El momento angular de un sólido simétrico respecto al plano del movimiento respecto a un eje que pasa por el centro de masas viene dado por la expresión:

$$L_C = I_{cz}\,\omega \qquad (1)$$

El momento de inercia del disco respecto a su eje de revolución es: $I = {}^1\!/_2\, m\,r^2$.

$$I_{cz} = {}^1\!/_2\; 15 \text{ kg} \times (0{,}60 \text{ m})^2 = 2{,}70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Según la regla de la mano derecha, como el disco gira en sentido antihorario, la velocidad angular viene dada por la expresión: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$.

Expresaremos el módulo de la velocidad angular en rad/s:

$$458 \text{ rpm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60\,s} = 47{,}96 \text{ rad/s}$$

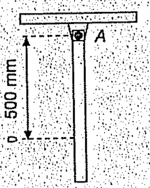
Por tanto: $\vec{\omega} = 47{,}96$ rad/s $\hat{k}$

Sustituimos en (1) y resulta:

$$\vec{L}_C = 2{,}70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 47{,}96 \text{ rad/s}\,\hat{k} = 129 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_C = 129 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}\,\hat{k}$$

8.23. Se dispara una bala de masa 30,0 g a una velocidad de 325 m/s sobre una barra homogénea de masa 3,00 kg y longitud 800 mm que está suspendida por uno de sus extremos de una articulación e inicialmente en reposo. La bala se incrusta a una distancia de 500 mm de la articulación y el impacto dura 0,0012 s. Suponiendo que la barra puede girar libremente alrededor de la articulación, determinar la fuerza que hace la barra sobre la bala, supuesta constante.



Solución

La fuerza que hace la barra sobre la bala. Cuando la bala se incrusta en la barra, el conjunto barra-bala gira alrededor del eje que pasa por A. Mientras penetra la bala recibe la acción de una fuerza ejercida por la barra. Aplicaremos el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Para averiguar la velocidad de la bala después del choque, hallaremos la velocidad angular del conjunto barra-bala, para ello aplicaremos la conservación del momento angular, tomaremos momentos respecto a A, las fuerzas debidas a la colisión sólo son fuerzas internas y las fuerzas F_{Ax} y F_{Ay} que hace la articulación, no tienen momento respecto a A.

Momento de inercia del conjunto barra-bloque respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por A:

$$I_{zA} = \frac{1}{3}\, 3{,}00 \times \text{kg}\,(0{,}800\ \text{m})^2 + 30{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times (0{,}50\ \text{m})^2 = 0{,}6475\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

El módulo del momento de inercia de la bala respecto al punto O es:

$$L_O = 30{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 325\ \text{m/s} \times 0{,}500\ \text{m} = 4{,}875\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Aplicando la regla de la mano derecha podemos comprobar que el momento angular de la bala está dirigido hacia fuera del papel.

Conservación del momento angular:

$$4{,}875\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 0{,}6475\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\ \omega \qquad \omega = 7{,}528\ \text{rad/s}$$

Velocidad de la bala después del choque:

$$v'_{\text{bala}} = 0{,}500\ \text{m} \times 7{,}528\ \text{rad/s} = 3{,}764\ \text{m/s} \qquad v'_{\text{bala}} = 3{,}76\ \text{m/s}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento:

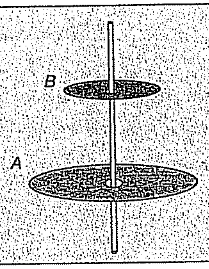
$$F \times 0{,}0012\ \text{s} = 30{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 3{,}764\ \text{m/s} - 30{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \times 325\ \text{m/s};\ F = -8{,}03 \cdot 10^3\ \text{N}$$

$$F = -8{,}0\ \text{kN}$$

8.24. Un disco A de masa 4,0 kg y radio 15 cm está girando a 353 rpm. Otro disco B de 2,5 kg de masa y 12 cm de radio que gira en el mismo sentido a 78 rpm cae sobre el disco A. Determinar:

a) La velocidad angular de los dos discos.

b) La variación de energía cinética del sistema.



Solución

a) La velocidad angular de los dos discos.

Como no interviene ningún momento de fuerza exterior se conserva el momento angular.

Disco A:

Momento de inercia respecto a su eje de revolución:

$$I_{(A)\,C} = {}^1/_2\, 4{,}0\ \text{kg}\,(0{,}15\ \text{m})^2 = 0{,}0450\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Velocidad angular:

$$\omega_A = 353\ \text{rpm} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ s} = 36{,}96\ \text{rad/s}$$

Disco B:

Momento de inercia respecto a su eje de revolución:

$$I_{(B)\,C} = {}^1/_2\, 2{,}5\ \text{kg}\,(0{,}12\ \text{m})^2 = 0{,}0180\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Velocidad angular:

$$\omega_B = 220\ \text{rpm} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ s} = 23{,}03\ \text{rad/s}$$

Conservación del momento angular:

$$0{,}0450\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times 36{,}96\ \text{rad/s} + 0{,}0180\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times 23{,}03\ \text{rad/s} =$$
$$= (0{,}0450\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}0180\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)\ \omega_f;\ \omega_f = 32{,}9\ \text{rad/s}$$

$$\omega_f = 33\ \text{rad/s}$$

b) La variación de energía cinética del sistema.

Energía cinética inicial:

$$E_{c(i)} = {}^1/_2\, 0{,}0450\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times (36{,}96\ \text{rad/s})^2 + {}^1/_2\, 0{,}0180\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times (23{,}03\ \text{rad/s})^2 = 35{,}5\ \text{J}$$

Energía cinética final:

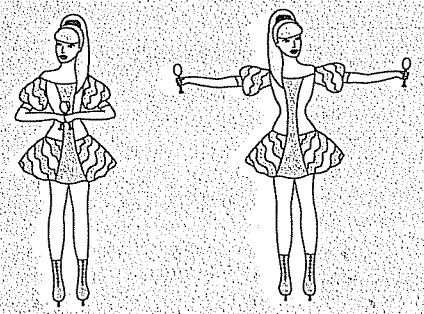
$$E_{c(f)} = {}^1/_2\,(0{,}0450\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}0180\ \text{kg} \cdot \text{m}^2) \times (32{,}9\ \text{rad/s})^2 = 34{,}0\ \text{J}$$

$$\Delta E_c = 34{,}0\ \text{J} - 35{,}5\ \text{J} = -1{,}5\ \text{J}$$

$$\Delta E_c = -1{,}5\ \text{J}$$

Esta variación de energía cinética se debe al trabajo de las fuerzas internas.

8.25 Una patinadora tiene los brazos en el abdomen y una mancuerna en cada mano y gira a 3,6 rev/s, el momento de inercia de la patinadora y las mancuernas respecto al eje de giro es 2,5 kg · m². Cuando la patinadora extiende los brazos el momento de inercia del conjunto es de 12 kg · m².



a) Calcular la velocidad angular de la patinadora con los brazos extendidos.

b) Si en un momento dado la patinadora suelta las mancuernas, ¿cuál será la velocidad angular de la patinadora en este instante?

Solución

a) La velocidad angular de la patinadora con los brazos extendidos.

Por el hecho de extender los brazos no interviene ninguna fuerza exterior, en consecuencia, el momento angular permanecerá constante, pero, al variar la disposición de las masas en torno al eje de rotación, variará el momento de inercia.

$$L_i = L_f$$

$$2{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \times 3{,}6\ \text{rev/s} = 12\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\ \omega_f \qquad \omega_f = 0{,}75\ \text{rev/s}$$

b) Velocidad angular de la patinadora en el instante de soltar las mancuernas.

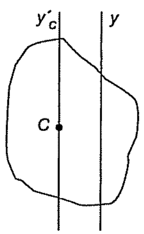
Al soltar las mancuernas no interviene ninguna fuerza exterior, por tanto la velocidad angular de la patinadora no variará, así como tampoco variará la velocidad angular de las mancuernas, pero éstas caerán al suelo.

$$\omega_{\text{patinadora}} = 0{,}75\ \text{rev/s}$$

CUESTIONES

MOMENTOS DE INERCIA

8.1. El momento de inercia de un cuerpo irregular de masa 30,0 kg, respecto a un eje que pasa por su centro de masas es igual a 1,30 kg m². El momento de inercia de este objeto respecto a un eje paralelo al anterior y que dista de él 0,100 m es:



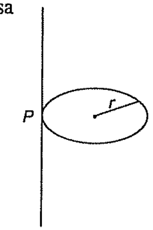
a) $I = 1{,}33$ kg m²

b) 1,30 kg m²

c) $I = 1{,}00$ kg m²

d) 1,60 kg m²

8.2. El momento de inercia de un anillo, de espesor despreciable, de radio r y masa m, respecto a un eje que pasa por un punto P de su periferia es:



a) $I = \text{m}\, r^2$

b) $I = 2\,\text{m}\, r^2$

c) $I = \dfrac{2}{5}\,\text{m}\, r^2$

d) $I = \dfrac{1}{12}\,\text{m}\, r^2$

ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

8.3. En un movimiento de rotación de un sólido, alrededor de un eje fijo, es igual para todos los puntos del sólido:

a) La velocidad lineal.
b) La velocidad angular.
c) La aceleración tangencial.
d) La aceleración normal.

8.4. Un disco puede girar libremente alrededor de su eje. Una fuerza aplicada a una distancia d de su eje le origina una aceleración α. ¿Qué aceleración angular le originará la misma fuerza aplicada a una distancia $2d$ del eje?

a) α *b)* 2α *c)* $\dfrac{\alpha}{2}$ *d)* 4α

8.5. Una polea adquiere una velocidad de 50 rad/s en 10 s. El momento de inercia de la polea respecto al eje de giro es 9,0 kg m². El momento de fuerza que se ha aplicado es:

a) 9,0 Nm *b)* 30 Nm *c)* 60 Nm *d)* 45 Nm

8.6.1. Un cilindro homogéneo, de 20 cm de radio, está girando con una velocidad angular de 1,0 rad/s alrededor de su eje de simetría. Se aplica una fuerza tangencial constante de 80 N y el cilindro se detiene en 10 s.

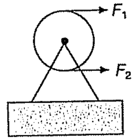
Antes de detenerse el cilindro ha girado un ángulo:

a) 5,0 rad *b)* 0 *c)* 10 rad *d)* 15 rad

8.6.2. El momento de inercia del cilindro respecto al eje de giro es:

a) $1{,}6 \cdot 10^2$ kg m^2 *b)* 80 kg m^2 *c)* 40 kg m^2 *d)* 100 kg m^2

8.7. El disco de la figura tiene una masa de 30 kg y un radio de 0,20 m. El módulo de la fuerza F_1 es igual a 70 N y el de la fuerza F_2 es 100 N. La aceleración angular del disco es igual a:



a) 10 rad/s^2 *c)* 57 rad/s^2

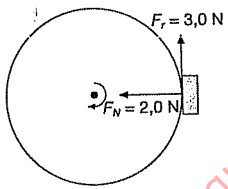
b) 12 rad/s^2 *d)* 60 rad/s^2

8.8.1. Un disco de 25 cm de radio está girando alrededor de un eje que pasa por su centro de masas con una velocidad angular $\omega = 37$ rad/s. El momento de inercia del disco respecto al eje de giro es $I = 0{,}50$ kg · m^2. Para frenar el disco se coloca un dispositivo de frenado muy rudimentario que ejerce las fuerzas que aparecen en la figura.

La aceleración angular del disco es

a) 1,0 rad/s^2 *b)* 1,8 rad/s^2 *c)* 1,5 rad/s^2 *d)* 2,5 rad/s^2

8.8.2. El tiempo, contado a partir del momento en que empieza a actuar el freno, que tarda el disco en detenerse es:



a) 25 s

b) 37 s

c) 15 s

d) 21 s

RODADURA

8.9. Para que un disco ruede sin deslizar por una superficie es necesario:

a) Que el módulo de la velocidad tangencial de cualquier punto respecto al centro sea igual al módulo de la velocidad de traslación del centro de masas.

b) Que el módulo de la velocidad tangencial de un punto de la periferia respecto al centro sea igual al módulo de la velocidad de traslación del centro de masas.

c) Que la aceleración tangencial sea constante.

d) Que la velocidad tangencial de un punto de la periferia sea cero.

8.10. Un disco rueda por un plano inclinado, podemos afirmar:

a) La aceleración del centro de masas es constante dado que la fuerza normal es constante.

b) La aceleración angular es constante porque no hay fricción entre el disco y el plano.

c) Debe existir rozamiento para que el disco pueda rodar sin deslizar.

d) El trabajo efectuado por la fuerza de fricción depende de la distancia recorrida.

8.11. Una rueda de radio r rueda sin deslizarse con velocidad angular ω por una superficie plana; la velocidad tangencial del punto de contacto con el suelo, respecto a un sistema ligado a la tierra, vale:

a) 0 *b)* $\omega\, r$ *c)* $2\, \omega\, r$ *d)* $\omega\, r/2$

TRABAJO Y ENERGÍA

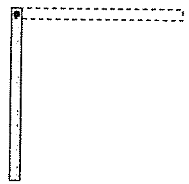
8.12. Un cilindro y un aro tienen la misma masa y el mismo radio. Lo respectivos momentos de inercia respecto a su eje son $^1/_2\, m\, r^2$ y $m\, r^2$. Si se colocan ambos en lo alto del mismo plano inclinado y los dos ruedan a lo largo del plano, al llegar a la parte inferior la relación entre la velocidad del centro de masas del cilindro y la del centro de masas del aro es:

a) 1/2 *b)* 1/4 *c)* $2/\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt{3/2}$

8.13. Un cilindro homogéneo cae rodando por un plano inclinado de altura h. Al llegar a la parte inferior del plano, la velocidad del centro de masas del cilindro es:

a) $^1/_2\, g\, h$ *b)* $(2g\, h)^{1/2}$ *c)* $2(g\, h/3)^{1/2}$ *d)* $\sqrt{3/2}\, g\, h$

8.14. El momento de inercia de una barra homogénea respecto a un eje perpendicular a la misma y que pasa por su extremo vale $I = 1/3\ m\, l^2$ (m representa la masa y l representa su longitud). Si la barra se deja caer libremente desde la posición horizontal, la velocidad del centro de masas de la barra cuando pase por la posición vertical será:



a) $(2g\, l)^{1/2}$ *c)* $(3g\, l)^{1/2}/2$

b) $2(g\, l)^{1/2}$ *d)* $(g\, l)^{1/2}/2$

8.15. Un cilindro de masa m y radio r tiene una cuerda enrollada en su periferia. El otro extremo de la cuerda está sujeto al techo. Se suelta el cilindro desde el reposo. Cuando el centro de masas del cilindro ha descendido una altura h, la velocidad angular del cilindro es igual a:

a) $2(g\, h/3)^{1/2}$ *c)* $2(mg\, h/3)^{1/2}$

b) $(1/r)\,(4/3\, g\, h)^{1/2}$ *d)* $(1/r)\,(2g\, h)^{1/2}$

8.16. Cuando una esfera desciende rodando por un plano inclinado. Efectúan trabajo:

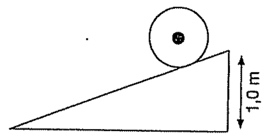
a) El peso y la fuerza de fricción.

b) El peso y la fuerza normal que realiza el plano.

c) La fuerza de fricción y la normal que realiza el plano.

d) Sólo efectúa trabajo el peso.

8.17. Un anillo desciende rodando por un plano inclinado de altura 1,0 m. La velocidad del centro de masas del anillo cuando éste alcanza la posición más baja es:



a) 1,5 m/s *c)* 5,0 m/s

b) 2,0 m/s *d)* 3,1 m/s

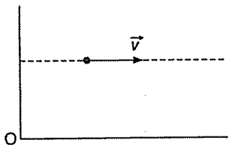
8.18. Dos partículas de la misma masa m están unidas a los extremos de una varilla rígida de masa despreciable y longitud l. El sistema se mueve en un plano horizontal, la velocidad del centro de masas es v y la velocidad angular alrededor de un eje que pasa por el centro de masas es ω. La energía cinética del sistema vale:

a) $mv^2 + {}^1/_2\, m\, l^2\, \omega^2$ *c)* $^1/_2\, m\, v^2 + {}^1/_2\, m\, l^2\, \omega^2$

b) $mv^2 + {}^1/_4\, m\, l^2\, \omega^2$ *d)* $^1/_2\, m\, v^2 + {}^1/_4\, m\, l^2\, \omega^2$

MOMENTO ANGULAR

8.19. Una partícula de masa m describe una trayectoria rectilínea paralela al eje x. Su velocidad $\vec{v}$ permanece constante. El momento angular respecto al punto O es:



a) Constante.

b) Aumenta al desplazarse la partícula.

c) Disminuye al desplazarse la partícula.

d) Es cero.

8.20. Una partícula de masa m se mueve en una circunferencia de radio R con celeridad constante v. La magnitud del incremento del momento angular entre dos puntos diametralmente opuestos vale:

a) Cero. *c)* $2mvr$

b) mvr *d)* $2mv$

8.21. Para que el momento angular de un sistema de partículas permanezca constante es necesario:

a) Que el momento resultante de las fuerzas exteriores sea nulo.

b) Que la fuerza exterior resultante sea nula.

c) Que sean nulos la fuerza exterior resultante y el momento resultante de las fuerzas interiores.

d) Que el momento resultante de las fuerzas interiores sea nulo.

8.22. El momento angular de un sólido respecto a un punto fijo es constante, cuando:

a) La única fuerza que actúa sobre el sólido es el peso.

b) La fuerza resultante es cero.

c) El momento de fuerza resultante respecto a dicho punto es cero.

d) Siempre.

8.23. Si la fuerza que actúa sobre un móvil es tal que su dirección pasa constantemente por un punto (fuerza central), respecto a este móvil podemos afirmar:

a) La cantidad de movimiento es nula.

b) El momento angular respecto a este punto es nulo.

c) El momento angular es constante.

d) La cantidad de movimiento es constante.

8.24. Una lámina plana de espesor despreciable gira alrededor de un eje perpendicular al plano de la misma, respecto al momento angular y a la velocidad angular podemos afirmar:

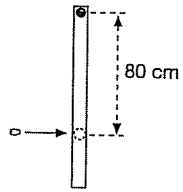
a) Siempre son paralelos.

b) Nunca son paralelos.

c) Sólo son paralelos cuando el eje de giro es un eje de simetría.

d) Para que sean paralelos es necesario que la velocidad angular sea constante.

8.25. Un proyectil de masa 50 g que se mueve a 150 m/s se incrusta en una barra que está suspendida de un eje alrededor del cual puede girar libremente. El momento de inercia de la barra respecto a este eje es $0{,}088\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. El impacto del proyectil se produce a 80 cm del eje de giro. La velocidad angular con que empieza a moverse el conjunto barra-proyectil después del impacto es:



a) 50 rad/s *c)* 60 rad/s

b) 40 rad/s *d)* 10 rad/s

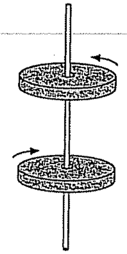
8.26. Un disco gira alrededor de un eje vertical. Un segundo disco idéntico que gira alrededor del mismo eje con velocidad angular doble, pero en sentido contrario, cae sobre el primero. Al cabo de un cierto tiempo los dos discos giran con la misma velocidad angular. Podemos afirmar:

a) Se ha conservado el momento angular y la energía cinética.

b) No se conservado ni el momento angular ni la energía cinética.

c) Se ha conservado el momento angular, pero se ha modificado la energía cinética del sistema.

d) Se ha conservado la energía cinética y se ha modificado el momento angular.



SOLUCIONES

8.1. *d)*	8.7. *a)*	8.13. *c)*	8.20. *a)*
8.2. *b)*	8.8.1. *c)*	8.14. *c)*	8.21. *a)*
8.3. *b)*	8.8.2. *a)*	8.15. *a)*	8.22. *c)*
8.4. *b)*	8.9. *b)*	8.16. *d)*	8.23. *b)*
8.5. *d)*	8.10. *c)*	8.17. *d)*	8.24. *a)*
8.6.1. *a)*	8.11. *a)*	8.18. *c)*	8.25. *a)*
8.6.2. *a)*	8.12. *c)*	8.19. *a)*	8.26. *c)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

MOMENTOS DE INERCIA

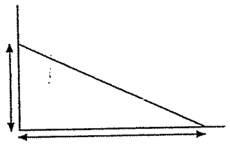
1 *a)* **Determinar el momento de inercia de un anillo homogéneo, de radio interior r_1 y de radio exterior r_2, respecto a un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro. Deducir a partir de la expresión obtenida el momento de inercia respecto al mismo eje.**

b) De un cilindro macizo.

c) De un cilindro de pared delgada.

Sol.: *a)* $I_y = 1/2\, m\, (r_1^2 + r_2^2)$; *b)* $I_y = 1/2\, m\, r^2$; *c)* $I_y = m\, r^2$

2 **Determinar el momento de inercia del triángulo rectángulo de la figura respecto:**

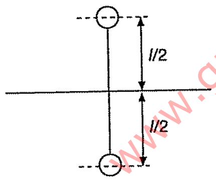


a) Al eje *x*.

b) Al eje *y*.

Sol.: *a)* $1/6\, m\, a^2$; *b)* $1/6\, m\, b^2$

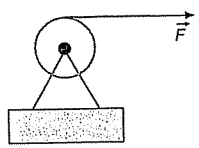
3 **Dos bolas iguales y homogéneas de radio r están unidas respectivamente a cada uno de los extremos de una varilla de masa despreciable como indica la figura. Determinar el momento de inercia del sistema, I_x, respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa por su punto medio. Si el radio de las bolas es muy pequeño frente a *l* se puede hacer una aproximación que consiste en considerar cada bola como una masa puntual situada en el correspondiente centro. Determinar el valor aproximado de este momento de inercia y el error que se comete al hacer esta aproximación si $l = 10r$. Momento de inercia de una esfera 2/5 m r^2.**



Sol.: $I_x = 2\, m\, (2/5\, r^2 + 1/4\, l^2)$, $I_x = 1/2\, m\, l^2$, 1,6 %

ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

4 **Un disco, de masa 60 kg y de radio 12 cm, lleva una cuerda inextensible, de 1,0 m de longitud, arrollada a su periferia. Se tira de la cuerda con una fuerza constante de 18 N en dirección tangente al disco y éste empieza a girar a la vez que la cuerda se desenrolla. Determinar:**



a) La aceleración angular del disco.

b) El tiempo que tarda la cuerda en desenrollarse.

c) La velocidad angular del disco en el instante en que la cuerda se ha desenrollado. Suponer que la cuerda no se desliza por la superficie del disco.

Sol.: *a)* 5,0 rad/s² sentido horario; *b)* 1,8 s; *c)* 9,1 rad/s

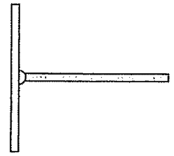
5 **Una piedra de afilar consiste en un disco homogéneo de 32 cm de radio y una masa de 50 kg. Cuando gira a 1 200 rpm en sentido horario se desconecta el motor, se deja que gire libremente y se continúa afilando un cuchillo, la piedra se detiene al cabo de 12 s. Determinar:**

a) La aceleración angular de la piedra.

b) El momento de fuerza que ha ejercido el cuchillo. Ignorar el momento debido a la fricción con los cojinetes.

Sol.: *a)* 10 rad/s²; *b)* 27 N · m, sentido antihorario

6 **Una barra uniforme de 80 cm de longitud y masa 7,8 kg está sujeta a la pared mediante una articulación. Cuando se encuentra en la posición horizontal se libera.**



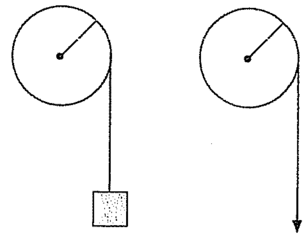
a) Calcular la aceleración angular de la barra en el momento inicial.

b) ¿Esta aceleración es constante?

c) Determinar la aceleración tangencial del extremo libre de la barra en el momento inicial.

Sol.: *a)* 18 rad/s² sentido horario; *b)* no; *c)* 15 m/s²

7 **Se enrolla una cuerda alrededor de un volante de 20 cm de radio y un momento de inercia de 4,0 kg m². Suponer que no hay rozamientos, que la cuerda no desliza por la superficie del volante y es inextensible. Determinar la aceleración angular del volante:**

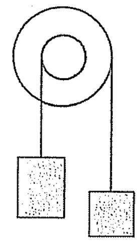


a) Si se cuelga del extremo libre de la cuerda un objeto cuyo peso es de 60 N.

b) Si en lugar de colgar un objeto se tira de la cuerda hacia abajo con una fuerza de 60 N.

Sol.: *a)* 2,8 rad/s² sentido horario; *b)* 3,0 rad/s² sentido horario

8 **Dos poleas están acopladas, es decir, formando un bloque que gira alrededor de su eje central sin ninguna fricción. Sus respectivos radios son r_1 = 40 cm y r_2 = 30 cm. De la polea mayor pende un peso de 15 kg y de la polea menor un peso de 40 kg que tiende a hacer girar la polea en sentido opuesto a la otra, tal como indica la figura. El momento de inercia del sistema de poleas es 4,6 kg · m². Determinar:**



a) El sentido del movimiento del sistema de poleas.

b) La aceleración angular del sistema de poleas.

c) Las aceleraciones de los pesos.

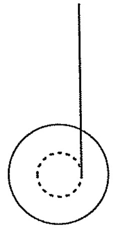
d) Las tensiones de las cuerdas.

Sol.: *a)* sentido antihorario; *b)* 5,6 rad/s² sentido antihorario;
c) 1,7 m/s² hacia abajo, 2,2 m/s² hacia arriba; *d)* 3,3 · 10² N, 1,8 · 10² N

MOVIMIENTO PLANO GENERAL

9 **Tirando de la cuerda de un yoyó con la fuerza adecuada puede conseguirse que el yoyó permanezca a una altura fija respecto al suelo al tiempo que gira. El yoyó de la figura tiene una**

masa de 70 g y un radio de giro de 14 mm, el diámetro interior del tambor donde se enrolla la cuerda es de 10 mm, y está girando en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj mientras su altura permanece fija, determinar:



a) La tensión de la cuerda.

b) La aceleración angular del yoyó.

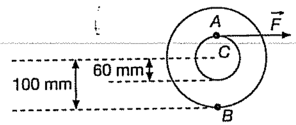
Sol.: a) 0,69 N; *b)* 2,5 · 10² N

⑩ Una bola de masa 5,0 kg y radio 11 cm se lanza sobre una superficie rugosa y rueda deslizando sobre ella. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y la superficie es 0,12. Determinar la aceleración del centro de masas de la esfera y la aceleración angular.

Sol.: 1,2 m/s² sentido contrario al del movimiento, 27 rad/s²

RODADURA

⑪ Un tambor de 60 mm de radio está unido a un disco de 100 mm de radio. El disco y el tambor tienen una masa total de m = 6,0 kg y un momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por el centro de masas I_{cz} = 0,040 kg m². Se une una cuerda al tambor, tal como indica la figura, y se tira de ella con una fuerza de 15 N. El disco rueda sin deslizar. Determinar:



a) La aceleración del centro de masas y la aceleración angular del disco.

b) La fuerza de fricción entre el disco y el suelo.

c) En el instante t = 5,0 s los puntos A y B ocupan la posición indicada en la figura, calcular: 1) sus respectivas velocidades respecto al centro de masas C; 2) respecto al suelo.

Sol.: a) 2,4 m/s², 24 rad/s² sentido horario; *b)* 0,60 N; *c)* c₁) 7,2 m/s, −12 m/s, c₂) 19 m/s, 0

⑫ Desde la parte superior de un plano inclinado 30° se dejan en libertad simultáneamente una esfera y un cilindro. Ambos descienden rodando. ¿Cuál de los dos llegará antes a la parte inferior?

Sol.: La esfera

⑬ Una esfera homogénea de radio r y masa m se suelta por un plano de inclinación β respecto a la horizontal y rueda sin deslizar. Determinar:

a) El valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre la esfera y el plano compatible con el movimiento de rodadura.

b) La aceleración del centro de masas.

c) La aceleración del centro de masas si el plano fuese completamente liso y no existiese fricción

Efectuar los cálculos para m = 8,0 kg; r = 600 mm, β = 30°.

Sol.: a) $\mu_e = 2/7 \operatorname{tg} \beta$; $\mu_e = 0{,}16$
b) $a_c = 5/7\, g \operatorname{sen} \beta$, 3,5 m/s²
c) $a_c = g \operatorname{sen} \beta$, 4,9 m/s²

TRABAJO Y ENERGÍA

⑭ Sobre un disco que tiene agujeros perforados actúa un momento de fuerza que viene dado por la expresión $\tau = 6{,}0\,\theta^2 + 8{,}0\,\theta$, donde τ viene expresado en radianes y θ, que representa la coordenada angular, viene expresado en radianes. La masa del disco es de 2,6 kg y su radio de giro es k = 0,40 m. Determinar cuando el disco ha girado 60° partiendo del reposo:

a) El trabajo efectuado.

b) La velocidad angular del disco.

Sol.: a) 6,7 J; *b)* 5,7 rad/s

⑮ Un volante de momento de inercia 75 kg · m² está girando a 500 rpm.

a) ¿Cuál es la energía cinética del volante?

b) Para detenerlo se le aplica un momento de fuerza de 180 N · m, ¿cuántas vueltas dará durante el tiempo que tarda en pararse?

Sol.: a) 1,1 · 10⁵ J; *b)* 90 vueltas

⑯ Un disco de 60 cm de radio y masa 2,6 kg gira a una velocidad angular de 6,0 rad/s. En un momento dado se le aplica una fuerza tangencial constante que le comunica una aceleración angular de 5,0 rad/s² hasta que adquiere una velocidad angular de 32 rad/s. Determinar:

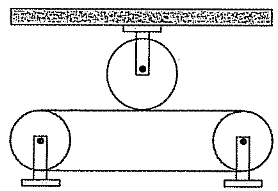
a) El módulo de la fuerza tangencial aplicada.

b) El trabajo realizado.

c) La potencia suministrada al disco.

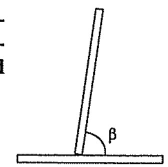
Sol.: a) 3,9 N; *b)* 0,23 kJ; *c)* 44 W

⑰ Un disco de masa 4,5 kg y radio 8,0 cm que se encuentra en reposo se pone en contacto con una correa que se mueve a una velocidad constante de 16 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la correa y el disco es μ_c = 0,20. ¿Cuántas revoluciones dará el disco antes de alcanzar la velocidad angular de régimen?



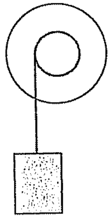
Sol.: 65 revoluciones

⑱ La barra uniforme de la figura de longitud 65 cm se suelta desde el reposo cuando β = 82°. Suponiendo que la fuerza de rozamiento con el suelo es suficiente para impedir que la barra deslice, determinar la velocidad angular de la barra en el momento de tocar al suelo.



Sol.: 6,7 rad/s

19 **Un sistema está formado por dos poleas acopladas de radios 10 cm y 6,0 cm, respectivamente, el momento de inercia del sistema es 0,12 kg · m². La polea pequeña tiene un cordón arrollado del que pende un objeto de masa 2,0 kg. Determinar:**



a) La velocidad del objeto cuando ha descendido 1,5 m.

b) La velocidad angular de la polea en este mismo instante. Suponer que el cordón es de masa despreciable e indeformable y que no desliza por la polea.

Sol.: a) 1,3 m/s; *b)* 22 rad/s

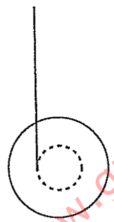
20 **Una polea de 5,0 cm de radio lleva enrollada una cuerda indeformable y de masa despreciable de la cual cuelga un peso de 20 g. El momento de inercia de la polea es de $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ kg · m². Determinar:**

a) La aceleración con que desciende el peso.

b) La energía cinética que ha ganado el sistema al cabo de 3,0 s de empezar a moverse.

Sol.: a) 7,0 m/s²; *b)* 6,2 J

21 **La masa del yoyó de la figura es de 80 g, el momento de inercia respecto a su eje de revolución es de $6{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg · m², el diámetro interior del tambor donde se enrolla la cuerda es $d = 12$ mm, y está girando en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj a 100 rad/s. Determinar:**



a) La altura que alcanzará en el momento de detenerse.

b) El número de vueltas que habrá dado.

Sol.: a) 43 cm; *b)* 11 vueltas

22 **Una rueda de masa 50 kg y radio 25 cm se mueve a 10 m/s rodando por el suelo. Su radio de giro es 20 cm. Determinar su energía cinética.**

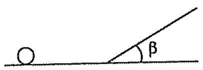
Sol.: 4,1 kJ

23 **Un disco homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar hacia arriba por una superficie inclinada un ángulo β respecto a la horizontal, en un cierto instante tiene una velocidad angular ω_0. Determinar la distancia que rodará el disco a lo largo de la superficie antes de llegar al reposo.**

Efectuar el cálculo numérico si $r = 100$ mm, $\beta = 26°$ y $\omega_0 = 30$ rad/s.

Sol.: $l = \dfrac{3r^2\omega_0^2}{4\, g\, sen\, \beta}$, 1,6 m

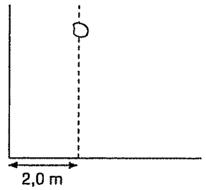
24 **Una bola homogénea que rueda sin deslizar por un plano horizontal alcanza un plano inclinado en ángulo β respecto a la horizontal. En este momento la velocidad del centro de masas de la bola es v_c. El plano es completamente liso de forma que no hay fricción entre la bola y el plano. Determinar la altura h a la que asciende la bola en el plano.**



Sol.: $h = v^2/(2\, g)$

MOMENTO ANGULAR

25 **Una piedra de 0,300 kg cae desde una cierta altura. Suponiendo que partió del reposo, determinar:**

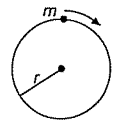


a) El momento angular respecto a un punto O situado en el suelo y a 2,0 m del pie de la vertical que sigue la piedra para $t = 2{,}0$ s.

b) La velocidad de variación del momento angular.

Sol.: a) -12 kg m²/s $\hat{k}$; *b)* $-5{,}9$ kg m²/s² $\hat{k}$

26 **Determinar el momento angular de una partícula de masa m que describe una circunferencia de radio r en el sentido horario con una velocidad angular ω.**



Sol.: $-\, mr^2\, \omega\, \hat{k}$

27 **Una varilla homogénea de masa 250 g y 50 cm de longitud gira alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por un punto situado a 10 cm de uno de sus extremos a una velocidad angular de 3,5 rad/s. Determinar:**

a) El momento angular respecto al punto de intersección de la varilla con el eje.

b) La energía cinética de la varilla.

Sol.: a) 0,038 kg · m²/s; *b)* 66 mJ

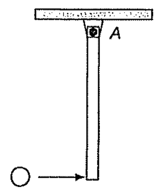
28 **Una varilla homogénea de masa M y longitud l lleva acopladas tres pequeñas bolas cada una de masa m, dos están situadas en los extremos y la otra en el punto medio. Si el sistema gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos, determinar:**

a) El momento angular del sistema.

b) La energía cinética. Suponer que las bolas se comportan como masas puntuales.

Sol.: a) $(1/3\, M + 5/4\, m)\, l^2\, \omega$; *b)* $(1/6\, M + 5/8\, m)\, l^2\, \omega^2$

29 **Una bola de 1,5 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6,0 m/s choca con el extremo inferior de una barra rígida homogénea de 8,0 kg de masa y 1,2 m de longitud suspendida de un pasador y que se encuentra en reposo. La bola rebota con una celeridad de 4,0 m/s. Suponer que la barra puede girar libremente alrededor del pasador. Determinar:**



a) La velocidad del centro de masas de la barra inmediatamente después de la colisión.

b) El ángulo máximo que la barra forma con la vertical después de la colisión.

Sol.: a) 2,8 m/s; *b)* 84°

30 **Una barra uniforme de 750 mm de longitud y 3,00 kg de masa se encuentra en reposo suspendida de un pasador sin fricción en posición vertical. Una bala de 30,0 g que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 250 m/s se incrusta en la barra en un punto situado a 600 mm del pasador. Determinar:**

a) La velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.

b) La velocidad que debería tener la bala para que la barra quede en posición vertical por encima del pasador.

Sol.: *a)* 7,85 rad/s; *b)* 282 m/s

31 **Un cilindro de masa 25 kg y radio 40 cm gira a una velocidad angular ω. ¿Qué masa hay que colocar a 20 cm del eje de giro para reducir la velocidad angular al 98 por cien de la actual?**

Sol.: 1,0 kg

32 **Una plataforma de momento de inercia 288 kg · m² y 3,0 m de radio está montada sobre un eje vertical sin rozamiento que pasa por su centro. Un hombre que pesa 80 kg está de pie en un punto situado en el borde de la plataforma. Todo el conjunto está inicialmente en reposo. El hombre empieza a moverse en sentido horario a 60 cm/s respecto a tierra. Determinar:**

a) La velocidad angular de la plataforma.

b) Las vueltas que ha dado la plataforma cuando el hombre alcanza la posición inicial sobre la plataforma.

c) Las vueltas que ha dado la plataforma cuando el hombre alcanza la posición inicial respecto a tierra.

Sol.: *a)* 0,50 rad/s sentido antihorario; *b)* 0,71 vueltas; *c)* 2,5 vueltas

CAPÍTULO

9 CAMPO GRAVITATORIO

9.1. LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN

La *ley de Newton de la gravitación* establece que la interacción gravitatoria entre dos masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de ambas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

La fuerza que la masa 1 ejerce sobre la 2 es una fuerza central, es decir, tiene la dirección de la recta que une a ambas masas, y es siempre atractiva. Esta fuerza viene dada por:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \tag{1A}$$

donde $\hat{r}_{12}$ es el vector unitario en la dirección y sentido del vector que une la masa 1 con la 2

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior es fácil ver que la ecuación (1A) también puede expresarse como:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{1B}$$

La constante de proporcionalidad, G, en el sistema internacional de unidades es:

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$$

La interacción gravitatoria actúa a distancia. Es decir, dos masas se atraen entre sí sin necesidad de contacto alguno.

9.2 CAMPO GRAVITATORIO

Una masa cualquiera m_1 altera, de algún modo, el espacio que la rodea, creando un campo vectorial a su alrededor denominado *campo gravitatorio*.

El valor del campo gravitatorio $\vec{g}$ que una masa m_l crea en un punto P, viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{Gm_1}{r_{1P}^2}\hat{r}_{1P} = -\frac{Gm_1}{r_{1P}^3}\vec{r}_{1P} \qquad (2)$$

El módulo del vector campo gravitatorio, g, se denomina *intensidad del campo gravitatorio* y sus unidades en el SI son N/kg, que equivalen a m/s^2.

La fuerza que experimentará una masa cualquiera m_2 que situemos en el punto P viene dada por el producto de la masa por el valor del campo en el punto P.

$$\vec{F}_2 = m_2\,\vec{g}_P$$

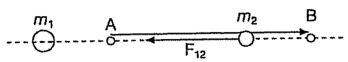
9.3 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Las fuerzas centrales, y en concreto la fuerza gravitatoria, son fuerzas conservativas. En consecuencia se puede definir la energía potencial asociada a la fuerza de la gravedad.

La *variación de energía potencial gravitatoria* que experimenta una masa m al desplazarse entre dos puntos A y B, es igual al trabajo realizado por la fuerza de la gravedad entre A y B cambiado de signo.

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Vamos a suponer que movemos la masa m_2 entre los puntos A y B dentro del campo gravitatorio creado por m_1. La variación de energía potencial que experimenta m_2 es:



$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{Gm_1\,m_2}{r^2}\,dr = -\frac{Gm_1\,m_2}{r}\Bigg]_A^B = -\frac{Gm_1\,m_2}{r_B} + \frac{Gm_1\,m_2}{r_A}$$

Para dar un valor absoluto a la energía potencial será necesario establecer un origen de la energía potencial gravitatoria. Es costumbre situar el origen de energía en el infinito, por lo que si en la expresión anterior hacemos $U\,(r_B \to \infty) = 0$ nos queda que la energía potencial de la masa m_2 en un punto cualquiera (como el punto A) que dista r_A de m_1 es:

$$U_A = -\frac{Gm_1\,m_2}{r_A} \qquad (3)$$

9.4 RELACIÓN ENTRE LA ENERGÍA Y EL MOVIMIENTO ORBITAL

En la siguiente gráfica se representa la curva de energía potencial de una masa m que se encuentra dentro del campo gravitatorio creado por otra masa M de radio R. Se considerará en todo momento que $M >> m$, esto equivale a decir que la masa M permanecerá en reposo y que el sistema de coordenadas centrado en M se puede considerar un sistema de referencia inercial.

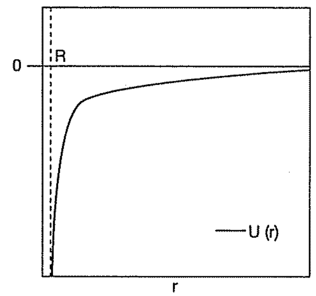
Si la única fuerza que actúa sobre la masa m es la gravitatoria, su energía mecánica $E_m = E_c + U$ permanecerá constante.

El tipo de órbita de m entorno a M depende del valor de su energía mecánica.

Para valores de la energía mecánica $E_m < 0$, existe un punto de retorno. El sistema permanecerá ligado y en este caso la masa m tendrá una órbita elíptica con M situada en un foco de la elipse.

Para valores de $E_m \geq 0$, no existen puntos de retroceso. Entonces la masa m tiene suficiente energía cinética para escapar del influjo gravitatorio de M.

Concretamente para $E_m = 0$ la órbita de m es parabólica y para valores de $E_m > 0$ la órbita es una hipérbola.



9.5 VELOCIDAD DE ESCAPE

La *velocidad de escape* es la velocidad que se debe imprimir a un objeto de masa m situado sobre la superficie de un astro de masa M y radio R, para que escape de su influjo gravitatorio.

La velocidad de escape se calculará teniendo en cuenta que inicialmente la masa m se encuentra en la superficie del astro (de radio R y masa M), y por tanto con energía potencial gravitatoria igual a:

$$U_i\,(R) = -\frac{GMm}{R}$$

y su energía cinética:

$$E_{ci} = \frac{1}{2}mv_{\text{escape}}^2$$

Esta masa se pretende que llegue a un punto muy alejado del astro con $U_f\,(r \to \infty) = 0$ y energía cinética nula, $E_{cf} = 0$.

Se considerará que se conserva la energía mecánica, por lo que:

$$E_{ci} + U_i(R) = E_{cf} + U_f(r \rightarrow \infty) \qquad \frac{1}{2}mv^2_{escape} - \frac{GMm}{R} = 0$$

despejando v_{escape} de la expresión anterior se obtiene:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{4}$$

Es preciso notar que la velocidad de escape no depende del valor de m.

9.6. LEYES DE KEPLER

Johannes Kepler consiguió describir el movimiento orbital de los planetas, mediante tres leyes conocidas como las *leyes de Kepler.*

Primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en un foco.
Segunda ley: El vector posición de un planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
Tercera ley: Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de las distancias medias al Sol.

Son leyes fenomenológicas que describen observaciones astronómicas de los movimientos planetarios pero que no entran en la descripción de las causas de este movimiento. Posteriormente Newton formuló la ley de la gravitación, de carácter más general que las leyes de Kepler. Las tres leyes de Kepler pueden deducirse de la ley de la gravitación de Newton.

PROBLEMAS RESUELTOS

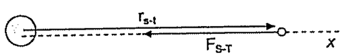
9.1. Determinar la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra y el Sol se ejercen entre sí.
Datos: masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, masa del Sol $M_S = 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, distancia Tierra-Sol: $r_{S-T} = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m.

Solución

La fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra se calcula mediante la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_{S-T} = -\frac{GM_TM_S}{r^2_{S-T}}\hat{r}_{S-T}$$

$\hat{r}_{S-T}$ es el vector unitario en la dirección y sentido del vector que une el centro del Sol con el centro de la Tierra, $\hat{r}_{S-T} = \dfrac{\vec{r}_{S-T}}{r_{S-T}} = \dfrac{1{,}50 \cdot 10^{11}\, m\,\hat{\imath}}{1{,}50 \cdot 10^{11}\, m} = \hat{\imath}$.



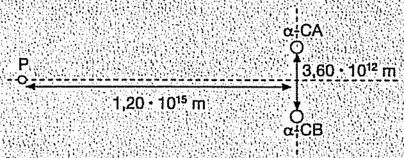
Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$\vec{F}_{S-T} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\text{ m})^2} \cdot \hat{\imath} = -3{,}545 \cdot 10^{22}\,\text{N}\,\hat{\imath}$$

Según la tercera ley de Newton, la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra $\vec{F}_{S-T} = -3{,}54 \cdot 10^{22}\,\text{N}\,\hat{\imath}$ es igual, en módulo y dirección, a la fuerza que la Tierra ejerce sobre el Sol, pero de sentido contrario:

$$\vec{F}_{T-S} = -\vec{F}_{S-T} = 3{,}54 \cdot 10^{22}\,\text{N}\,\hat{\imath}$$

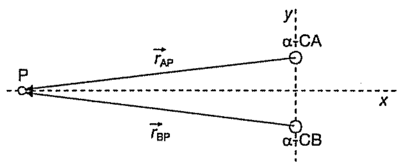
9.2. Alfa Centauro, situada a 4,35 años luz del Sol, es la estrella más cercana a nuestro sistema solar. En realidad Alfa Centauro es un sistema estelar triple formado por dos estrellas parecidas al Sol, denominadas Alfa Centauro A y Alfa Centauro B, con masas igual a 1,09 y 0,90 la masa solar, separadas entre ellas $3{,}60 \cdot 10^{12}$ m. Y una tercera estrella, conocida como Próxima, de masa menor (0,10 veces la masa solar) situada a $1{,}20 \cdot 10^{15}$ m de las otras dos.



a) Determinar el campo gravitatorio creado por Alfa Centauro A y Alfa Centauro B, en el punto indicado en la figura, donde se encuentra Próxima.
b) Determinar la fuerza que Alfa Centauro A y Alfa Centauro B ejercen sobre Próxima.
Dato: masa del Sol, $M_S = 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg

Solución

a) Determinar el campo gravitatorio.



El campo gravitatorio creado por una masa M en un punto P, viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

siendo $\hat{r}$ el vector unitario en la dirección y sentido del vector que une la masa M con el punto P.

En consecuencia, el campo creado por Alfa Centauro A en el punto P es:

$$\vec{g}_{\alpha CA} = -\frac{GM_{\alpha CA}}{r_{AP}^2}\hat{r}_{AP}$$

siendo el vector $\hat{r}_{AP} = \dfrac{\vec{r}_{AP}}{r_{AP}}$ y $\vec{r}_{AP} = -1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,\hat{i} - 1{,}80 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}\,\hat{j}$, con módulo $r_{AP} = 1{,}20 \cdot 10^{15}$ m.

Por tanto

$$\hat{r}_{AP} = \frac{\vec{r}_{AP}}{r_{AP}} = \frac{-1{,}20 \cdot 10^{15}\,\hat{i} - 1{,}80 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}\,\hat{j}}{1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}} = -1{,}00\,\hat{i} - 1{,}50 \cdot 10^{-3}\,\hat{j}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$\vec{g}_{\alpha CA} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 1{,}09 \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m})^2}(-1{,}00\,\hat{i} - 1{,}50 \cdot 10^{-3}\,\hat{j})$$

$$\vec{g}_{\alpha CA} = 1{,}010 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} + 1{,}515 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{j}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, el campo creado por Alfa Centauro B en el punto P es:

$$\vec{g}_{\alpha CB} = -\frac{GM_{\alpha CB}}{r_{BP}^2}\hat{r}_{BP}$$

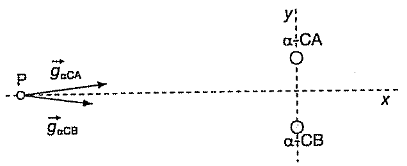
con $\hat{r}_{BP} = \dfrac{\vec{r}_{BP}}{r_{BP}}$ y $\vec{r}_{BP} = -1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,\hat{i} + 1{,}80 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}\,\hat{j}$, con módulo $r_{BP} = 1{,}20 \cdot 10^{15}$. En consecuencia:

$$\hat{r}_{BP} = \frac{\vec{r}_{BP}}{r_{BP}} = \frac{-1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,\hat{i} + 1{,}80 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}\,\hat{j}}{1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}} = -1{,}00\,\hat{i} + 1{,}50 \cdot 10^{-3}\,\hat{j}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$\vec{g}_{\alpha CB} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 0{,}90 \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(1{,}20 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m})^2}(-1{,}00\,\hat{i} + 1{,}50 \cdot 10^{-3}\,\hat{j})$$

$$\vec{g}_{\alpha CB} = 8{,}338 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} - 1{,}251 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{j}$$



El campo total en el punto P es igual a la suma:

$$\vec{g} = \vec{g}_{\alpha CA} + \vec{g}_{\alpha CB} = (1{,}010 \cdot 10^{-10} + 0{,}834 \cdot 10^{-10})\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} + (1{,}515 \cdot 10^{-13} - 1{,}251 \cdot 10^{-13})\,\mathrm{N/kg}\,\hat{j}$$

$$\vec{g} = 1{,}39 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} + 2{,}64 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{j}$$

b) La fuerza que actúa sobre Próxima es igual al producto del campo gravitatorio en el lugar donde se encuentra Próxima por su masa.

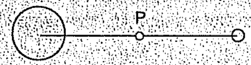
$$\vec{F} = M_P\vec{g} = 0{,}10 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,(1{,}39 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} + 2{,}64 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{j})$$

$$\vec{F} = (2{,}78 \cdot 10^{19}\,\mathrm{N}\,\hat{i} + 5{,}28 \cdot 10^{15}\,\mathrm{N}\,\hat{j})$$

9.3. La Luna es el único satélite natural de la Tierra, su masa es $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg y el radio es $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m. La masa de la Tierra es $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg y el radio terrestre $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m. La distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna es $d = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

a) Calcular el valor del campo gravitatorio debido a la Tierra y a la Luna, en un punto situado sobre la recta que une el centro de los dos astros y que equidiste de ellos.

b) Determinar a qué distancia desde el centro de la Tierra el campo gravitatorio debido a la Tierra y a la Luna se anula.



Solución

a) El campo gravitatorio terrestre en el punto P es:

$$\vec{g}_T = -\frac{GM_T}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\hat{i}; \quad \vec{g}_T = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left(\frac{3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{2}\right)^2}\hat{i} = -1{,}082 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i}$$

Y el campo gravitatorio lunar es:

$$\vec{g}_L = \frac{GM_L}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\hat{i}; \quad \vec{g}_L = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{\left(\frac{3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{2}\right)^2}\hat{i} = 1{,}332 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i}$$

En el punto P el campo gravitatorio terrestre y lunar tienen la misma dirección y sentidos opuestos, por lo que el campo gravitatorio total será:

$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = -1{,}082 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} + 1{,}332 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i} = -1{,}069 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N/kg}\,\hat{i}$$

El campo total en P está dirigido hacia la Tierra y la intensidad del campo es $1{,}07 \cdot 10^{-2}$ N/kg.

b) La distancia r_0 en la que ambos campos se anulan será aquella que cumpla que:

$$\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 0 \qquad \vec{g} = -\frac{GM_T}{r_0^2}\hat{i} + \frac{GM_L}{(d - r_0)^2}\hat{i} = 0$$

Es decir, que:

$$\frac{M_T}{r_0^2} = \frac{M_L}{(d - r_0)^2} \qquad \frac{M_T}{r_0^2} = \frac{M_L}{d^2 - 2dr_0 + r_0^2}$$

$$(M_T - M_L)\,r_0^2 - 2dM_Tr_0 + M_Td^2 = 0 \qquad r_0 = \frac{2dM_T \pm \sqrt{(2dM_T)^2 - 4(M_T - M_L)\,M_Td^2}}{2\,(M_T - M_L)}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene: $r_0 = 3{,}457 \cdot 10^8$ m

El campo gravitatorio resultante del campo gravitatorio terrestre y lunar se hace cero a una distancia de $3{,}46 \cdot 10^8$ m del centro de la Tierra.

9.4. Un antiguo proyecto de la NASA consistía en montar una lanzadera espacial en la Luna, para lanzar las sondas espaciales desde nuestro satélite en vez de hacerlo desde la Tierra. Comparar la velocidad de escape de un objeto situado en la superficie lunar, con la velocidad de escape en la Tierra.

Datos: masa de la Luna $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg, radio de la Luna $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m, masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m

Solución

En el Punto 9.5 de la introducción teórica se ha deducido que la velocidad que se debe imprimir a un cuerpo para que estando sobre la superficie de un astro de masa M y radio R, consiga escapar de él es:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene que la velocidad de escape de la Luna es:

$$v_{escape\ Luna} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 2\,376\ \text{m/s}$$

Y la velocidad de escape de la Tierra:

$$v_{escape\ Tierra} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 11\,190\ \text{m/s}$$

La relación entre la velocidad de escape de la Tierra y la de la Luna es $\dfrac{11\,190\ \text{m/s}}{2\,376\ \text{m/s}} = 4{,}71$ m/s

9.5. Io es un satélite de Júpiter con algunas características parecidas a nuestra Luna. Su masa es $M_I = 8{,}9 \cdot 10^{22}$ kg y su radio $R_I = 1{,}8 \cdot 10^6$ m. El radio de la órbita entorno a Júpiter es $r = 4{,}2 \cdot 10^8$ m y la masa de Júpiter $M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.

a) Determinar la velocidad de escape de Io, y compararla con la de la Luna.

b) ¿Cuál es el periodo de rotación de Io entorno a Júpiter?

Datos: masa de la Luna $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg, radio de la Luna $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m

Solución

a) La velocidad de escape de un astro de masa M y radio R es:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

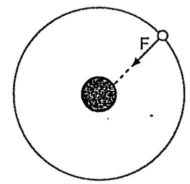
La velocidad de escape de Io es:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_I}{R_I}} \qquad v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}8 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 2\,570\ \text{m/s}$$

La velocidad de escape de Io es de 2,6 km/s, muy parecida a la de la Luna 2,4 km/s (calculada en el problema 9.4.).

b) Si aplicamos la segunda ley de Newton sobre Io, veremos que la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Júpiter sobre él es igual a la masa del satélite por su aceleración normal.

$$F = ma_n \qquad \frac{GM_IM_J}{r^2} = M_I\,\omega^2\,r \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM_J}{r^3}}$$



El periodo de la órbita es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_J}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(4{,}2 \cdot 10^8\ \text{m})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}}} = 1{,}52 \cdot 10^5\ \text{s} = 42\ \text{horas}$$

Io tarda 42 horas en orbitar entorno a Júpiter, mientras que el periodo de la Luna entorno a la Tierra es de 27 días. Esta diferencia es debida a la gran diferencia de masas que existe entre Júpiter y la Tierra.

9.6. El Sol es una estrella de tamaño intermedio que actualmente se encuentra en su secuencia principal, un estadio en que su núcleo transmuta el hidrógeno en helio. Dentro de unos millones de años, cuando el hidrógeno solar empiece a agotarse, el Sol se expandirá convirtiéndose en una «gigante roja» más brillante y fría que en su etapa anterior. En esta etapa el Sol eyectará hacia el espacio exterior aproximadamente el 40% de su masa y «quemará» helio convirtiéndolo en carbono. Una vez el helio haya sido totalmente transmutado en carbono el Sol se apagará y se contraerá debido a la presión gravitatoria convirtiéndose en una «enana blanca». Determinar la densidad media del Sol cuando se convierta en una «enana blanca» y la velocidad de escape de su superficie. Comparar estos valores con los valores actuales. Considerar la masa de la «enana blanca» igual al 60% de la masa solar y su radio de $5{,}0 \cdot 10^6$ m.

Datos: la masa actual del Sol es $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg y su radio $7{,}0 \cdot 10^8$ m. Cuando acabe convertido en una «enana blanca» su masa será $M_{EB} = 0{,}60 \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg $= 1{,}2 \cdot 10^{30}$ kg.

Solución

La densidad de la «enana blanca»:

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \rho_{EB} = \frac{M_{EB}}{\frac{4}{3}\pi R_{EB}^3}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$\rho_{EB} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\,(5{,}0 \cdot 10^6\ \text{m})^3} = 2{,}29 \cdot 10^9\ \text{kg/m}^3$$

Actualmente la densidad del Sol es $\rho_S = \dfrac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \dfrac{2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\,(7{,}0 \cdot 10^8\ \text{m})^3} = 1{,}39 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

La densidad del Sol una vez convertido en «enana blanca» será más de un millón de veces (concretamente $\frac{2{,}29 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3}{1{,}39 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 1{,}6 \cdot 10^6$ veces) que su densidad actual.

La velocidad de escape de un astro es $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Sustituyendo por los valores numéricos, la velocidad de escape del Sol una vez convertido en «enana blanca» será:

$$v_{escape\ EB} = \sqrt{\frac{2GM_{EB}}{R_{EB}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{5{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 5{,}66 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Y la velocidad de escape actual es:

$$v_{escape\ S} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{7{,}0 \cdot 10^8 \text{ m}}} = 6{,}18 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

La velocidad de escape del Sol una vez convertido en una «enana blanca» será $\frac{5{,}66 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{6{,}18 \cdot 10^5 \text{ m/s}} = 9{,}2$ veces superior a la actual.

9.7. Después de una explosión supernóvica la masa del núcleo de una estrella es de $2{,}0 \cdot 10^{31}$ kg. A medida que este núcleo «quema» todo su combustible la estrella se contrae debido a la presión gravitatoria. Determinar el radio por el cual la estrella se convierte en un «agujero negro» y su densidad media. Un «agujero negro» es una estrella con una velocidad de escape superior a la velocidad de la luz, es decir, una estrella de la cual no escapa ni la luz, de allí viene el nombre de «agujero negro».

Datos: la velocidad de la luz en el vacío es $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s

Solución

La velocidad de escape de un astro es $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. El radio a partir del cual la estrella del problema se convertirá en un «agujero negro» es aquel para el cual la velocidad de escape es igual a la velocidad de la luz:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$R = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{31} \text{ kg}}{(3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 2{,}97 \cdot 10^4 \text{ m}$$

El radio del «agujero negro» será de unos 30 km.
La densidad del «agujero negro» será:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{31} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (2{,}97 \cdot 10^4 \text{ m})^3} = 1{,}82 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Cada centímetro cúbico del «agujero negro» tendrá una masa de $1{,}8 \cdot 10^{14}$ kg.

9.8. Desdémona es un satélite natural de Urano descubierto en 1986 por la sonda espacial *Voyager 2*. Su órbita entorno a Urano es circular de radio $r = 6{,}27 \cdot 10^7$ m. La masa de Urano es $M_U = 8{,}69 \cdot 10^{25}$ kg. Determinar el periodo de la órbita de Desdémona.

Solución

La fuerza resultante que actúa sobre Desdémona es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Urano sobre él. Según la segunda ley de Newton esta fuerza es igual a la masa del satélite, M_D, por su aceleración normal.

$$F = ma_n \qquad \frac{GM_DM_U}{r^2} = M_D\,\omega^2 r \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM_U}{r^3}}$$

El periodo de la órbita es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_U}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}27 \cdot 10^7 \text{ m})^3}{6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 8{,}69 \cdot 10^{25} \text{ kg}}} = 4{,}096 \cdot 10^4 \text{ s} = 11 \text{ horas } 23 \text{ minutos}$$

Desdémona tarda 11 horas y 23 minutos en orbitar entorno a Urano.

9.9. Un satélite artificial terrestre de 950 kg es transportado hasta una altura de 800 km para ponerlo en órbita. En el momento de la inserción en la órbita, debido a un fallo técnico, se imprime al satélite una velocidad $v = 500$ m/s, muy superior a la deseada. ¿Tendrá este fallo consecuencias irreversibles?

Datos: masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, radio terrestre $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m

Solución

El tipo de órbita de un cuerpo viene determinado por su energía mecánica. Cuando la energía mecánica es inferior a cero la órbita es elíptica, pero si la energía mecánica es igual o mayor a cero la órbita es una parábola o una hipérbole.

Se empezará determinando la energía mecánica de este satélite:

$$E_m = E_c + U$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

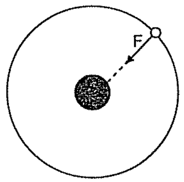
$$E_m = \frac{1}{2}\,950 \text{ kg } (500 \text{ m/s})^2 - \frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 950 \text{ kg} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6380 + 800) \cdot 10^3 \text{ m}} = 6{,}32 \cdot 10^7 \text{ J}$$

El satélite tiene una energía mecánica mayor que cero, en consecuencia, su órbita será hiperbólica y se perderá en el espacio.

9.10. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con periodo orbital de 1 día). Determinar la altura a la que se encuentran estos satélites, respecto a la superficie terrestre.

Datos: radio terrestre: $6{,}38 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

Solución



El periodo de un satélite geoestacionario es igual al periodo de rotación terrestre, $T = 1$ día $= 8{,}640 \cdot 10^4$ s.

Si aplicamos la segunda ley de Newton sobre el satélite, veremos que la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él es igual a la masa del satélite por su aceleración normal.

$$F = ma_n \qquad \frac{GmM_T}{r^2} = m\omega^2 r \qquad r^3 = \frac{GM_T}{\omega^2} \qquad (1)$$

El periodo de la órbita es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en la ecuación (1) y despejando el radio de la órbita r se obtiene:

$$r = \left[\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$r = \left[\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (8{,}640 \cdot 10^4\ \text{s})^2}{4\pi^2}\right]^{1/3} = 4{,}226 \cdot 10^7\ \text{m}$$

En consecuencia, el satélite se encontrará a una altura respecto a la superficie terrestre:

$$h = r - R_T = 4{,}226 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m} = 3{,}59 \cdot 10^7\ \text{m}$$

9.11. Por efecto de la rotación terrestre, el peso aparente de una persona que no se encuentre en los polos, es ligeramente inferior a su peso real.

a) Determinar el tanto por ciento de variación del peso aparente de una persona que se encuentra en el ecuador en relación a su peso.

b) Repetir el apartado anterior para una persona que se encuentra sobre el trópico de Cáncer (latitud 23,5° N).

Dato: radio terrestre: $6{,}38 \cdot 10^6$ m

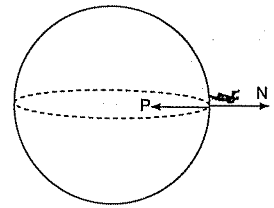
Solución

a) El peso aparente de un objeto es la fuerza neta que ejerce sobre un dinamómetro o una balanza.

Si la persona del problema sube sobre una balanza, la lectura del aparato, es decir, el peso aparente, será igual a la fuerza normal.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a la persona tenemos:

$$\overset{+}{\leftarrow} \quad \sum_i F_{in} = ma_n \qquad P - N = m\omega^2 R_T$$



Siendo la normal:

$$N = P - m\omega^2 R_T \qquad N = mg - mR_T \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Siendo T el periodo de rotación terrestre, $T = 1$ día $= 8{,}640 \cdot 10^4$ s.
El tanto por ciento de variación en relación al peso es:

$$\frac{P-N}{P} \cdot 100 = \frac{R_T \dfrac{4\pi^2}{T^2}}{g} \cdot 100$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$\frac{6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 4\pi^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2\ (8{,}640 \cdot 10^4\ \text{s})^2} \cdot 100 = 0{,}3439\%$$

El peso aparente de una persona situada en el ecuador es un 0,344% inferior a su peso real.

b) Si la persona está sobre el trópico de Cáncer, el radio de la circunferencia que describe en un día será: $R = R_T \cdot \cos 23{,}5° = 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \cos 23{,}5° = 5{,}851 \cdot 10^6$ m, y su aceleración normal estará dirigida hacia el centro de esta circunferencia.

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del eje y de la figura:

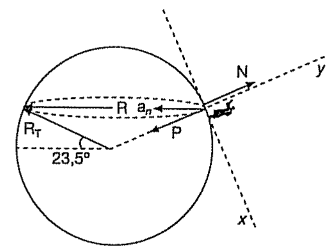
$$+\swarrow \quad \sum_i F_{iy} = ma_y \qquad P - N = m\omega^2 R \cos 23{,}5°$$

Quedando la normal:

$$N = P - m\omega^2 R \cos 23{,}5° \qquad N = mg - mR \cos 23{,}5° \frac{4\pi^2}{T^2}$$

El tanto por ciento de variación en relación al peso es:

$$\frac{P-N}{P} \cdot 100 = \frac{R \cos 23{,}5° \dfrac{4\pi^2}{T^2}}{g} \cdot 100$$



Sustituyendo por los valores numéricos:

$$\frac{5{,}851 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \cos 23{,}5° \cdot 4\pi^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2\ (8{,}640 \cdot 10^4\ \text{s})^2} \cdot 100 = 0{,}2893\%$$

Sobre el trópico de Cáncer el peso aparente es un 0,289% inferior al peso real.

9.12. El cometa Halley describe una órbita elíptica, con el Sol situado en uno de los focos, con una periodicidad de 76,1 años. Teniendo en cuenta que en el perihelio (punto en que la distancia entre el cometa y el Sol es mínima) la distancia es de 0,587 UA, determinar:

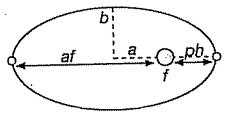
a) La distancia entre el cometa y el Sol en el afelio (punto en que la distancia entre el cometa y el Sol es máxima) y la excentricidad de la órbita.

b) La velocidad con que pasa por el perihelio y por el afelio.

Datos: masa del Sol $M_S = 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, la unidad astronómica 1 UA $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Solución

a) Si a y b son los semiejes mayor y menor de una elipse y e su excentricidad, la distancia del foco al centro de la elipse f viene dada por $f = a \cdot e$.



La distancia del foco al perihelio, ph, es: $\quad ph = a - f = a\,(1 - e) \quad$ (1)
La distancia del foco al afelio, af, es: $\quad af = a + f = a\,(1 + e) \quad$ (2)

El semieje mayor de la elipse es igual a la distancia media entre el foco y un punto de la elipse, y se hallará aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{Gm_H M_S}{a^2} = m_H \omega^2 a \qquad a^3 = \frac{GM_S}{\omega^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}T^2 \qquad a = \sqrt[3]{\frac{GM_S}{4\pi^2}T^2}$$

Teniendo en cuenta que el periodo del cometa es de 76,1 años, es decir, de $2{,}399 \cdot 10^9$ segundos, y sustituyendo por los valores numéricos:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{4\pi^2}(2{,}399 \cdot 10^9\ \text{s})^2} = 2{,}690 \cdot 10^{12}\ \text{m} = 17{,}98\ \text{UA}$$

La excentricidad de la órbita se puede determinar despejando e de (1):

$$e = 1 - \frac{ph}{a} \qquad e = 1 - \frac{0{,}587\ \text{UA}}{17{,}98\ \text{UA}} = 0{,}967$$

La distancia entre el Sol y el cometa en el afelio $af = 2{,}689 \cdot 10^{12}$ m $(1 + 0{,}967) = 5{,}290 \cdot 10^{12}$ m, que en unidades astronómicas queda $af = 35{,}4$ UA.

b) A lo largo de su trayectoria la energía mecánica del cometa se conserva. El momento angular también se conserva, ya que al tratarse de una fuerza central el momento de fuerza respecto a un punto situado en el Sol siempre es cero, y en consecuencia el momento angular respecto a este punto permanecerá constante. En consecuencia, la energía mecánica en el perihelio será igual que en el afelio y el momento angular también.

La ecuación de conservación de la energía mecánica es:

$$E_{c\,af} + U_{af} = E_{c\,ph} + U_{ph}$$

$$\frac{1}{2}m_{Halley}v_{af}^2 - \frac{Gm_{Halley}M_S}{r_{af}} = \frac{1}{2}m_{Halley}v_{ph}^2 - \frac{Gm_{Halley}M_S}{r_{ph}} \qquad (3)$$

La ecuación de conservación del momento angular es:

$$L_{af} = L_{ph}$$

$$m_{Halley}\,r_{af}v_{af} = m_{Halley}\,r_{ph}v_{ph} \qquad (4)$$

Despejando v_{af} de la ecuación (4):

$$v_{af} = \frac{r_{ph}v_{ph}}{r_{af}} \qquad (5)$$

Y sustituyendo la expresión (5) en (3):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r_{ph}v_{ph}}{r_{af}}\right)^2 - \frac{GM_S}{r_{af}} = \frac{1}{2}v_{ph}^2 - \frac{GM_S}{r_{ph}}$$

Despejando v_{ph} de la ecuación anterior queda:

$$\left(\frac{r_{ph}^2}{r_{af}^2} - 1\right)v_{ph}^2 = -\frac{2GM_S}{r_{ph}} + \frac{2GM_S}{r_{af}} \qquad v_{ph} = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_{ph}^2 - r_{af}^2}\left[-\frac{r_{af}^2}{r_{ph}} + r_{af}\right]}$$

Sustituyendo por los valores numéricos queda:

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2{,}00 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(8{,}782 \cdot 10^{10}\ \text{m})^2 - (5{,}290 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2}\left[-\frac{(5{,}290 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2}{8{,}782 \cdot 10^{10}\ \text{m}} + 5{,}290 \cdot 10^{12}\ \text{m}\right]} = 5{,}468 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Sustituyendo en (5):

$$v_{af} = \frac{8{,}782 \cdot 10^{10}\ \text{m} \cdot 5{,}468 \cdot 10^4\ \text{m/s}}{5{,}290 \cdot 10^{12}\ \text{m}} = 907{,}8\ \text{m/s}$$

La velocidad del cometa Halley varía desde 54,7 km/s en el perihelio hasta 908 m/s en el afelio.

9.13. Una de las razones por la que elementos ligeros como el helio o el hidrógeno se encuentran en concentraciones bajas en la atmósfera terrestre es que algunos átomos, cuya velocidad es superior a la velocidad de escape del planeta, abandonan la Tierra. Teniendo en cuenta que la energía cinética media de traslación de una molécula de un gas es función de la temperatura T a la que se encuentra: $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}k_B T$, siendo k_B la constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Comparar la velocidad media de los átomos de helio con la velocidad de escape del planeta. Tomar la temperatura media de la superficie terrestre igual a unos 15,0 °C = 288 K.

Datos: masa del átomo de helio $m = 4{,}00$ u; unidad atómica de masa $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg

Solución

La velocidad de escape de la Tierra es: $v_{escape} = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}}$

$$v_{escape\ Tierra} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 11{,}19 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

La energía cinética media de un átomo de helio a 288 K es:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 288 \text{ K} = 5{,}962 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Esta energía también se puede expresar como:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

Despejando:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2 \langle E_c \rangle}{m} = \frac{2 \cdot 5{,}962 \cdot 10^{-21} \text{ J}}{4{,}0 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}} = 1{,}796 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Y la velocidad cuadrática media de los átomos de helio puede estimarse haciendo:

$$v_{media} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{1{,}796 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 1{,}340 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Este número es una estimación del valor medio de las velocidades de los átomos, pero no indica que todos se muevan a esta velocidad. Los habrá con celeridades mayores y menores a este valor medio. Si se compara la velocidad media con la velocidad de escape se obtiene:

$$\frac{v_{media}}{v_{escape}} \cdot \% = \frac{1{,}340 \cdot 10^3 \text{ m/s}}{11{,}19 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \cdot 100 = 12{,}0 \text{ \%}$$

La celeridad media de los átomos de helio es un 12% la velocidad de escape del planeta. Este es un porcentaje suficientemente alto para pensar que es posible que existan átomos con velocidades superiores a la velocidad de escape, y que por tanto haya un flujo neto de átomos de helio de la atmósfera al espacio exterior.

CUESTIONES

9.1. La masa de la Luna es de $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg y su radio $1{,}74 \cdot 10^6$ m. El periodo de un péndulo simple de longitud 2,00 m en la superficie lunar es:

a) 5,32 s *b)* 2,84 s *c)* 6,35 s *d)* 6,98 s

9.2. El satélite Thuraya de telefonía móvil por satélite es un satélite geoestacionario (situado sobre el ecuador terrestre y con periodo orbital de 1 día). Teniendo en cuenta que el radio terrestre es $6{,}38 \cdot 10^6$ m y la masa de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, la altura a la que se encuentra el satélite es:

a) $3{,}59 \cdot 10^7$ m
c) $4{,}23 \cdot 10^7$ m
b) No hay suficientes datos para calcularla.
d) $7{,}57 \cdot 10^{22}$ m

9.3. La Luna es un satélite natural de la Tierra con una órbita prácticamente circular. Es correcto afirmar que:

a) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, a su energía cinética.

b) La energía mecánica de la Luna es positiva.

c) La energía potencial gravitatoria de la Luna es igual, en valor absoluto, al doble de su energía cinética.

d) La energía cinética de la Luna no está relacionada con su energía potencial gravitatoria.

9.4.1. Fobos es un satélite natural de Marte. Su periodo de rotación al planeta Marte es de 7,66 h, y el radio de su órbita $9{,}38 \cdot 10^3$ km.

La masa de Marte es:

a) $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg *c)* $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg
b) $7{,}06 \cdot 10^{19}$ kg *d)* $2{,}18 \cdot 10^{24}$ kg

9.4.2. La energía mínima necesaria para separar, una distancia infinita, Fobos de Marte, si la masa de Fobos es $1{,}08 \cdot 10^{16}$ kg, será:

a) $4{,}93 \cdot 10^{22}$ J *b)* $4{,}60 \cdot 10^{22}$ J *c)* $9{,}88 \cdot 10^{22}$ J *d)* $2{,}47 \cdot 10^{22}$ J

9.5.1. La Estación Internacional se encuentra orbitando la Tierra a una altura de 352 km. La masa de la estación es de 187 000 kg, el radio terrestre $6{,}38 \cdot 10^6$ m y la masa de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

El periodo de rotación de la Estación Internacional es:

a) 24,0 horas *b)* 91,6 minutos *c)* 18,0 días *d)* 5,60 horas

9.5.2. La energía necesaria para llevar la Estación desde la superficie de la Tierra hasta su órbita es:

a) $1{,}11 \cdot 10^{13}$ J *c)* 0,999 J
b) $-3{,}27 \cdot 10^6$ J *d)* $1{,}64 \cdot 10^6$ J

9.6. Para que un satélite se encuentre siempre sobre el mismo punto de la superficie de la Tierra:

a) Su velocidad deberá ser $v = \sqrt{\frac{GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}$.

b) Deberá permanecer en reposo a una altura h cualquiera sobre el polo norte o sur.

c) Deberá estar sobre el ecuador y el periodo de su órbita será de un día.

d) Su velocidad deberá ser $v = \sqrt{\frac{2GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}$.

9.7. Io es un satélite de Júpiter con un periodo de rotación de 1,77 días y un radio orbital de $4{,}22 \cdot 10^8$ m. La masa de Júpiter es:

a) No hay suficientes datos para calcularla.

b) $3{,}80 \cdot 10^{27}$ kg

c) $1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg

d) $2{,}30 \cdot 10^{27}$ kg

9.8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) La primera ley de Kepler dice que los planetas orbitan entorno al Sol describiendo órbitas circulares.

b) Plutón, el planeta más alejado del Sol, es el que tiene un periodo de rotación mayor.

c) Mercurio como consecuencia de ser el planeta del sistema solar con menos masa es el que tiene un periodo de rotación alrededor del Sol menor.

d) Ninguna de las anteriores.

9.9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) La masa de una persona es inferior en la Luna que en la Tierra.

b) La masa de una persona es superior en la Luna que en la Tierra.

c) El peso de una persona es inferior en la Luna que en la Tierra.

d) El peso de una persona es superior en la Luna que en la Tierra.

9.10. Un satélite orbita entorno a un planeta con una órbita circular. Es correcto afirmar que:

a) Su energía mecánica es cero.

b) Su energía mecánica es igual a menos su energía cinética.

c) Su energía potencial es igual a menos su energía cinética partido dos.

d) No hay ninguna respuesta cierta.

9.11. El radio terrestre es $6{,}38 \cdot 10^6$ m y la masa de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. El campo gravitatorio terrestre se reduce a la mitad a una altura de:

a) $2{,}64 \cdot 10^6$ m *c)* $3{,}19 \cdot 10^6$ m

b) $4{,}98 \cdot 10^6$ m *d)* $9{,}02 \cdot 10^6$ m

9.12. *Mars-Surveyor* es un satélite, enviado por los Estados Unidos, que orbita el planeta Marte y que ha enviado numerosas fotografías de la superficie de este planeta. El radio medio de la órbita del *Mars-Surveyor* es de $3{,}77 \cdot 10^6$ m. Determinar el periodo de su órbita.

Datos: Masa de Marte $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg

a) 3,62 horas *b)* 4,35 horas *c)* 1,95 horas *d)* 6,28 horas

9.13. Se dispara verticalmente y hacia arriba un proyectil con velocidad inicial 7,0 km/s. El radio terrestre es $6{,}38 \cdot 10^6$ m y la masa de la Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. El proyectil llegará a una altura de:

a) $2{,}50 \cdot 10^6$ m *b)* $1{,}05 \cdot 10^7$ m *c)* $4{,}11 \cdot 10^6$ m *d)* $8{,}21 \cdot 10^6$ m

9.14. El trabajo necesario para llevar un cuerpo de masa 2,0 kg, a velocidad constante, desde la superficie de la Tierra a un punto alejado infinitamente de ella es igual a:

a) $1{,}25 \cdot 10^8$ J *b)* $6{,}26 \cdot 10^7$ J *c)* 19,6 J *d)* $3{,}24 \cdot 10^5$ J

9.15. Mercurio es el planeta del sistema solar más cercano al Sol (masa solar $2{,}000 \cdot 10^{30}$ kg). Pasa por el perihelio situado a $4{,}600 \cdot 10^{10}$ m del Sol a una velocidad de $5{,}915 \cdot 10^4$ m/s. La velocidad de Mercurio en el afelio, situado a $6{,}982 \cdot 10^{10}$ m del Sol, es:

a) No hay suficientes datos para determinarla.

b) $5{,}915 \cdot 10^4$ m/s

c) $2{,}850 \cdot 10^4$ m/s

d) $3{,}900 \cdot 10^4$ m/s

9.16. Teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es de $6{,}38 \cdot 10^6$ m, la velocidad a la que un satélite de comunicaciones se debe insertar en su órbita situada a una altura de 800 km es de:

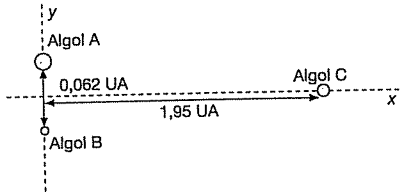
a) 7,45 km/s *b)* $5{,}56 \cdot 10^6$ m/s *c)* 3,73 km/s *d)* 2,48 m/s

SOLUCIONES

9.1. *d)*
9.2. *a)*
9.3. *c)*
9.4.1. *c)*
9.4.2. *a)*
9.5.1. *b)*
9.5.2. *a)*
9.6. *c)*
9.7. *c)*
9.8. *b)*
9.9. *c)*
9.10. *b)*
9.11. *a)*
9.12. *c)*
9.13. *c)*
9.14. *a)*
9.15. *d)*
9.16. *a)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Algol o Beta Perseo es un sistema estelar triple alejado 92,8 años luz del Sol. Las tres estrellas que lo constituyen Algol A, B y C tienen masas 3,59, 0,79 y 1,67 la masa solar, respectivamente. Algol A y B están separadas 0,062 UA, y Algol C dista 1,95 UA de las otras dos. Suponiendo que en un momento dado las tres estrellas se encuentran en las posiciones de la figura, determinar:**



a) El campo gravitatorio creado por Algol A y B en el punto donde se encuentra Algol C.

b) La fuerza que Algol A y B ejercen sobre Algol C.

Datos: Masa del Sol $2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, 1 UA = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Sol.: *a)* $\vec{g} = -6{,}87 \cdot 10^{-3}$ N/kg $\hat{i} + 6{,}98 \cdot 10^{-5}$ N/kg $\hat{j}$

b) $\vec{F} = -2{,}29 \cdot 10^{28}$ N $\hat{i} + 2{,}33 \cdot 10^{26}$ N $\hat{j}$

2 **Capella o Alfa Auriga es un sistema estelar múltiple en el que se encuentran dos grandes estrellas conocidas como Capella Aa y Capella Ab, con masas iguales a 2,56 y 2,69 veces la masa solar respectivamente. En un determinado momento estas dos estrellas están separadas una distancia de 0,730 UA. Determinar en qué punto de la recta que une los centros de las dos estrellas, el campo gravitatorio creado por ambas se anula.**

Datos: Masa del Sol $2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, 1 UA = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Sol.: El campo gravitatorio total se anula en un punto situado a una distancia de 0,360 UA de Capella Aa situado sobre la recta que une los centros de las dos estrellas.

3 **La masa de la Luna es de $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg y su radio $1{,}74 \cdot 10^{6}$ m. Determinar la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.**

Sol.: 1,62 N/kg

4 **La masa de Marte es de $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg y su radio $3{,}40 \cdot 10^{6}$ m. Determinar:**

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte.

b) El tiempo que tardará en caer un cuerpo que se deja con velocidad inicial cero a una altura de 10 m de la superficie de Marte.

c) El periodo que tendrá en Marte un péndulo simple que en la tierra tiene un periodo de 1,00 s

Sol.: *a)* 3,71 N/kg; *b)* 2,32 s; *c)* 1,63 s

5 **El satélite NOA es un satélite polar (su trayectoria pasa por los polos). Su órbita se encuentra a una altura de 850 km. Determinar el periodo de la órbita.**

Datos: Radio Terrestre: $6{,}38 \cdot 10^{6}$ m; masa Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

Sol.: 1 hora 42 minutos

6 **Mars-Express es un satélite que la Agencia Espacial Europea ha mandado para que orbite entorno al planeta Marte. La masa de la Mars-Express es de unos 1 100 kg y el periodo de su orbita alrededor del planeta rojo de 7,50 horas.**

a) Determinar el radio medio de la órbita.

b) La energía mecánica del satélite.

Datos: Masa de Marte $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg

Sol.: *a)* $9{,}25 \cdot 10^{6}$ m; *b)* $-2{,}55 \cdot 10^{9}$ J

7 **Determinar el campo gravitatorio resultante de los campos gravitatorios individuales del Sol y Mercurio, en un punto situado sobre la recta que une estos dos astros, a una distancia de $4{,}0 \cdot 10^{10}$ m del centro del Sol.**

Datos: Masa del Sol: $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg; masa de Mercurio: $3{,}3 \cdot 10^{23}$ kg; distancia Sol-Mercurio: $5{,}8 \cdot 10^{10}$ m

Sol.: 0,083 N/kg en la dirección de la recta que une los centros del Sol y Mercurio y apuntando al Sol

8 **El radio de la órbita de Júpiter es de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m. ¿Cuántos días terrestres tiene un año jupiteriano?**

Datos: Masa del Sol: $2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg

Sol.: 4 319 días

9 **Determinar el tanto por ciento de variación del campo gravitatorio terrestre entre un punto situado a nivel del mar, y un punto situado sobre el Everest (a $8{,}848 \cdot 10^{3}$ m sobre el nivel del mar).**

Datos: Radio Terrestre: $6{,}378 \cdot 10^{6}$ m

Sol.: 0,2767%

10 **Un astronauta lleva a cabo varios experimentos en la superficie de un planeta.**

En primer lugar mide el periodo de un péndulo de 2,00 m de longitud y ve que es de 2,98 s. En segundo lugar mide la velocidad de escape de dicho planeta y ve que es de 21,3 km/s. Determinar el radio y la masa de dicho planeta:

Sol.: $2{,}56 \cdot 10^{7}$ m; $8{,}69 \cdot 10^{25}$ kg

11 **El Principito llega a Leda, un pequeño satélite de Júpiter de 8,0 km de radio y masa $5{,}7 \cdot 10^{15}$ kg. Determinar la velocidad con que deberá lanzar una piedra en dirección horizontal para que ésta dé la vuelta a Leda y le golpee en la espalda.**

Sol.: 6,9 m/s

⑫ **Calcular con qué velocidad se debe lanzar un cuerpo en dirección vertical ascendente para que llegue a una altura de 1 000 km sobre la superficie terrestre.**

Datos: Radio Terrestre: $6{,}38 \cdot 10^6$ m; masa Tierra $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

Sol.: 4,12 km/s

⑬ **Una estrella de neutrones es un astro en el que para compensar la atracción gravitatoria, los neutrones se compactibilizan apilándose entre sí. Suponiendo que la masa de una estrella de neutrones es tres veces la masa solar y que su radio es de 10 km, determinar la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella.**

Dato: masa del Sol $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg

Sol.: $1{,}3 \cdot 10^{12}$ N/kg

⑭ **Determinar la duración que tendría que tener un día terrestre para que el peso aparente de una persona se reduzca a la mitad:**

a) Cuando esta persona se encuentra en el ecuador.

b) Cuando esta persona se encuentra en Barcelona (Latitud de Barcelona 41° N).

Sol.: *a)* 1 hora y 59 minutos; *b)* 1 hora y 30 minutos

⑮ **La excentricidad de la órbita de Plutón es 0,248 y la distancia media de Plutón al Sol es $5{,}91 \cdot 10^{12}$ m. Determinar:**

a) La máxima distancia de Plutón al Sol.

b) La mínima distancia de Plutón al Sol.

c) La velocidad de Plutón en el afelio.

d) La velocidad de Plutón en el perihelio.

Sol.: *a)* $7{,}38 \cdot 10^{12}$ m; *b)* $4{,}44 \cdot 10^{12}$ m; *c)* $3{,}69 \cdot 10^3$ m/s; *d)* $6{,}13 \cdot 10^3$ m/s

CAPÍTULO 10

MECÁNICA DE FLUIDOS

10.1 GENERALIDADES

Los fluidos se caracterizan por tener forma variable. Son fluidos los líquidos y los gases. Las fuerzas entre las partículas que forman los líquidos y gases, normalmente moléculas, son muy débiles, ello permite que puedan adaptarse a la forma del recipiente que los contiene. A diferencia de lo que sucede con los sólidos que, al ser más intensas las fuerzas de atracción entre las partículas que los forman, presentan mucha mayor resistencia a modificar su forma.

Si se ejerce una fuerza tangencial sobre un fluido, éste se deforma mientras actúa la fuerza. A este proceso de deformación continua se denomina *fluidez.* Un fluido es, por tanto, una sustancia capaz de fluir. Entre los líquidos y los gases existen algunas diferencias. Los líquidos tienen volumen determinado, esto quiere decir que ofrecen una gran resistencia a la compresión. Los gases son más fácilmente compresibles, por ello, no sólo se adaptan a la forma del recipiente, sino que también a su volumen.

La Mecánica de Fluidos aplica las leyes de la mecánica al estudio de los fluidos. El estudio de los fluidos en reposo, en situación de equilibrio, corresponde a la *Estática de Fluidos,* la *Dinámica de Fluidos* estudia los fluidos en movimiento.

CARACTERÍSTICAS DE UN FLUIDO

Densidad

La densidad de una sustancia es la masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Donde ρ representa la densidad, m la masa y V el volumen de esta masa. En el SI se mide en kg/m^3, a veces también en g/cm^3. Como la densidad está relacionada con el volumen, depende de la presión y de la temperatura. En el caso de los líquidos las variaciones de la densidad con la presión y con la temperatura son pequeñas, ya que se comprimen poco y al calentarlos también se dilatan poco. No es así en los gases en los que la influencia de la presión y la temperatura sobre el volumen es más considerable.

Peso específico

Es el peso de la unidad de volumen:

$$\lambda = \frac{P}{V}$$

En el SI se mide en N/m^3.
Como el $P = m\,g$, el peso específico está relacionado con la densidad por:

$$\lambda = \rho\, g$$

Densidad relativa

La densidad relativa de una sustancia es la relación entre su densidad y la de una sustancia de referencia:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{\text{referencia}}}$$

La densidad relativa no tiene unidades. Dado el interés que tiene el agua, ésta es la sustancia que suele tomarse como referencia para dar las densidades relativas.

Presión

Es la fuerza normal ejercida por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A}$$

La unidad de presión del SI es el pascal, Pa. Un pascal equivale a:

$$1\text{Pa} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Otras unidades de presión son la atmósfera, atm, 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. El torr o milímetro de mercurio (mmHg), 1 atm = 760 torr. El bar, 1 bar = 100 kPa.

10.2. ESTÁTICA DE FLUIDOS

Un fluido ejerce una presión en todas las direcciones. La fuerza debida a la presión de un fluido en reposo es siempre perpendicular a cualquier superficie. Si tuviese una componente de fuerza tangencial, según la tercera ley de Newton, la superficie ejercería una fuerza tangencial sobre el fluido y éste no estaría en reposo.

En un fluido en el que la densidad apenas varía con la profundidad, como es el caso de los líquidos, la diferencia de presión entre dos puntos es:

$$P_2 - P_1 = \rho\, g\,(h_2 - h_1) \qquad (1$$

Donde h_1 y h_2 representan la profundidad del punto 1 y del punto 2, respectivamente. Esta ecuación se conoce como ecuación fundamental de la hidrostática

Si aumenta o disminuye la presión P_1 del punto 1 de un fluido incompresible en equilibrio, la presión P en cualquier punto del mismo aumentará o disminuirá en el mismo valor ya que la diferencia entre ambas presiones debe ser igual de $\rho\, g\, h$. Este hecho fue enunciado en 1653 por Pascal y se conoce como *principio de Pascal* que puede enunciarse: la presión ejercida en un punto de un fluido que llena totalmente el espacio que le rodea se transmite íntegramente a todos los puntos del fluido y de la pared del recipiente que lo contiene. En el principio de Pascal se basa la prensa hidráulica, los frenos y los gatos hidráulicos...

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Una consecuencia de la variación de la presión con la profundidad es el principio de Arquímedes: todo objeto total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta un empuje ascensional igual al peso del fluido que ha desplazado.

$$E = \rho\, g\, V_{\text{sum}}$$

Donde E representa el empuje, ρ la densidad del fluido, g la gravedad y V_{sum} el volumen de fluido desplazado que coincide con el volumen sumergido del objeto.

Fácilmente se puede deducir que cuando se introduce un sólido de densidad ρ_s en un líquido de densidad ρ_l si:

$\rho_s > \rho_l$ el sólido se hunde.
$\rho_s = \rho_l$ el sólido, totalmente sumergido, se mantiene en el punto donde se deja.
$\rho_s < \rho_l$ el sólido flota.

PRESIÓN ATMOSFÉRICA

La presión que ejerce la atmósfera se denomina *presión atmosférica*. La presión atmosférica varía con el clima y con la altura. La presión media al nivel del mar es igual a $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa = 1 atm.

Si la presión sobre un punto de la superficie de un fluido es la presión atmosférica, P_0, según (1) la presión en un punto situado a una profundidad h será:

$$P = P_0 + \rho\, g\, h$$

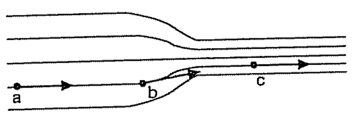
A esta presión se le denomina *presión absoluta* y la diferencia $P - P_0 = \rho\, g\, h$ es la *presión manométrica*.

$$P_{\text{manométrica}} = \rho\, g\, h$$

La presión absoluta está medida respecto al valor cero y la presión manométrica está medida respecto a la presión atmosférica.

10.3. DINÁMICA DE FLUIDOS

En un fluido en movimiento, en un instante dado, cada partícula tiene su propia velocidad, que normalmente varía con el tiempo. Un fluido tiene un *flujo estacionario* cuando su velocidad en cada punto es siempre la misma, aunque varíe de unos puntos a otros. Una *línea de corriente* es una línea imaginaria que en todos sus puntos es tangente al vector velocidad en este punto. Cuando el flujo es estacionario, las líneas de corriente no cambian con el tiempo y cada partícula que pasa por un punto sigue la misma trayectoria que las partículas que anteriormente pasaron por él.



Líneas de corriente de un fluido en régimen estacionario

Cuando el movimiento de un fluido tiene lugar de forma que las capas del fluido deslizan unas sobre otras como si fueran verdaderas láminas fluidas se dice que el flujo es *laminar* o de *Poiseuille.* Cuando la velocidad es muy grande, a causa de la fricción interna (viscosidad), las líneas de corriente se entrecruzan y se forman remolinos, entonces el flujo es *turbulento* o de *Venturi.*

CAUDAL DE VOLUMEN

El *caudal volumétrico* o de volumen de un fluido es el volumen de fluido que por unidad de tiempo atraviesa una sección de área A normal a la dirección de su movimiento. Si consideramos una sección de un tubo de área A_1 que sea normal a la dirección de propagación del fluido, el volumen de fluido que en un tiempo Δt atraviesa esta sección es $A_1 v \Delta t$, el caudal de volumen que denotaremos Q será:

$$Q = \frac{A_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = A_1\, v_1$$

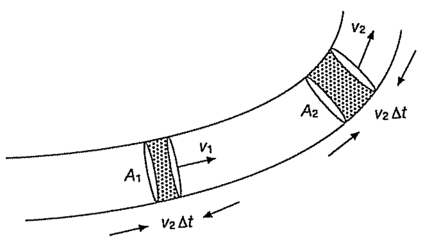
De forma general escribimos:

$$Q = A\, v$$

Normalmente cuando hablemos de caudal nos referiremos al caudal volumétrico.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Consideremos un tubo por el que pasa un fluido incompresible en flujo estacionario, en un tiempo Δt el volumen que pasa por la sección de área A_1 debe ser igual al volumen que en este mismo tiempo atraviesa otra sección de área A_2, por tanto:



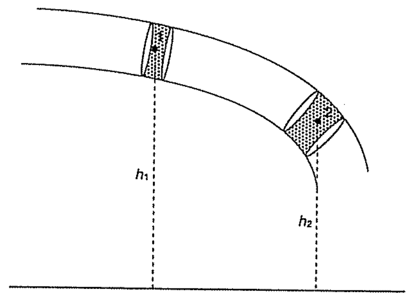
$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \qquad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

La ecuación anterior se denomina ecuación de continuidad. De esta expresión podemos deducir que si $A_1 > A_2$, para que se mantenga la igualdad de los dos miembros debe cumplirse $v_1 < v_2$ Es decir, en un estrechamiento, donde el área de la sección del tubo disminuye, la velocidad aumenta.

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Para dos puntos de una misma línea de corriente de un fluido incompresible, en flujo estacionario y sin fricción interna (viscosidad) se cumple:

$$P_1 + \rho\, g\, h_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \rho\, g\, h_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$



ρ representa la densidad del fluido, P_1 y P_2 son las respectivas presiones en los puntos 1 y 2, v_1 y v_2 son las velocidades en estos puntos y h_1 y h_2 son las alturas de los puntos.

Un fluido así es ideal, pues todos los fluidos tienen más o menos viscosidad.

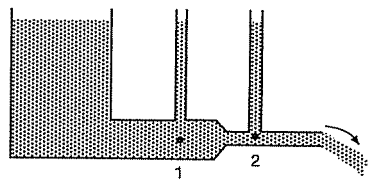
La ecuación anterior también podemos escribirla:

$$P_1 + \rho\, g\, h_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = C$$

Efecto Venturi

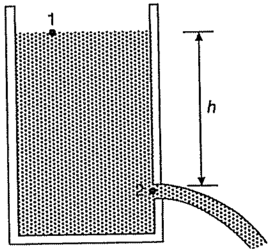
Consideremos un fluido que se mueve en un tubo horizontal que tiene una sección variable. Para dos puntos que están a la misma altura y en la misma línea de corriente, al ser h_1 y h_2 iguales, podemos escribir la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$



De esta expresión deducimos que si en el punto 1 la velocidad es menor que en el punto 2, $v_1 < v_2$, se cumple que $P_1 > P_2$. Es decir, a todo aumento de velocidad en una línea de corriente corresponde una disminución de presión.

Teorema de Torricelli



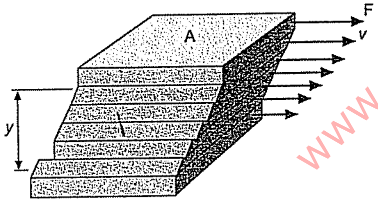
Según el *teorema de Torricelli* la velocidad v de salida de un líquido por un orificio de una pared delgada de una vasija abierta es: $v = \sqrt{2\,g\,h}$, donde h representa la distancia del orificio a la superficie libre del líquido.

Esta ecuación nos dice que la velocidad de salida por el orificio es la misma que tendría un objeto que en caída libre cayese desde la superficie libre del líquido hasta el centro del orificio.

Viscosidad

Si deseamos que una capa de un fluido se deslice sobre otra es necesario hacer una fuerza, debido a que entre ambas capas hay una fuerza de arrastre o de frenado que se denomina fuerza viscosa. Supongamos una delgada capa de fluido situado entre dos placas paralelas de área A cada una y una separación y. Si mantenemos la placa inferior fija, para arrastrar la placa superior con una velocidad v debemos hacer una fuerza tangencial F que es proporcional al área de la placa, a la velocidad e inversamente proporcional a la separación de las placas, y.

$$F = \mu \frac{Av}{y}$$



μ es el coeficiente de viscosidad, que representa la fuerza tangencial que hay que aplicar a una placa de área unidad para que se deslice con un velocidad unidad respecto a otra placa separada una distancia unidad. El coeficiente de viscosidad en el SI se mide en Pa · s. Otra unidad es el poise, Po, 1 Pa · s = 10 Po. Para aplicar esta expresión es necesario que la velocidad varíe linealmente con la separación de las placas.

Obsérvese que mientras la parte de fluido próximo a la placa superior se mueve con una velocidad v, la parte próxima a la placa inferior permanece en reposo.

La viscosidad varía con la temperatura. En los gases aumenta con la temperatura y en los líquidos disminuye. Los líquidos fluidos tienen baja viscosidad y por ello fluyen fácilmente, a diferencia de los que tienen alta viscosidad, que fluyen con mayor dificultad. Los líquidos espesos tienen valores altos de viscosidad, pero no hay que confundir espesor con densidad, por ejemplo, el aceite de los motores se considera espeso y tiene una densidad de $0{,}80 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Ley de Poiseuille

Un fluido ideal, no viscoso, puede mantener una velocidad constante en un tubo horizontal sin necesidad de aplicar ninguna fuerza. Debido a la viscosidad, para que un fluido real mantenga una velocidad constante en un tubo horizontal, es necesario mantener una diferencia de presión entre sus extremos. Según la ley de Poiseuille el flujo de volumen de un fluido incompresible en régimen laminar que circula por un tubo de sección circular es:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \cdot \mu\, L}(P_1 - P_2)$$

donde R es el radio del tubo, $(P_1 - P_2)$ es la diferencia de presión entre sus extremos y L es la longitud.

PROBLEMAS RESUELTOS

ESTÁTICA DE FLUIDOS

10.1. Se mezcla un líquido de densidad relativa respecto al agua 1,2 con otro líquido de densidad relativa respecto al agua 1,5. La mezcla ocupa un volumen de 1,0 L y tiene una densidad relativa respecto al agua de 1,3. Suponiendo que este volumen es la suma de los volúmenes de los dos líquidos, ¿qué volumen de cada líquido se ha mezclado? Densidad del agua 1,00 kg/L.

Solución

Sea ρ la densidad de la mezcla. La masa de ésta será:

$$m = V\rho \qquad m = 1{,}0\text{ L} \times 1{,}3 \cdot 1{,}00\text{ kg/L} = 1{,}3\text{ kg} \tag{1}$$

Por otra parte, esta masa ha de ser igual a la suma de las masas de los dos líquidos que se han mezclado.

$$m = m_1 + m_2 \qquad m_1 = V_1 \times 1{,}2 \cdot 1{,}00\text{ kg/L} \qquad m_2 = (1{,}0\text{ L} - V_1) \times 1{,}5 \cdot 1{,}00\text{ kg/L}$$

$$m = V_1 \times 1{,}2 \cdot 1{,}00\text{ kg/L} + (1{,}0\text{ L} - V_1) \times 1{,}5 \cdot 1{,}00\text{ kg/L} \tag{2}$$

Sustituyendo m por el valor hallado en (1), resulta:

$$1{,}3\text{ kg} = V_1 \times 1{,}2 \cdot 1{,}00\text{ kg/L} + (1{,}0 - V_1) \times 1{,}5 \cdot 1.00\text{ kg/L} \qquad V_1 = 0{,}666\text{ L}$$

$$V_2 = 1{,}0\text{ L} - 0{,}666\text{ L} = 0{,}333\text{ L}$$

$$V_1 = 0{,}67\text{ L} \qquad V_2 = 0{,}33\text{ L}$$

10.2. Un recipiente que tiene una base circular de 5,0 cm de radio contiene mercurio hasta una altura de 30 cm. Determinar:

a) La presión absoluta y la presión manométrica en el fondo del recipiente.

b) La fuerza sobre el fondo debida a la presión manométrica.

c) El peso del mercurio contenido en el recipiente. Densidad del mercurio $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3. Suponer que la presión atmosférica es $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa.

Solución

a) Presión absoluta.

La presión absoluta viene dada por la expresión:

$$P = P_0 + \rho\, g\, h$$

Sustituyendo se obtiene:

$$P = 1{,}01 \cdot 10^5\text{ Pa} + 13{,}6 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 \times 9{,}81\text{ m/s}^2 \times 0{,}30\text{ m} = 141 \cdot 10^3\text{ Pa}$$

Presión manométrica. Calcularemos la presión manométrica mediante la expresión:

$$P_{\text{manométrica}} = \rho\, g\, h$$

Sustituimos:

$$P_{\text{manométrica}} = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 0{,}30 \text{ m} = 40{,}0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$P = 1{,}4 \cdot 10^2 \text{ kPa} \qquad P_{\text{manométrica}} = 40 \text{ kPa}$$

b) La fuerza sobre el fondo debida a la presión manométrica.

De la definición de presión tenemos: $P = \dfrac{F}{A}$
Que sustituyendo resulta:

$$40{,}0 \cdot 10^3 \text{ Pa} = \frac{F}{\pi\,(0{,}050)^2} \qquad F = 314 \text{ N}$$

$$F = 3{,}1 \cdot 10^2 \text{ N}$$

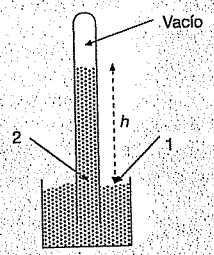
c) El peso del mercurio contenido en el recipiente.

$$P = V\rho\, g;\ P = \pi\,(0{,}050)^2 \times 0{,}30 \text{ m} \times 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 314 \text{ N}$$

Observar que en esta ocasión el peso y la fuerza sobre el fondo coinciden.

$$P = 3{,}1 \cdot 10^2 \text{ N}$$

10.3. El tubo y el recipiente de la figura contienen agua, si la presión atmosférica es igual a $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, ¿cuál es la altura, h, de la columna de agua?



Solución

La presión en el punto 1 y la presión en el punto 2 son iguales, ya que están en el mismo líquido y a la misma altura. La presión en el punto 1 es la presión atmosférica, $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, y la presión en el punto 2, dado que el tubo está cerrado y que en la parte superior está vacío, es la presión debida a una columna de agua de altura h.

La presión de una columna de altura h es:

$$P = \rho\, g\, h$$

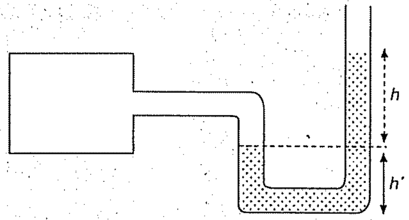
Sustituimos y resulta:

$$1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times h$$

$$h = 10{,}3 \text{ m}$$

Una experiencia similar a ésta fue realizada en 1643 por Torricelli, pero utilizó mercurio, y pudo observar que la columna de mercurio alcanzaba una altura de 760 mm.

10.4. Una forma sencilla de medir la presión es mediante un manómetro de tubo abierto que consiste en un tubo en forma de U que contiene un líquido (muchas veces agua o mercurio). El manómetro de la figura contiene agua, si la altura h es igual a 150 mm, ¿cuál será la presión manométrica en el interior del recinto?



Solución

La presión en la parte inferior de la columna de la izquierda es:

$$P + \rho\, g\, h'$$

Siendo P la presión en el recinto.

La presión en la parte inferior de la columna de la derecha es:

$$P_0 + \rho\, g\,(h + h')$$

P_0 representa la presión atmosférica.

Estas presiones corresponden a puntos de un mismo fluido situados a la misma altura, en consecuencia son iguales.

$$P + \rho\, g\, h' = P_0 + \rho\, g\,(h + h') \qquad P - P_0 = \rho\, g\, h$$

Es decir:

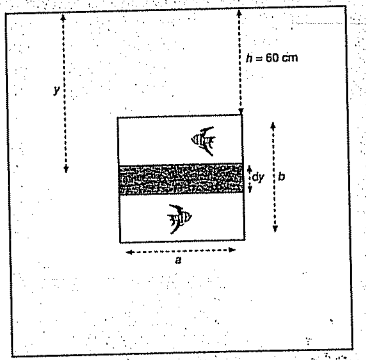
$$P_{\text{manométrica}} = P - P_0 = \rho\, g\, h$$

Sustituyendo resulta:

$$P_{\text{manométrica}} = P - P_0 = 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 0{,}15 \text{ m} = 1{,}47 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$P_{\text{manométrica}} = 1{,}47 \text{ kPa}$$

10.5. La figura representa una pared de una piscina que tiene en una ventana rectangular de base $a = 70$ cm y altura $b = 50$ cm. Calcular la fuerza que el agua de la piscina ejerce sobre esta ventana.



Solución

La fuerza es igual a la presión por el área: $F = PA$, pero la presión varía con la profundidad. Consideraremos una superficie elemental de área $dA = a\,dy$ situada a una profundidad y en la que supondremos que la presión es constante, y, por tanto, la fuerza sobre esta superficie será: $dF = PdA = Pady$, como la presión es $P = \rho\, g\, h$, escribimos:

$$dF = \rho\, gya\, dy$$

La presión sobre toda la ventana será:

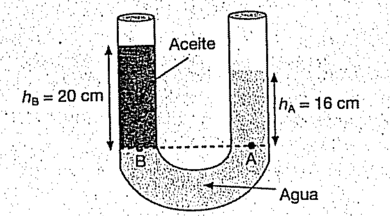
$$F = \int_h^{(h+b)} \rho\, gay\, dy = \frac{1}{2}\rho\, g\, a\left[y^2\right]_h^{(h+b)} = \frac{1}{2}\rho\, g\, a\,[(h+b)^2 - h^2]$$

Sustituimos:

$$F = 1/2\ 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 0{,}70\ \text{m}\ [(0{,}60\ \text{m} + 0{,}50\ \text{m})^2 - (0{,}60\ \text{m})^2 = 2918\ \text{N}$$

$$F = 2{,}9\ \text{kN}$$

10.6. El tubo en U de la figura contiene aceite en una rama y agua en la otra. A partir de la superficie de separación de los dos líquidos el aceite alcanza una altura de 20 cm y el agua alcanza una altura de 16 cm. ¿Cuál es la densidad relativa del aceite respecto al agua?



Solución

Consideremos dos puntos A y B en la misma superficie de separación de los líquidos, como los dos puntos están en el mismo líquido y a la misma altura se verifica: $P_A = P_B$.

$$P_A = P_0 + \rho_{agua}\, g\, h_A \qquad P_B = P_0 + \rho_{aceite}\, g\, h_B \qquad P_0 + \rho_{agua}\, g\, h_A = P_0 + \rho_{aceite}\, g\, h_B$$

La presión atmosférica P_0 es igual en las dos ramas.

$$\rho_{agua}\, h_A = \rho_{aceite}\, h_B$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{aceite}}{\rho_{agua}} = \frac{h_A}{h_B}$$

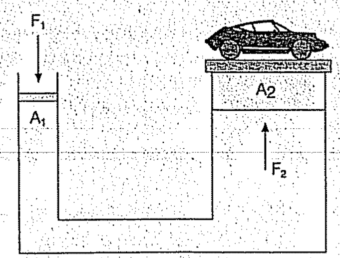
Sustituimos:

$$\rho_r = \frac{16}{20} = 0{,}80$$

$$\rho_r = 0{,}80$$

10.7. La figura representa un elevador hidráulico en el que se ejerce una fuerza F_1 sobre el émbolo de área A_1. La presión se transmite a través de un líquido a un segundo émbolo de área mayor, A_2. Si el radio del émbolo pequeño es 10 cm y el del émbolo mayor es 30 cm, ¿qué fuerza habrá que aplicar en el émbolo pequeño para elevar un coche de 1 400 kg?

Este dispositivo puede utilizarse también como prensa, es la llamada prensa hidráulica.



Solución

La presión se transmite íntegramente por el fluido, por tanto las presiones en los émbolos son idénticas.

$$P_1 = P_2$$

Como:

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} \text{ y } P_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

Se cumple:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Sustituimos, teniendo en cuenta que la fuerza F_2 es igual al peso del coche:

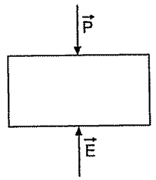
$$\frac{F_1}{\pi\,(0{,}10\ \text{m})^2} = \frac{1\,400\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\pi\,(0{,}30\ \text{m})^2} \qquad F_1 = 1{,}52 \cdot 10^3\ \text{N}$$

$$F_1 = 1{,}5\ \text{kN}$$

10.8. Una plancha de poliestireno de 20 cm de altura y una superficie de área 40 dm² está flotando en agua.
a) ¿Qué fracción de su volumen sobresale del agua?
b) Si sobre esta plancha se coloca un niño de 35 kg, ¿cuál será ahora la fracción de volumen que sobresale? Densidad del poliestireno 300 kg/m³.

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre la plancha son el peso y el empuje. El valor del empuje viene dado por la expresión $E = r\,g\,V_{\text{sum}}$. Dibujamos el diagrama del sólido libre de la plancha.



Como la plancha está en equilibrio:

$$+\uparrow\ \sum F_y = 0 \qquad E - P = 0 \qquad \rho_{\text{agua}}\,g\,V_{\text{sum}} - \rho_{\text{poliestireno}}\,g\,V = 0$$

$$V_{\text{sumergido}} = V\frac{\rho_{\text{poliestireno}}}{\rho_{\text{agua}}};\ V - V_{\text{sumergido}} = V - V\frac{\rho_{\text{poliestireno}}}{\rho_{\text{agua}}} = V\left(1 - \frac{\rho_{\text{poliestireno}}}{\rho_{\text{agua}}}\right)$$

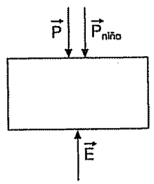
$$\frac{V - V_{\text{sumergido}}}{V} = \frac{V}{V}\left(1 - \frac{\rho_{\text{poliestireno}}}{\rho_{\text{agua}}}\right) = 1 - \frac{\rho_{\text{poliestireno}}}{\rho_{\text{agua}}}$$

Sustituimos y resulta:

$$\frac{V - V_{\text{sumergido}}}{V} = 1 - \frac{300}{1{,}00 \cdot 10^3} = 0{,}700;\ 70{,}0\ \%$$

Fracción de volumen emergente 70,0 %.

b) Ahora además del peso de la plancha habrá que considerar el peso del niño. Dibujamos el diagrama del sólido de la plancha.



$$+\uparrow\ \sum F_y = 0 \qquad E - P - P_{\text{niño}} = 0;\ \rho_{\text{agua}}\,g\,V_{\text{sum}} - P_{\text{niño}} - \rho_{\text{poliestireno}}\,g\,V = 0$$

Sustituimos:

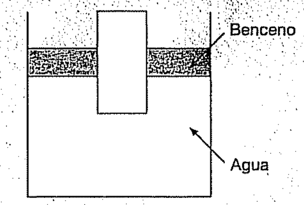
$$1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times V_{\text{sum}} - 35\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 300\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 0{,}40\ \text{m}^2 \times$$
$$\times\ 0{,}20\ \text{m} = 0;\ V_{\text{sum}} = 0{,}0590\ \text{m}^3$$

Sustituimos:

$$1 - \frac{V_{\text{sumergido}}}{V} = 1 - \frac{0{,}0590}{0{,}40\ \text{m}^2 \times 0{,}20\ \text{m}} = 0{,}262;\ 26{,}2\ \%$$

Fracción de volumen emergente 26 %

10.9. Un objeto prismático de 20 cm de altura y densidad $0{,}80 \cdot 10^3$ kg/m³ flota en un recipiente que contiene agua y una capa de benceno de 2,0 cm de espesor por encima del agua. ¿Qué altura emergerá de la fase líquida? Densidad del benceno $0{,}90 \cdot 10^3$ kg/m³.

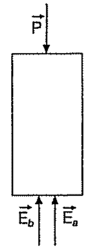


Solución

La parte sumergida en benceno es 2,0 cm, calcularemos la altura de la parte sumergida en agua, y de esta forma podremos saber la parte emergente.

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son el peso $\vec{P}$, el empuje debido al benceno, $\vec{E}_b$, y el empuje debido al agua, $\vec{E}_a$.

Como el objeto está en equilibrio tenemos:



$$+\uparrow\ \sum \vec{F}_i = 0 \qquad E_b + E_a - P = 0 \qquad (1)$$

Sea A el área de la base del prisma y h la altura de la parte sumergida en agua. Podemos escribir en (1):

$$0{,}90 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times A \times 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} + 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times A\,h -$$
$$-\ 0{,}80 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times A \times 0{,}20\ \text{m} = 0$$

$$0{,}90 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} + 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3\ h - 0{,}80 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 0{,}20\ \text{m} = 0$$
$$h = 0{,}142\ \text{m}$$

Como la altura del prisma es 0,20 m, la altura de la parte emergente, e, será:

$$e = 0{,}20\ \text{m} - 0{,}02\ \text{m} - 0{,}142\ \text{m} = 0{,}038\ \text{m}$$

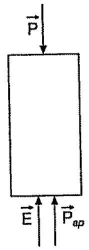
$$e = 4{,}0\ \text{cm}$$

10.10. Una pieza de cobre sumergida en agua tiene un peso aparente de 2,65 N y cuando está sumergida en un líquido de densidad $1{,}50 \cdot 10^3$ kg/m³ su peso aparente es 2,50 N. ¿Se trata de cobre puro o contiene algún otro componente? Densidad del cobre $8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³.

Solución

Recordemos que el peso aparente es la fuerza neta que un objeto ejerce sobre un dinamómetro o una balanza y que tiene el mismo módulo, la misma dirección y distinto sentido que la fuerza que ejerce el dinamómetro o la balanza sobre el objeto.

Calcularemos el peso y el volumen de la pieza. Las fuerzas que actúan sobre esta pieza son el peso, $\vec{P}$, el empuje, $\vec{E}$, y la fuerza, $\vec{F}_{ap}$, que ejerce el dinamómetro con el que se ha pesado la pieza (de sentido contrario al peso aparente). Representamos el diagrama del sólido libre de la pieza.



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad E + P_{ap} - P = 0$$

Sumergida en agua:

$$V \times 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81 + 2{,}65\ \text{N} - P = 0$$

Sumergida en el otro líquido:

$$V \times 1{,}50 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81 + 2{,}50\ \text{N} - P = 0$$

Al resolver este sistema resulta: $V = 3{,}058 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$, $P = 2{,}950\ \text{N}$
Si se trata de cobre puro su peso será:

$$P_{cobre} = 3{,}058 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 \times 8{,}9 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 2{,}669\ \text{N}$$

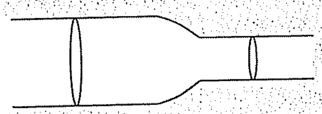
No se trata de cobre puro, contiene algún otro componente.

DINÁMICA DE FLUIDOS

10.11. Por una tubería circula agua, en un punto donde el diámetro de la sección transversal es de 8,0 cm la velocidad es 1,2 m/s. Determinar:

a) El caudal de volumen de esta cañería.

b) La velocidad en un punto donde el diámetro de la sección transversal es de 6,0 cm.



Solución

a) El caudal de volumen.

El caudal que pasa por una tubería viene dado por la expresión:

$$Q = A\,v$$

Sustituyendo resulta:

$$Q = \pi\,(4{,}0 \cdot 10^{-2})^2 \times 1{,}2\ \text{m/s} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 6{,}0\ \text{L/s}$$

b) La velocidad en un punto donde el diámetro de la sección transversal es de 6,0 cm.

Aplicaremos la ecuación de continuidad.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\pi\,(4{,}0 \cdot 10^{-2})^2 \times 1{,}2\ \text{m/s} = \pi\,(3{,}0 \cdot 10^{-2})^2 \times v_2 \qquad v_2 = 2{,}13\ \text{m/s}$$

$$v_2 = 2{,}1\ \text{m/s}$$

10.12. Un depósito de agua que está abierto tiene una boquilla cuya sección tiene un área de 0,78 dm² y que está situada 2,0 m por debajo de la superficie del agua. Determinar el caudal que sale por este orificio.

Solución

El caudal que sale por un orificio viene dado por la expresión:

$$Q = A\,v$$

La velocidad de salida según la ley de Torricelli es:

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Sustituyendo tenemos:

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 2{,}0\ \text{m}} = 6{,}26\ \text{m/s}$$

En la expresión del caudal tenemos:

$$Q = 0{,}78 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 \times 6{,}26\ \text{m/s} = 0{,}0488\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0{,}049\ \text{m}^3/\text{s}$$

10.13. En una casa entra el agua por una tubería de 50 mm de diámetro a una velocidad de 0,40 m/s y una presión absoluta de 400 kPa. En el tercer piso el diámetro de la cañería es de 20 mm. Determinar en un punto del tercer piso situado a 12 m del punto de entrada del agua:

a) La velocidad del agua.

b) La presión absoluta.

Solución

a) La velocidad del agua.

Aplicaremos la ecuación de continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

$$\pi\left(\frac{50 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{2}\right)^2 \times 0{,}40\ \text{m/s} = \pi\left(\frac{20 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{2}\right)^2 v_2 \qquad v_2 = 2{,}5\ \text{m/s}$$

$$v_2 = 2{,}5\ \text{m/s}$$

b) La presión absoluta.

Además de la velocidad del agua se modifica la presión y la altura de la cañería. Aplicaremos la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \rho\,g\,h_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 = P_2 + \rho\,g\,h_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2$$

Tomaremos como punto de referencia para las alturas el punto de entrada del agua al edificio, por tanto, $h_1 = 0$. Sustituimos en la ecuación de Bernoulli:

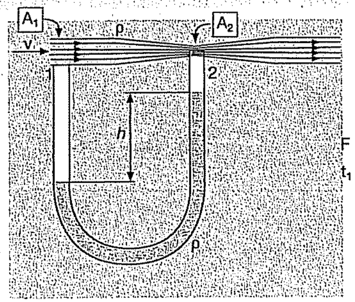
$$400 \cdot 10^3 \text{ Pa} + \frac{1}{2}\, 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \, (0{,}40 \text{ m/s})^2 = P_2 + 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 12 \text{ m} +$$
$$+ \frac{1}{2}\, 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \, (2{,}5 \text{ m/s})^2; \; P_2 = 2{,}79 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = 2{,}8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

10.14. La figura muestra un contador de Venturi o venturímetro que es un aparato destinado a la medida de velocidades de fluidos que circulan por tuberías. Consiste en un tubo que se intercala en la tubería, tiene el mismo diámetro que ésta, se va estrechando de forma gradual y luego tiene un aumento, la sección también gradual para evitar la formación de remolinos y de esta forma el flujo sea estacionario. En el estrechamiento hay un aumento de velocidad y una disminución de presión. Mediante un manómetro se mide la diferencia de presión entre la parte ancha y la parte estrecha del tubo.

a) Hallar la expresión que nos permite calcular la velocidad del fluido que circula por la cañería en función de las respectivas áreas de las secciones normales del venturímetro, A_1 y A_2, la diferencia de presiones, P_1-P_2, de las ramas del manómetro.

b) Se conecta a una tubería un venturímetro cuya área de la sección ancha es 730 cm² y la de la sección estrecha es 182 cm², la diferencia de alturas de las ramas del manómetro que contiene mercurio es de 96 mm. Calcular la velocidad del agua en la sección ancha y en la sección estrecha y el caudal de la tubería. Densidad del mercurio $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³.



Solución

a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli teniendo en cuenta que, como el tubo es horizontal, h_1 es igual que h_2.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como tenemos dos incógnitas v_1 y v_2, para relacionarlas, aplicamos la ley de continuidad:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Sustituimos en la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

Reagrupamos términos:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) = P_1 - P_2$$

Aislamos v_1:

$$v_1^2 = \frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)} \qquad v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}}$$

b) La velocidad del agua en la cañería y el caudal.

Aplicaremos la expresión que hemos obtenido. La diferencia de presiones nos la da el manómetro y vale:

$$P_1 - P_2 = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 \times 0{,}096 \text{ m} = 1{,}28 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Sustituimos en la expresión que hemos obtenido:

$$v_1 = 182 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{2 \times 1{,}28 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \left((730 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)^2 - (182 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)^2\right)}} = 0{,}353 \text{ m/s}$$

Para calcular v_2 aplicaremos la ecuación de continuidad:

$$0{,}353 \text{ m/s} \times 730 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = v_2 \times 182 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \qquad v_2 = 1{,}41 \text{ m/s}$$

El caudal es $Q = Av$.

$$Q = 0{,}353 \text{ m/s} \times 730 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0{,}0257 \text{ m}^3\text{/s}$$

$$v_1 = 0{,}35 \text{ m/s} \qquad v_2 = 1{,}4 \text{ m/s} \qquad Q = 26 \text{ L/s}$$

10.15. Una placa metálica de 0,24 m² de área se desliza sobre una superficie recubierta de una capa de aceite de 3,0 mm de espesor. ¿Qué fuerza es necesaria para mantener una velocidad constante de 0,10 m/s? Viscosidad de este aceite 0,010 Pa · s.

Solución

Supondremos que la capa de aceite que está en contacto con la superficie está en reposo y que la velocidad varía linealmente con la separación de las placas. Aplicaremos la expresión:

$$F = \mu \frac{Av}{y}$$

Sustituimos y resulta:

$$F = 0{,}010\ \text{Pa} \cdot \text{s}\ \frac{0{,}24\ \text{m}^2 \times 0{,}10\ \text{m/s}}{3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \qquad F = 0{,}080\ \text{N}$$

$$F = 8{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$$

10.16. El aceite de un motor pasa por un tubo de 0,90 mm de radio y una longitud de 55 mm, siendo $4{,}0 \cdot 10^3$ Pa la diferencia de presión entre los extremos del tubo. ¿Cuál es el caudal de este tubo? Viscosidad del aceite 0,20 Pa · s.

Solución

Como el flujo es laminar podemos aplicar la ecuación de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\ \mu L}(P_1 - P_2)$$

$$Q = \frac{\pi (0{,}90 \cdot 10^{-3}\ \text{m})^4}{8 \times 0{,}20\ \text{Pa} \cdot \text{s} \times 55 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} \times 4{,}0 \cdot 10^3\ \text{Pa} \qquad Q = 9{,}36 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0{,}094\ \text{mL/s}$$

CUESTIONES

ESTÁTICA DE FLUIDOS

10.1. Una unidad de presión muy utilizada en meteorología es el bar, si expresamos 2 Pa en milibar, obtendremos un valor de:

a) 200 milibar *b)* 0,02 milibar *c)* 1,013 milibar *d)* 0,050 milibar

10.2. Un vaso está lleno de agua, la presión manométrica en su superficie es cero y en el fondo es P. Otro vaso que tiene una altura tres veces mayor y un diámetro doble también está lleno de agua. La presión manométrica en el fondo de este segundo vaso es:

a) P *b)* 2 P *c)* 6 P *d)* 3 P

10.3. Suponiendo que la densidad del aire no variase con la altura y que tuviera un valor constante de 1,25 kg/m³, el espesor de la atmósfera terrestre sería:

a) No se puede calcular. *b)* 10,5 km *c)* 760 mm *d)* 8,24 km

10.4. Según el principio de Pascal, la presión en cualquier punto de un líquido encerrado en un recipiente:

a) Depende únicamente de la densidad del líquido.

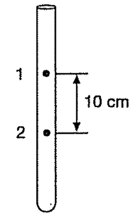
b) Es igual al peso del líquido.

c) Es la misma que en todos los puntos.

d) Experimenta la misma variación cuando se aplica una presión exterior.

10.5. El tubo de la figura contiene agua. La presión manométrica en el punto 1 es igual a $4{,}0 \cdot 10^2$ Pa. La presión manométrica en el punto 2 es:

a) $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa *b)* $5{,}0 \cdot 10^2$ Pa *c)* 1,4 k Pa *d)* 7,10 kPa



10.6. Un tubo en U tiene agua que llega a la misma altura h en las dos ramas. El área de la sección transversal de la rama de la derecha es A_1 y el área de la sección transversal de la rama de la izquierda es A_2. Se vierte aceite (no se mezcla con el agua) de densidad 0,83 g/cm³ en la rama de la derecha. Cuando se alcanza el equilibrio:

a) El nivel en las dos ramas será el mismo.

b) El nivel en la rama de la derecha será mayor que en la rama de la izquierda.

c) El nivel en la rama de la derecha será menor que en la rama de la izquierda.

d) La diferencia de niveles depende de A_1 y A_2.

10.7. Una cámara en la que se ha hecho el vacío tiene una puerta cuadrada de 0,50 m de lado. Si la presión atmosférica es de $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, para abrir esta puerta hará falta hacer una fuerza de:

a) $1{,}0 \cdot 10^5$ N *b)* 25 kN *c)* $5{,}0 \cdot 10^4$ N *d)* 35 kN

10.8. Un objeto que está flotando en un líquido de densidad relativa 1,20 desplaza un volumen de 150 cm³ de líquido, la masa de este objeto es:

a) No se puede calcular, faltan datos. *c)* 180 g
b) 1,77 kg *d)* 69 g

10.9. Un objeto homogéneo y macizo se encuentra totalmente sumergido en un líquido y en equilibrio. No toca al fondo. Podemos afirmar:

a) La densidad del objeto es igual que la densidad del líquido.
b) La densidad del objeto es menor que la densidad del líquido.
c) La densidad del objeto es mayor que la densidad del líquido.
d) Esto no es posible, un objeto sumergido en un líquido siempre se hunde o flota.

10.10. Colocamos en un recipiente que contiene agua una esfera de plomo de masa 40 g, volumen igua a 20 cm³. Densidad del plomo $8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³. Podemos afirmar:

a) La esfera se hundirá.
b) Esta esfera no es hueca.
c) Flotará en el agua.
d) Es una esfera hueca y se hundirá.

10.11. Un objeto homogéneo de 200 cm³ de volumen está suspendido de un dinamómetro. El dina mómetro marca 2,46 N. Se sumerge el objeto totalmente en agua. El dinamómetro marc entonces:

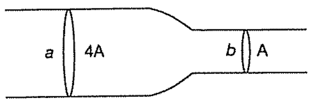
a) 1,96 N *b)* 2,26 N *c)* 0,498 N *d)* 0

10.12. Un bloque de madera está flotando, en equilibrio y sumergido parcialmente en agua. Col gamos de la parte inferior del bloque una placa de material desconocido, observamos que e volumen de la parte sumergida del bloque no se altera. Podemos concluir que la densidad d la placa es:

a) Mayor que la del agua. *c)* Igual a la del bloque.
b) Igual a la del agua. *d)* Menor que la del bloque.

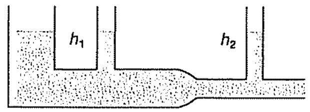
DINÁMICA DE FLUIDOS

10.13. En un punto *a* de una cañería el área de la sección normal es 4*A*, en otro punto b es *A*. La vel cidad v_a en el punto *a* es:



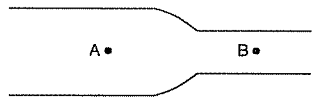
a) v_b *b)* $4v_b$ *c)* $2v_b$ *d)* $\frac{v_b}{4}$

10.14. Por la cañería horizontal de la figura circula un fluido ideal no viscoso. Si designamos por h_1 la altura que alcanza el fluido en el tubo vertical 1 y por h_2 la altura que alcanza en el tubo vertical 2, se cumple:



a) $h_1 = h_2$
b) No se puede comparar las alturas h_1 y h_2, ya que no conocemos la velocidad del fluido en los distintos puntos.
c) $h_1 > h_2$
d) $h_1 < h_2$

10.15. Por el tubo de la figura circula una corriente de gas. Podemos afirmar que:



a) La presión en el punto A es menor que la presión en el punto B.
b) Las presiones en los puntos A y B son iguales.
c) La presión en el punto A es mayor que la presión en el punto B.
d) Con los datos que disponemos no podemos comparar las presiones de A y de B.

10.16. Cuando vertemos suavemente aceite de automóvil de una botella observamos que le cuesta más resbalar que si vertemos agua, podemos pensar que esto es debido:

a) A que el agua es más densa que el aceite.
b) A que el aceite es más viscoso que el agua.
c) Es un efecto óptico debido a la diferencia de color.
d) A que la presión atmosférica influye más sobre el agua.

10.17. Un fluido real circula por un tubo de sección circular en régimen laminar, si no se modifica la presión entre los extremos del tubo y el radio del tubo se reduce a la mitad, el caudal:

a) Se reduce a la mitad.
b) No varía.
c) Se reduce a la cuarta parte.
d) Se reduce a la dieciseisava parte.

SOLUCIONES

10.1. *b)*	**10.7.** *b)*	**10.13.** *d)*
10.2. *d)*	**10.8.** *c)*	**10.14.** *c)*
10.3. *d)*	**10.9.** *a)*	**10.15.** *c)*
10.4. *d)*	**10.10.** *c)*	**10.16.** *b)*
10.5. *c)*	**10.11.** *c)*	**10.17.** *d)*
10.6. *b)*	**10.12.** *b)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

ESTÁTICA DE FLUIDOS

1 **Se tiene una disolución densidad 1,82 g/cm^3. ¿Qué volumen de agua habrá que mezclar con 1,29 L de esta disolución para obtener otra disolución de densidad 1,51 g/cm^3? Suponer que al mezclar las disoluciones los volúmenes son aditivos.**

Sol.: 784 cm^3

2 **Una unidad de presión es el mm de mercurio que es la presión que ejerce sobre el fondo una columna de mercurio de 1 mm de altura. Una atmósfera equivale a 760 mm de mercurio. A partir de este dato deducir la equivalencia entre atmósferas y pascales. La densidad del mercurio es de 13,6 · 10^3 kg/m^3.**

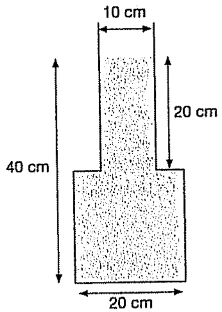
Sol.: 1 atm = 101 kPa

3 **El recipiente de la figura tiene una base cuadrada 20 cm de lado y contiene agua hasta una altura de 40 cm. La parte superior también tiene una sección cuadrada de 10 cm de lado y una altura de 20 cm. Determinar:**

a) La presión absoluta y la presión manométrica sobre el fondo.

b) La fuerza sobre el fondo debida a la presión manométrica.

c) El peso del agua contenida en el recipiente, ¿coincide este valor con el obtenido en *b)*? La presión atmosférica es 1,01 · 10^5 Pa.



Sol.: a) 1,05 · 10^5 Pa, 3,92 kPa; *b)* 157 N; *c)* 98,1 N

4 **Si realizamos el experimento de Torricelli en lo alto de una montaña donde la presión atmosférica es igual 33,6 kPa, ¿qué altura alcanzará la columna de mercurio? Densidad del mercurio 13,6 · 10^3 kg/m^3. Suponer que la gravedad es igual a 9,81 m/s^2.**

Sol.: 252 mm

5 **Una balsa contiene agua hasta una altura de 1,80 m. Las dimensiones de una de las paredes es 2,50 m de base y 2,00 m de altura. ¿Cuál es la fuerza que hace el agua sobre esta pared?**

Sol.: 39,7 kN

6 **Un tubo en U contiene mercurio y agua. La diferencia de alturas de los niveles de mercurio en cada rama es de 10 mm. Se desea que los niveles de mercurio sean iguales en las dos ramas, para ello se añade aceite a la rama que contiene mercurio. ¿Qué altura alcanzará el aceite? Densidad del mercurio 13,6 · 10^3 kg/m^3; densidad del aceite 800 kg/m^3.**

Sol.: 17 mm

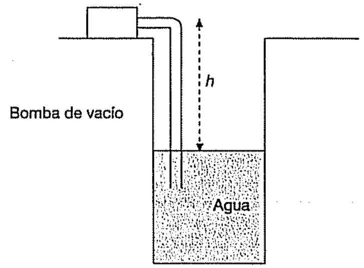
7 **En una prensa hidráulica la sección transversal del émbolo pequeño tiene un área de 60,0 cm^2 y la del émbolo grande es 800 cm^2. Se ejerce sobre el émbolo pequeño una fuerza de 870 N. Determinar:**

a) La presión en el émbolo pequeño y en el émbolo grande.

b) La fuerza que ejerce el émbolo grande.

Sol.: a) 145 kPa, 145 kPa; *b)* 11,6 kN

8 **Para sacar agua de los pozos puede utilizarse una bomba de vacío que al hacer el vacío en un tubo el agua asciende. Si la presión atmosférica es la normal, 1,01 · 10^5 Pa, ¿a qué altura podrá bombear el agua una bomba de este tipo? El sistema funciona de forma semejante a cuando succionamos una bebida de un vaso con un tubito.**



Sol.: 10,3 m

9 **Un globo de aire caliente tiene un volumen de 520 m^3. Si la densidad del aire del interior del globo es el 72 % de la del aire exterior, ¿qué carga podrá transportar este globo? Densidad del aire exterior 1,29 kg/m^3.**

Sol.: 1,84 · 10^3 N

10 **Un cubito de hielo flota en un vaso de agua. Determinar la fracción del volumen del cubito que sobresale del agua. Densidad del hielo 917 kg/m^3.**

Sol.: 8,30 %

11 **Un bloque de madera de volumen 36 cm^3 y densidad 7,5 · 10^2 kg/m^3 flota en el agua. Determinar:**

a) El peso de este bloque.

b) El peso del agua desalojada.

c) El volumen emergente.

Sol.: a) 0,26 N; *b)* 0,26 N; *c)* 9,0 cm^3

12 **La figura representa un densímetro que es un aparato que permite medir densidades relati vas, para ello se introduce en un líquido y el vástago se hunde más o menos según sea la den sidad del líquido donde se introduce. Sea un densímetro que tiene una masa de 12 g y u vástago cuya sección recta tiene un área de 0,15 cm². ¿Cuánto distarán las marcas del densí metro cuando se introduce en dos líquidos de densidades relativas 1,20 y 0,90, respectivamente'**

Sol.: 18 cm

13 **Una bola pesa en el aire 1,20 N, cuando se sumerge en agua tiene un peso aparente de 1,06 y sumergida en glicerina su peso aparente es de 1,03 N. ¿Cuál es la densidad de la glicerin**

Sol.: $1{,}21 \cdot 10^3$ kg/m³

DINÁMICA DE FLUIDOS

14 **Por una tubería de 30 cm de diámetro circula agua a una velocidad de 0,50 m/s.**

a) ¿Cuál es la velocidad de salida por una boquilla de 7,5 cm de diámetro situada en el extrem

b) ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar un depósito de 40 m³?

Sol.: a) 8,0 m/s; *b)* 19 min

15 **Por una boquilla de un depósito sale agua, esta boquilla que tiene una sección de ár 0,58 dm² está situada a 2,0 m por debajo de la superficie del agua y a 3,0 m por encima suelo. Determinar:**

a) El caudal de la boquilla.

b) La distancia del pie de la vertical que pasa por el punto de salida del agua por la boquilla alcanza el agua.

Sol.: a) 0,036 m³/s; *b)* 4,9 m

16 **Una manguera lanza un chorro de agua que cae a una distancia de 40 cm del pie de la ve cal que pasa por la boca de la manguera. Si el orificio de salida tiene una sección de á 1,9 dm² y se encuentra a una altura del suelo de 25 cm, ¿cuál es el caudal de esta manguer**

Sol.: 34 L/s

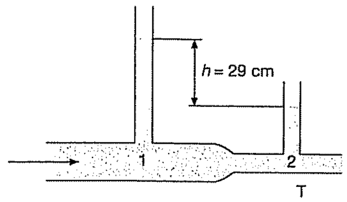
17 **Por una cañería de 14 cm de diámetro circula agua a una presión de 410 kPa. En un es chamiento en el que el diámetro es de 7,0 cm la presión se reduce a 140 kPa. Determin:**

a) La velocidad del agua en cada una de las dos zonas.

b) El caudal.

Sol.: a) $v_1 = 6{,}0$ m/s, $v_2 = 24$ m/s; *b)* 92 L/s

18 **Un venturímetro está formado por un tubo en forma de T de sección 10 veces menor que la de la tubería, como indica la figura. Se coloca también en el punto 1 de la tubería un tubo manométrico. La diferencia de alturas del líquido manométrico, que es agua, en los tubos 1 y 2 es de 29 cm. ¿Cuál es la velocidad del agua en la tubería?**



Sol.: 0,24 m/s

19 **Un disco de 0,50 kg y 0,040 m² de área se mueve sobre un cojín de aire de 1,0 mm de espesor.**

a) ¿Qué fuerza es necesaria aplicar para mantener una velocidad constante 0,20 m/s? Viscosidad del aire $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa · s.

b) ¿Qué fuerza sería necesaria para que este disco se moviese a velocidad constante sobre una superficie horizontal? Coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie 0,30.

c) De los resultados de las cuestiones anteriores, ¿se puede sacar alguna conclusión del porqué en los experimentos de Física se estudia el movimiento con móviles que se mueven sobre cojines de aire?

Sol.: a) 0,14 mN.

b) 1,5 N.

c) En un cojín de aire las fuerzas de fricción son muy pequeñas lo que permite aproximarse al movimiento uniforme y estudiar el efecto de una fuerza que se aplica al móvil.

20 **Un depósito abierto se llena con agua que cae desde la parte superior desde un tubo horizontal de 4,0 cm de radio y 20 m de longitud. El agua fluye por el tubo debido a la acción de una bomba que ejerce una presión manométrica de 1,4 kPa. El agua se vierte a un depósito abierto al aire. Suponiendo flujo laminar, calcular el caudal de este tubo. Viscosidad del agua $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Pa · s.**

Sol.: 70 L/s

21 **Una habitación de 432 m³ tiene un sistema de aire acondicionado en el que el tubo que envía el aire al exterior tiene una longitud de 17,5 m y un radio de 5,5 cm. ¿Qué tiempo tardará en renovar todo el aire, si la bomba ejerce una presión manométrica de 72 Pa? Viscosidad del aire $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa · s**

Sol.: 8,8 min

CAPÍTULO

11 MOVIMIENTO OSCILATORIO

11.1. MOVIMIENTO OSCILATORIO

Los *movimientos oscilatorios* o *movimientos vibratorios* se caracterizan por ser movimientos periódicos en torno a una posición de equilibrio. En la naturaleza existen una gran variedad de movimientos oscilatorios como, por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo, la vibración de los átomos de un sólido, el latido del corazón, etc.

En el presente capítulo se estudiarán tres tipos de movimientos oscilatorios: el movimiento armónico simple, el movimiento armónico amortiguado y las oscilaciones forzadas.

11.2. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

CARACTERÍSTICAS DEL MAS

El *movimiento armónico simple* es un movimiento oscilatorio que presenta las siguientes características:

1) Cuando se aparta una partícula de su posición de equilibrio aparece una fuerza recuperadora proporcional a la distancia x que dicha partícula se ha separado del equilibrio.

$$F = -kx$$

La fuerza recuperadora tiene sentido opuesto al desplazamiento, es decir, para valores de $x > 0$ $F < 0$, y viceversa.

2) Los efectos de la fricción en el movimiento de la partícula son despreciables.

La distancia x a la que se encuentra la partícula de la posición de equilibrio es la *elongación*, y en el sistema internacional de unidades (SI) se expresa en metros.

La constante de proporcionalidad k es la *constante recuperadora*. En el SI se expresa en N/m.

En el Capítulo 4 se mencionó que la fuerza que ejercen los muelles es del tipo $F = -kx$, en consecuencia las oscilaciones que experimentan los objetos unidos a muelles en ausencia de rozamiento son armónicas simples.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a una partícula de masa m, sometida a una fuerza resultante del tipo $F = -kx$,

$$F_{res} = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

se obtiene la ecuación diferencial del movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

La solución de esta ecuación diferencial nos da la expresión de la variación temporal de la elongación y es del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Donde A es la *amplitud del movimiento* o valor máximo de la elongación, en el SI se expresa en metros (m).

$\omega t + \delta$ es la *fase*, en el SI se expresa en radianes (rad).

ω es la *frecuencia angular* o *pulsación*, su valor viene dado por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y en el SI se expresa en rad/s, o lo que es equivalente, s^{-1}.

δ *es la constante de fase*, su valor depende de las condiciones iniciales del movimiento y en el SI se expresa en radianes.

Se dice que una partícula realiza una oscilación cuando partiendo de un punto vuelve a él moviéndose en el mismo sentido.

El *periodo* T del movimiento es el tiempo que la partícula tarda en realizar una oscilación completa vine dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En el SI el periodo se expresa en segundos (s).

La *frecuencia del movimiento* f es el número de oscilaciones que se producen en un segundo y se expresa en hertz (Hz).

La velocidad de la partícula se puede hallar derivando la ecuación de la elongación respecto a tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

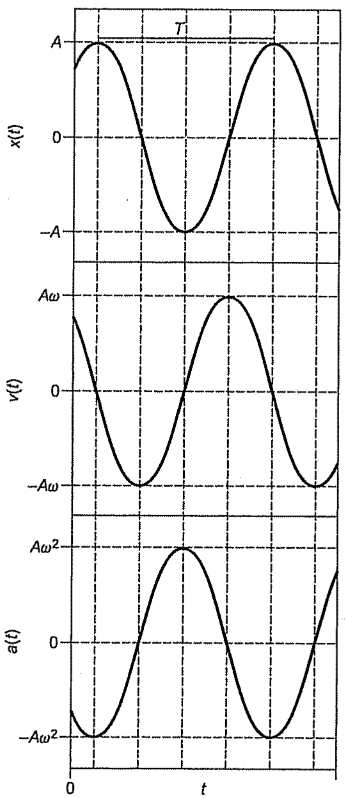
El valor máximo de la velocidad es $A\omega$.

La aceleración se obtiene realizando la derivada temporal de la velocidad.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

El valor máximo de la aceleración es $A\omega^2$.

En la gráfica se comparan las gráficas de la elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo. Se observa que la velocidad de la partícula alcanza su valor máximo cuando la partícula pasa por el punto de equilibrio, y es cero en los puntos de elongación máxima. Por otro lado, se constata que la aceleración es máxima en los puntos de elongación máxima y el signo de la aceleración es en todo momento opuesto al de la elongación.



ENERGÍA DEL MAS

Los aspectos energéticos del MAS han sido, en gran parte, tratados en el Capítulo 5. Allí se demostró que la energía potencial elástica viene dada por:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

En un MAS la energía mecánica se conserva ya que no hay pérdidas por fricción. En consecuencia, en cualquier instante de tiempo:

$$E_m = E_c + U = ct$$

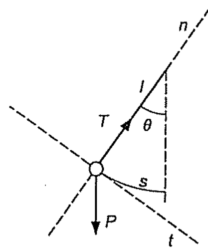
En los puntos extremos de la oscilación ($x = \pm A$), la velocidad de la partícula es cero. En estos puntos la energía potencial es $U(x = \pm A) = \frac{1}{2}kA^2$ y coincide con la energía mecánica. Así pues, puede escribirse para cualquier instante de tiempo:

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2}kA^2$$

EL PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple consta de una masa puntual m suspendida de un hilo inextensible de longitud l de masa despreciable. Cuando se aparta el péndulo de la posición de equilibrio y se libera, éste efectúa un movimiento oscilatorio. Vamos a demostrar que para oscilaciones pequeñas este movimiento puede considerarse un movimiento armónico simple.

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m en dirección tangente a su trayectoria se obtiene:



$$+\searrow \quad \Sigma F_{it} = ma_t \qquad mg\,\text{sen}\,\theta = -m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Donde s es la longitud del arco de circunferencia $s = l \cdot \theta$.

$$g\,\text{sen}\,\theta = -l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

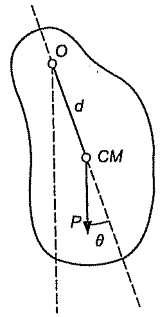
Para oscilaciones pequeñas se puede aproximar sen $\theta \approx \theta$, y entonces la ecuación anterior queda:

$$-\frac{g}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La cual es formalmente idéntica a la ecuación de un MAS con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. En consecuencia, para oscilaciones pequeñas, el periodo de un péndulo simple es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

EL PÉNDULO FÍSICO



Un péndulo físico es cualquier sólido de masa m que se suspende por un punto O que no coincida con su centro de gravedad. Supondremos que el sólido no es muy extenso de forma que su centro de gravedad (CG) y su centro de masas (CM) coinciden. Cuando el sólido se aparta de su posición de equilibrio realiza un movimiento oscilatorio. Como veremos a continuación este movimiento, para oscilaciones pequeñas, puede aproximarse por un movimiento armónico simple.

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación, tenemos:

$$+\odot \quad \tau_{z\,res} = I_z\alpha \qquad -mgd \operatorname{sen}\theta = I_O\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

donde d es la distancia del centro de masas al punto O e I_O es el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al papel que pasa por O.

Para oscilaciones pequeñas se puede aproximar sen $\theta \approx \theta$, y entonces la ecuación anterior queda:

$$-\frac{mgd}{I_O}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La cual es formalmente idéntica a la ecuación de un MAS con $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}$. En consecuencia, para oscilaciones pequeñas, el periodo de un péndulo físico es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

11.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

Una partícula de masa m realiza un *movimiento armónico amortiguado* cuando al apartarla de la posición de equilibrio:

1) Aparece una fuerza recuperadora proporcional a la distancia x que la partícula se ha separado del equilibrio.

$$F = -kx$$

2) Actúa sobre la partícula una fuerza de rozamiento de tipo viscoso que en todo momento es proporcional a la velocidad de la partícula.

$$F_r = -bv$$

b es la *constante de proporcionalidad* entre la fuerza de rozamiento y la velocidad. En el SI b se expresa en kg/s.

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula:

$$F_{res} = ma$$

$$-kx - bv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Se obtiene la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

La cual también puede expresarse como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

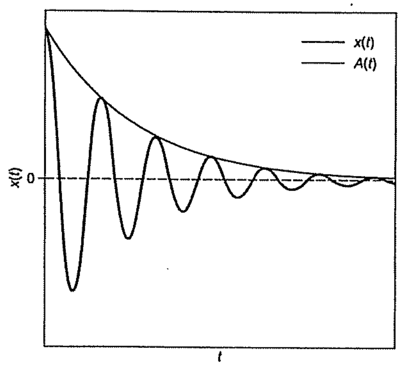
Donde $\tau = \frac{m}{b}$ es la *constante de tiempo* del movimiento (en el SI se expresa en segundos), y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la *frecuencia natural* del sistema o la frecuencia del oscilador sin fricción.

El producto de la constante de tiempo por la frecuencia natural del sistema recibe el nombre de factor de calidad Q. El *factor de calidad* es un número adimensional

$$Q = \tau \cdot \omega_0 = \frac{m\omega_0}{b}$$

en función del cual se distinguen tres tipos de movimientos amortiguados.

Para valores de $Q > \frac{1}{2}$, el sistema se encuentra *subamortiguado*, la solución de la ecuación (1) es del tipo:



$$x(t) = A_0e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta) = A_0e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega t + \delta)$$

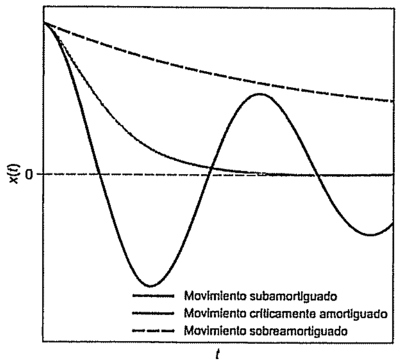
donde:

A_0 es la *amplitud inicial* de la oscilación, ω es la *frecuencia angular de la oscilación*, y se expresa como:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

Como muestra la gráfica, en este caso la amplitud de la oscilación decrece exponencialmente $A(t) = A_0e^{-\frac{t}{2\tau}}$, y el sistema vuelve al punto de equilibrio oscilando.

La energía mecánica de este sistema decae como el cuadrado de la amplitud:



$$E_m = \frac{1}{2}k[A(t)]^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\,e^{-\frac{b}{m}t}$$

Cuando el factor de calidad $Q = \frac{1}{2}$, el sistema se encuentra *críticamente amortiguado* y vuelve al punto de equilibrio sin oscilar.

Para valores de $Q < \frac{1}{2}$, el sistema se encuentra *sobreamortiguado* y vuelve al punto de equilibrio sin oscilar pero más lentamente que en el caso de amortiguamiento crítico.

11.4. OSCILACIONES FORZADAS

CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO OSCILATORIO FORZADO

Una partícula de masa m realiza una *oscilación forzada* cuando además de una fuerza recuperadora $F = -kx$ y una fuerza de rozamiento $F_r = -bv$, actúa sobre ella una fuerza impulsora periódica.

Vamos a suponer que la fuerza impulsora varía senoidalmente con el tiempo según la expresión: $F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$. Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula queda:

$$F_{res} = ma$$

$$-kx - bv + F_0 \cos(\omega_F t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Reordenando los términos de la expresión anterior se obtiene la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio forzado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_F t)$$

La cual escrita en función de la constante de tiempo τ, y la frecuencia natural de la oscilación ω_0 queda como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_F t)$$

La solución de la ecuación anterior puede expresarse mediante la suma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Donde $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$, que coincide con la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado estudiado en el apartado anterior $x_p(t)$ es una solución particular.

Como ya se ha visto, la solución homogénea $x_h(t)$ acaba extinguiéndose con el tiempo, por lo que una vez finalizado el transitorio, en el régimen estacionario, únicamente prevalece la solución particular $x_p(t)$. Dicha solución, no depende de las condiciones iniciales del movimiento y viene dada por

$$x_p(t) = A\cos(\omega_F t - \alpha)$$

Siendo A la amplitud del movimiento:

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2}} \qquad (2$$

Y α el desfase de la fuerza impulsora respecto a la elongación:

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\omega_F/\tau}{\omega_0^2 - \omega_F^2}\right] \qquad (3$$

En resumen, una vez alcanzado el régimen estacionario, la oscilación forzada se produce con un frecuencia igual a la de la fuerza impulsora y retrasada un ángulo α respecto a la fuerza.

RESONANCIA

Obsérvese que tanto la amplitud del movimiento (ecuación (2)) como el desfase (ecuación (3)) dependen de la frecuencia de la fuerza impulsora.

Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora y la frecuencia natural del sistema son muy distintas ($\omega_F \gg \omega_0$ o $\omega_F \ll \omega_0$) la amplitud del movimiento es pequeña, en cambio para valores de $\omega_F \approx \omega_0$ la amplitud de oscilación crece hasta hacerse máxima. Este crecimiento drástico de la amplitud de oscilación se denomina *resonancia*. En la resonancia el desfase entre la fuerza impulsora y la elongación es cercano a $\pi/2$.

La frecuencia de la fuerza impulsora ω_F para la cual el sistema entra en resonancia se puede determinar calculando el valor de ω_F que maximiza la expresión de la amplitud, es decir, hallando el valor de ω_F para el cual:

$$\frac{dA}{d\omega_F} = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1. Una partícula realiza un movimiento armónico simple. La posición de la partícula cambia con el tiempo según la expresión $x(t) = 3{,}0 \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, dada en unidades del sistema internacional. Determinar:

a) La amplitud, el periodo y la constante de fase de este movimiento.

b) La elongación en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25 s, 0,50 s y 0,75 s.

c) La velocidad en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25 s, 0,50 s y 0,75 s.

d) La aceleración en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25 s, 0,50 s y 0,75 s.

Solución

a) En un movimiento armónico simple la ecuación de la elongación en función del tiempo es del tipo $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, siendo A la amplitud, ω la frecuencia angular y δ la constante de fase. Identificando términos con la expresión dada en el enunciado del problema se obtiene:

$$A = 3{,}0 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi \text{ rad/s, y por tanto el periodo es } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1{,}00 \text{ s.}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

b) Sustituyendo el tiempo en la expresión $x(t) = 3{,}0 \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$x(t = 0{,}0 \text{ s}) = 3{,}0 \cdot \cos\left(0{,}0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m} \qquad x(t = 0{,}0 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m}$$

$$x(t = 0{,}25 \text{ s}) = 3{,}0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = -3{,}00 \text{ m} \qquad x(t = 0{,}25 \text{ s}) = -3{,}0 \text{ m}$$

$x(t = 0{,}50 \text{ s}) = 3{,}0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m} \qquad x(t = 0{,}50 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m}$

$x(t = 0{,}75 \text{ s}) = 3{,}0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}75 + \frac{\pi}{2}\right) = 3{,}00 \text{ m} \qquad x(t = 0{,}75 \text{ s}) = 3{,}0 \text{ m}$

c) La ecuación de la velocidad en función del tiempo se obtiene derivando la expresión de la elongación respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -3{,}0 \cdot 2\pi \cdot \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -6{,}0 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sustituyendo el tiempo en la expresión anterior:

$v(t = 0{,}0 \text{ s}) = -6{,}0 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = -6{,}0 \cdot \pi = -18{,}8 \text{ m/s} \qquad v(t = 0{,}0 \text{ s}) = -19 \text{ m/s}$

$v(t = 0{,}25 \text{ s}) = -6{,}0 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m/s} \qquad v(t = 0{,}25 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m/s}$

$v(t = 0{,}50 \text{ s}) = -6{,}0 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 0{,}50 + \frac{\pi}{2}\right) = 6{,}0 \cdot \pi = 18{,}8 \text{ m/s} \qquad v(t = 0{,}50 \text{ s}) = 19 \text{ m/s}$

$v(t = 0{,}75 \text{ s}) = -6{,}0 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 0{,}75 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m/s} \qquad v(t = 0{,}75 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m/s}$

d) La ecuación de la aceleración en función del tiempo se obtiene derivando la expresión de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -3{,}0 \cdot (2\pi)^2 \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sustituyendo el tiempo en la expresión anterior:

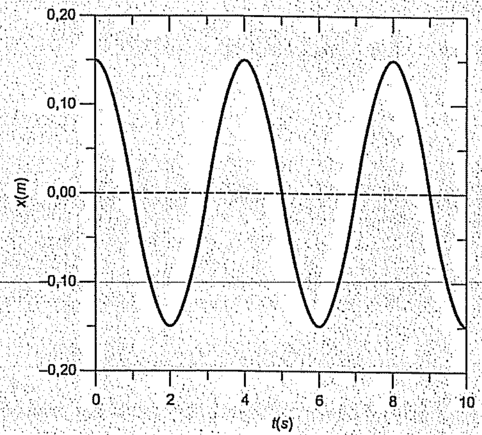
$a(t = 0{,}0 \text{ s}) = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = -12 \cdot \pi^2 = -118 \text{ m/s}^2 \qquad a(t = 0{,}0 \text{ s}) = -120 \text{ m/s}^2$

$a(t = 0{,}25 \text{ s}) = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m/s}^2 \qquad a(t = 0{,}25 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m/s}^2$

$a(t = 0{,}50 \text{ s}) = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}50 + \frac{\pi}{2}\right) = 12 \cdot \pi^2 = 118 \text{ m/s}^2 \qquad a(t = 0{,}50 \text{ s}) = 120 \text{ m/}$

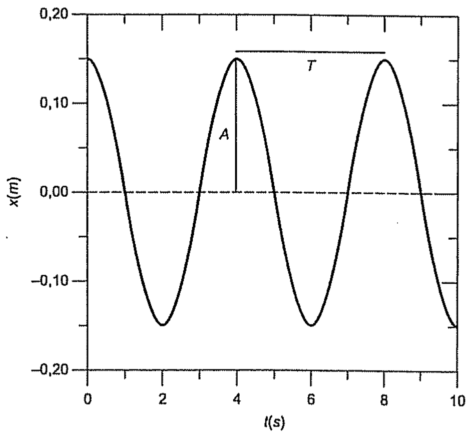
$a(t = 0{,}75 \text{ s}) = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 0{,}75 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}00 \text{ m/s}^2 \qquad a(t = 0{,}75 \text{ s}) = 0{,}0 \text{ m/s}^2$

11.2. La gráfica de la elongación de un oscilador armónico simple en función del tiempo es:



Determinar la ecuación de la elongación en función del tiempo.

Solución



La amplitud A del movimiento es la distancia máxima que alcanza el oscilador respecto al punto de equilibrio. En la gráfica se puede leer que $A = 0{,}15$ m.

El periodo del movimiento es el tiempo que el sistema tarda en realizar una oscilación completa. El periodo se puede leer directamente de la gráfica: $T = 4{,}0$ s. En consecuencia, la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4{,}0 \text{ s}} = \frac{\pi}{2}$ rad/s.

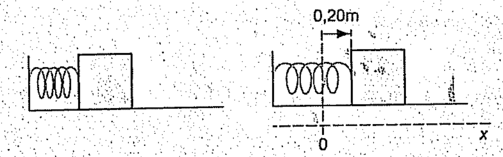
La ecuación de la elongación en función del tiempo (en unidades del SI) será del tipo:

$$x(t) = 0{,}15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \delta\right)$$

Este oscilador, en el instante inicial $t = 0$ se encuentra en $x = A = 0{,}15$ m, en consecuencia, $\delta = 0$.
La ecuación de la elongación quedará:

$$x(t) = 0{,}15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

11.3. Un bloque de 1,0 kg descansa sobre un plano horizontal sin fricción, unido a un muelle de constante recuperadora $k = 100$ N/m. Se separa el bloque 0,20 m del punto de equilibrio y se deja oscilar el sistema. Determinar la ecuación de la elongación en función del tiempo.



Solución

Si el bloque se libera en $x = 0{,}20$ m con velocidad inicial nula, el sistema oscilará en torno a $x = 0$ con amplitud $A = 0{,}20$ m.

La frecuencia angular de la oscilación es $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N/m}}{1{,}0 \text{ kg}}} = 10$ rad/s.

Entonces, la ecuación de la elongación en función del tiempo (en unidades del SI) es:

$$x(t) = 0{,}20 \cos (10t + \delta)$$

La constante de fase δ se determina a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Nosotros consideraremos que en $t = 0$ el bloque se encuentra en $x = 0{,}20$ m y, en consecuencia, δ será cero.
La posición del bloque en función del tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = 0{,}20 \cos (10t)$$

11.4. Un bloque de masa 0,20 kg oscila sobre una superficie horizontal sin fricción unido a un muelle de constante recuperadora $k = 500$ N/m. La amplitud del movimiento es $A = 0{,}35$ m, y se empieza a contar el tiempo cuando se encuentra en $x = 0$, moviéndose hacia valores positivos de x. Determinar:

a) La ecuación de la elongación en función del tiempo.

b) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración, así como los puntos en que se registran estos valores máximos.

Solución

a) La elongación viene dada por una expresión del tipo: $x(t) = A \cos (\omega t + \delta)$.

Según dice el enunciado, la amplitud del movimiento es $A = 0{,}35$ m.

La frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500 \text{ N/m}}{0{,}20 \text{ kg}}} = 50$ rad/s.

En consecuencia, la elongación en unidades del SI vendrá dada por:

$$x(t) = 0{,}35 \cos (50t + \delta) \qquad (1)$$

Si en $t = 0$, el bloque se encuentra en $x = 0$, sustituyendo en (1) se obtiene,

$$x(t) = 0{,}35 \cos (\delta) = 0$$

por lo que δ podría tomar valores igual a $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$. Como el bloque se encuentra moviéndose hacia valores de x positivos, su velocidad en $x = 0$ deberá ser positiva. La ecuación de la velocidad en función del tiempo se obtiene haciendo la derivada temporal de la elongación:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}35 \cdot 50 \cdot \text{sen}\,(50t + \delta) = -17{,}5 \cdot \text{sen}\,(50t + \delta)$$

$$\text{para } t = 0,\ v(t = 0 \text{ s}) = -17{,}5 \cdot \text{sen}\,(\delta) \qquad (2)$$

Sustituyendo $\delta = \frac{\pi}{2}$ en (2) se obtiene $v(t = 0 \text{ s}) = -17{,}5$ m/s < 0, y sustituyendo $\delta = -\frac{\pi}{2}$ en (2) se obtiene $v(t = 0 \text{ s}) = 17{,}5$ m/s > 0.

En consecuencia el valor de δ que satisface las condiciones del enunciado es $-\frac{\pi}{2}$, y la ecuación de la elongación queda:

$$x(t) = 0{,}35 \cos\left(50t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3)$$

b) La ecuación de la velocidad en función del tiempo es (en unidades del SI):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -17{,}5 \cdot \text{sen}\left(50t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La función seno oscila entre -1 y 1, en consecuencia la velocidad variará entre los valores extremos $-17{,}5$ m/s y 17,5 m/s. El signo menos indica que el vector velocidad es hacia la izquierda y el más indica que es hacia la derecha.

Los instantes en que sen $\left(50t - \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ son aquellos en que el argumento cumple:

$$50t - \frac{\pi}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{con } n = 0, 1, 2...$$

Despejando el tiempo:

$$t = \frac{(n + 1)\pi}{50} \qquad \text{con } n = 0, 1, 2...$$

En estos instantes de tiempo el bloque se encuentra en:

$$x(t) = 0{,}35 \cos\left(50\frac{(n + 1)\pi}{50} - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}35 \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \qquad n = 0, 1, 2...$$

Resumiendo, el valor máximo de la velocidad es $|v_{máx}| = 17{,}5$ m/s y se consigue cuando el bloque pasa por el origen de coordenadas.

La expresión de la aceleración en función del tiempo se obtiene haciendo la derivada temporal de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -875 \cdot \cos\left(50t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La función coseno toma valores entre -1 y 1, en consecuencia, la aceleración oscilará entre 875 m/s^2 y -875 m/s^2. Esto ocurrirá en los instantes en que $\cos\left(50t - \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$, es decir, cuando el argumento sea:

$$50t - \frac{\pi}{2} = n\pi \qquad \text{con } n = 0, 1, 2...$$

despejando el tiempo:

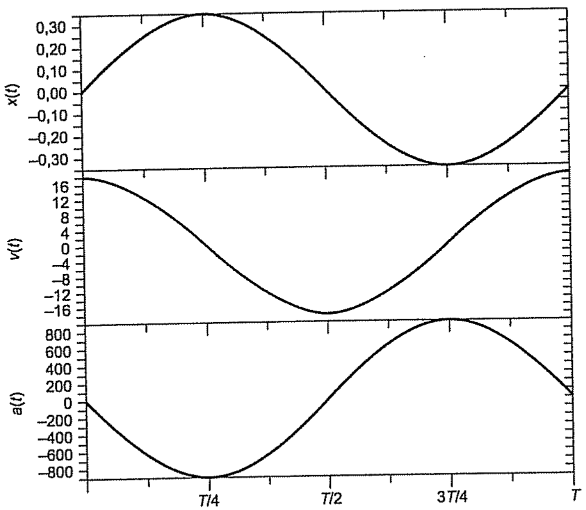
$$t = \frac{1}{50}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{con } n = 0, 1, 2...$$

En estos instantes de tiempo el bloque se encuentra en:

$$x(t) = 0{,}35 \cos\left(\frac{50}{50}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}35 \cos(n\pi) = \pm 0{,}35 \text{ m} \qquad n = 0, 1, 2...$$

Resumiendo, el valor máximo de la aceleración es $|a_{máx}| = 875$ m/s^2 y se consigue cuando el bloque pasa por los puntos de elongación máxima.

En la siguiente gráfica se presenta la evolución temporal de la elongación, la velocidad y la aceleración a lo largo de un periodo.



11.5. Demostrar que en un movimiento armónico simple la energía cinética media en un periodo es igual a la energía potencial media, e igual a la mitad de la energía mecánica.

Solución

En un movimiento armónico simple la elongación y la velocidad vienen dadas por expresiones del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \qquad v(t) = -A\omega \,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La energía cinética es función del tiempo e igual a:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \,\text{sen}^2(\omega t + \delta)$$

El valor medio de la energía cinética en un periodo es:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \,\text{sen}^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{mA^2\omega^2}{2T}\int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \delta)\, dt$$

Y la integral:

$$\int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{1}{2}T$$

Quedando entonces:

$$\langle E_c \rangle = \frac{mA^2\omega^2}{4}$$

Teniendo en cuenta que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, se demuestra que la energía cinética media es:

$$\langle E_c \rangle = \frac{kA^2}{4} = \frac{1}{2}E_m$$

igual a la mitad de la energía mecánica.

La energía potencial también es función del tiempo y viene dada por:

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

El valor medio de la energía potencial en un periodo es:

$$\langle U_e \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{kA^2}{2T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{kA^2}{4}$$

igual a la mitad de la energía mecánica:

$$\langle U_e \rangle = \frac{kA^2}{4} = \frac{1}{2}E_m$$

En resumen:

$$\langle E_c \rangle = \langle U_e \rangle = \frac{1}{2}E_m$$

11.6. Una partícula realiza un movimiento armónico simple en torno a un punto de equilibrio. La partícula pasa por el punto de elongación $x_1 = 1{,}0$ m con velocidad $v_1 = 2{,}0$ m/s, y cuando pasa por $x_2 = 2{,}0$ m su velocidad es $v_2 = 1{,}0$ m/s. Determinar la amplitud y frecuencia angular de su movimiento.

Solución

A lo largo del movimiento la energía mecánica de la partícula se mantendrá constante. Cuando se encuentre en un punto x cualquiera, con velocidad v, su energía mecánica se puede expresar como:

$$E_m = E_c + U_e \qquad E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y por tanto $k = \omega^2 m$. Sustituyendo k en (1) queda:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

y simplificando:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \tag{2}$$

Sustituyendo en (2) los valores del enunciado:

$$(2{,}0 \text{ m/s})^2 + \omega^2 (1{,}0 \text{ m})^2 = \omega^2 A^2 \tag{3}$$

$$(1{,}0 \text{ m/s})^2 + \omega^2 (2{,}0 \text{ m})^2 = \omega^2 A^2 \tag{4}$$

Multiplicando la ecuación (4) por -1 y sumando el resultado a la ecuación (3) se obtiene:

$$3{,}00 \text{ m}^2/\text{s}^2 - \omega^2 \cdot 3{,}0 \text{ m}^2 = 0$$

Despejando ω:

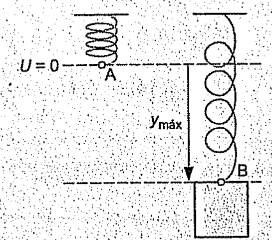
$$\omega = \sqrt{\frac{3{,}00 \text{ m}^2/\text{s}^2}{3{,}0 \text{ m}^2}} = 1{,}00 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo ω en (3) y despejando A:

$$A = \sqrt{\frac{(2{,}0 \text{ m/s})^2}{(1{,}00 \text{ rad/s})^2} + (1{,}0 \text{ m})^2} = \sqrt{5} = 2{,}24 \text{ m}$$

La frecuencia angular del movimiento es $\omega = 1{,}0$ rad/s y la amplitud de la oscilación $A = 2{,}2$ m.

11.7. Un muelle de constante recuperadora k tiene longitud natural L. Un bloque de masa m se cuelga del muelle y se suelta. Determinar la elongación máxima $y_{máx}$ que alcanzará el muelle.



Solución

Para encontrar $y_{máx}$ se tendrá en cuenta que la energía mecánica del sistema se conserva entre los puntos A y B.

$$\Delta U_g + \Delta U_e + \Delta E_c = 0$$

Donde ΔU_g y ΔU_e son las variaciones de energía potencial gravitatoria y elástica respectivamente.

El bloque sale del punto A con velocidad nula y llegará a B con velocidad cero, en consecuencia la variación de energía cinética que experimenta entre A y B es cero, y entonces:

$$\Delta U_g + \Delta U_e = 0 \qquad U_{gB} - U_{gA} + U_{eB} - U_{eA} = 0 \qquad -mgy_{máx} + 0 + \frac{1}{2}ky_{máx}^2 - 0 = 0$$

De donde se deduce que:

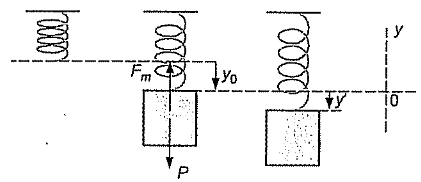
$$y_{máx} = \frac{2mg}{k}$$

11.8. Un bloque de masa m se cuelga de un muelle vertical, produciéndole un alargamiento $y_0 = 0{,}42$ m. Seguidamente se estira el bloque una distancia $y' = 0{,}10$ m por debajo del punto de equilibrio y se deja oscilar el sistema libremente. Determinar:

a) La ecuación de la elongación en función del tiempo.
b) La velocidad y la aceleración máximas del bloque.

Solución

a) Cuando se cuelga la masa m, el muelle se alarga y_0 hasta un punto de equilibrio en que la fuerza ejercida por el muelle es contrarrestada por el peso del bloque.



En este punto, aplicando la condición de equilibrio:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = 0 \qquad F_m - P = 0 \qquad ky_0 - mg = 0$$

Se obtiene: $$k = \frac{mg}{y_0} \tag{1}$$

Seguidamente se separa el bloque una distancia y' respecto al punto de equilibrio y se deja oscilar el sistema. El bloque oscilará en torno a la posición de equilibrio con amplitud $y' = 0{,}10$ m, la frecuencia angular de la oscilación es $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, sustituyendo k por la expresión (1), se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_0}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}42 \text{ m}}} = 4{,}83 \text{ rad/s}$$

La ecuación de la elongación en función del tiempo será del tipo (en unidades del SI):

$$y(t) = 0{,}10 \cos (4{,}8t + \delta)$$

La fase inicial δ se determina a partir de las condiciones iniciales del problema. En el instante inicial, cuando se libera el sistema, el bloque se encuentra 0,10 m por debajo del punto de equilibrio, en este momento la elongación es $y(t = 0) = -0{,}10$ m, y en consecuencia δ deberá ser $\delta = \pi$.

La ecuación de la elongación quedará:

$$y(t) = 0{,}10 \cos (4{,}8t + \pi)$$

b) La ecuación de la velocidad en función del tiempo (en unidades del SI) es:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -0{,}10 \cdot 4{,}8 \cdot \text{sen } (4{,}8t + \pi) = -0{,}48 \cdot \text{sen } (4{,}8t + \pi)$$

La velocidad alcanza su valor máximo cuando sen $(4{,}8t + \pi) = \pm 1$, quedando $v_{\text{máx}} = 0{,}48$ m/s.

La ecuación de la aceleración en función del tiempo (en unidades del SI) es:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}10 \cdot (4{,}8)^2 \cdot \cos (4{,}8t + \pi) = -2{,}30 \cdot \cos (4{,}8t + \pi)$$

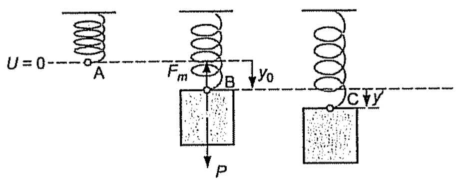
La aceleración es máxima cuando $\cos (4{,}8t + \pi) = \pm 1$, quedando $a_{\text{máx}} = 2{,}3$ m/s^2.

11.9. Un bloque de masa m se cuelga de un muelle vertical, produciéndole un alargamiento y_0. Seguidamente se estira el bloque una distancia y' por debajo del punto de equilibrio. Considerando el origen de energías potenciales en el punto donde el muelle tiene su longitud natural, determinar:

a) La variación de energía potencial gravitatoria del sistema cuando el bloque pasa de y_0 a y'.
b) La variación de energía potencial elástica del sistema cuando el bloque pasa de y_0 a y'.
c) La variación de energía potencial total del sistema cuando el bloque pasa de y_0 a y'.

Solución

a) Cuando se cuelga la masa m, el muelle se alarga y_0 hasta un punto de equilibrio en que la fuerza ejercida por el muelle es contrarrestada por el peso del bloque.



En este punto, aplicando la condición de equilibrio:

$$+\uparrow \sum_i F_{iy} = 0 \qquad F_m - P = 0 \qquad ky_0 - mg = 0$$

Esto implica que $ky_0 = mg$. (1)

La variación de energía potencial gravitatoria entre los puntos C y B, considerando altura cero (y por tanto energía potencial gravitatoria igual a cero) en el punto A es:

$$\Delta U_g = U_C - U_B = -mg(y_0 + y') - (-mgy_0) = -mgy'$$

b) La variación de energía potencial elástica entre los puntos C y B, considerando elongación cero (y por tanto energía potencial elástica igual a cero) en el punto A es:

$$\Delta U_e = U_C - U_B = \frac{1}{2} k(y_0 + y')^2 - \frac{1}{2} ky_0^2 = \frac{1}{2} ky_0^2 + ky_0 y' + \frac{1}{2} ky'^2 - \frac{1}{2} ky_0^2 = ky_0 y' + \frac{1}{2} ky'^2$$

c) La variación de energía potencial total entre los puntos C y B, considerando el origen de energías potenciales en el punto A es:

$$\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_e = -mgy' + ky_0y' + \frac{1}{2} ky'^2$$

Sustituyendo (1) en la expresión anterior se obtiene:

$$\Delta U = -mgy' + mgy' + \frac{1}{2} ky'^2 = \frac{1}{2} ky'^2$$

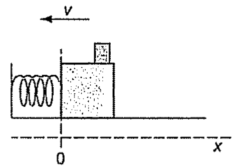
Conviene subrayar que la expresión $\Delta U = \frac{1}{2} ky'^2$; donde y' es la distancia que separa el bloque del punto de equilibrio, es la variación de energía potencial total (gravitatoria más elástica). Esto significa que si tomamos el punto de referencia para medir las energías potenciales, el punto de equilibrio B, solamente tenemos que considerar la energía potencial elástica y podemos prescindir de la energía potencial gravitatoria.

11.10. Un bloque de masa $M = 0{,}5$ kg situado sobre un plano horizontal sin fricción oscila ligado a un muelle de constante recuperadora $k = 20$ N/m, con amplitud $A = 25$ cm. Cuando el bloque pasa por $x = 0$, moviéndose hacia la izquierda, se coloca sobre él una pesa de masa $m << M$. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la pesa es 0,60. Determinar para qué valor de la elongación la pesa empezará a deslizarse sobre el bloque.

Solución

La fuerza que mantiene la pesa en contacto sobre el bloque es la fuerza de rozamiento estático.

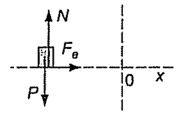
Aplicando la segunda ley de Newton a la pesa se obtiene:



$$+\rightarrow \sum_i F_{xi} = ma_x \qquad F_e = ma$$

$$+\uparrow \sum_i F_{yi} = 0 \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$$

Cuando la fuerza de rozamiento supere el valor máximo, la pesa empezará a deslizarse sobre el bloque:



$$+\rightarrow F_{e\,\text{máx}} = \mu_e N \qquad \mu_e mg = ma \qquad \mu_e g = a$$

Esto se producirá cuando el oscilador alcance un valor de la aceleración igual a:

$$a = \mu_e g = 0{,}60 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 5{,}89 \text{ m/s}^2$$

Vamos a ver en qué instante la aceleración del sistema es 5,89 m/s^2.
Se empezará buscando la ecuación de la elongación en función del tiempo. La amplitud es $A = 0{,}25$ m y la frecuencia angular $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{20 \text{ N/m}}{0{,}50 \text{ kg}}} = 6{,}33$ rad/s.

El instante en que se coloca la pesa sobre el bloque lo consideraremos $t = 0$. En este momento el bloque pasa por el origen de coordenadas, moviéndose hacia la izquierda. En consecuencia la fase inicial δ será igual a $\pi/2$. La ecuación de la elongación en función del tiempo es (en unidades del SI):

$$x(t) = 0{,}25 \cdot \cos\left(6{,}33t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y la ecuación de la aceleración en función del tiempo es:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}25 \cdot (6{,}33)^2 \cdot \cos\left(6{,}33t + \frac{\pi}{2}\right) = -10{,}0 \cdot \cos\left(6{,}33t + \frac{\pi}{2}\right)$$

El instante en que la aceleración es 5,89 m/s^2 se calcula haciendo:

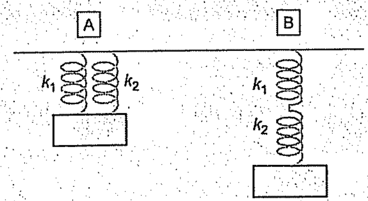
$$a(t) = -10{,}0 \cdot \cos\left(6{,}33t + \frac{\pi}{2}\right) = 5{,}89 \text{ m/s}^2 \qquad t = \frac{1}{6{,}33}\left[\arccos\left(-\frac{5{,}89}{10{,}0}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = 0{,}0995 \text{ s}$$

En este instante la elongación es:

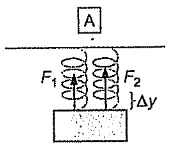
$$x(t = 0{,}0995 \text{ s}) = 0{,}25 \cdot \cos\left(6{,}33 \cdot 0{,}0995 + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}147 \text{ m}$$

La pesa empezará a deslizarse sobre el bloque cuando éste se encuentre 15 cm a la izquierda de origen de coordenadas.

11.11. Determinar la constante recuperadora del muelle equivalente de los sistemas que se presentan en la figura.

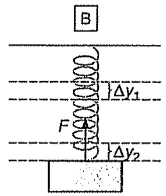


Solución



El muelle equivalente es aquel muelle por el que podemos sustituir a un conjunto de muelles de forma que para una misma elongación, ejerza una fuerza igual a la fuerza resultante que ejerce el conjunto.
En el sistema A, los muelles 1 y 2 ejercen fuerzas F_1 y F_2 sobre el bloque. La fuerza resultante ejercida por los muelles es:

$$F_1 + F_2 = -k_1\Delta y - k_2\Delta y = -(k_1 + k_2)\Delta y$$



El muelle equivalente, es decir, aquel que ejerce una fuerza igual a $F_1 + F_2$ cuando la elongación es Δy, es aquél que tiene constante recuperadora:

$$k_{eq} = -\frac{(F_1 + F_2)}{\Delta y} = -\frac{-(k_1 + k_2)\Delta y}{\Delta y} = k_1 + k_2$$

La fuerza que actúa sobre el bloque del sistema B es F. Esta fuerza provoca un estiramiento Δy_1 en el muelle 1, y un estiramiento Δy_2 en el muelle 2. El alargamiento total es $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$.
Este alargamiento puede escribirse como:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{-F}{k_1} + \frac{-F}{k_2} = -\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F$$

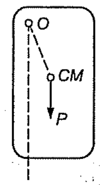
El muelle equivalente, es decir, aquel que ejerce una fuerza igual a F cuando la elongación es Δy, es aquél que tiene constante recuperadora:

$$k_{eq} = \frac{-F}{\Delta y} = \frac{-F}{-\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)F} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$$

11.12. Se pretende medir el momento de inercia de una lámina delgada, de masa 0,80 kg, respecto a un eje que pasa por un punto O contenido en la lámina que dista 13 cm de su centro de masas. Para ello se cuelga la lámina del punto O, se aparta el sistema ligeramente de la posición de equilibrio y se deja oscilar. El periodo de las oscilaciones es de 3,0 s. Determinar:

a) El momento de inercia de la lámina respecto al eje que pasa por O.

b) El momento de inercia de la lámina respecto al eje que pasa por el centro de masas.



Solución

a) El periodo de un péndulo físico de masa m que oscila de un punto O que dista d del centro de masas, viene dado (para oscilaciones pequeñas) por la siguiente expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

Despejando el momento de inercia I_O se obtiene:

$$I_O = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}$$

Y sustituyendo por los valores numéricos:

$$I_O = \frac{0{,}80 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}13 \text{ m} \cdot (3{,}0 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 0{,}233 \text{ kg m}^2$$

El momento de inercia de la lámina respecto a un eje que pasa por O es $I_O = 0{,}23$ kg $\cdot$ m^2.

b) El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el CM se calculará con el teorema de Steiner.

$$I_O = I_{CM} + md^2$$

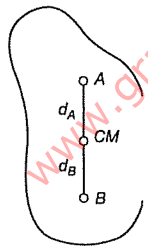
Despejando I_{CM} y sustituyendo por los valores numéricos:

$$I_{CM} = I_O - md^2 = 0{,}233 \text{ kg m}^2 - 0{,}80 \text{ kg} \cdot (0{,}13 \text{ m})^2 = 0{,}219 \text{ kg m}^2$$

El momento de inercia de la lámina respecto a un eje que pasa por su CM es $I_{CM} = 0{,}22$ kg $\cdot$ m^2

11.13. El periodo de un péndulo físico respecto a un punto *A* situado por encima del centro de masas a una distancia d_A es *T*. Determinar la posición del punto *B* situado sobre la recta que une *A* con *CM*, y por debajo del *CM*, tal que si colgamos el péndulo del punto *B* el periodo de oscilación es exactamente igual al periodo de oscilación respecto al punto *A*.
Dato: El momento de inercia del péndulo respecto a un eje que pasa por su centro de masas es I_{CM}.

Solución



Si el periodo del péndulo cuando oscila respecto al punto A es el mismo que el periodo cuando oscila respecto B, deberá cumplirse que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{mgd_A}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{mg\,d_B}}$$

Simplificando se obtiene:

$$I_A d_B = I_B d_A \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Steiner, los momentos de inercia I_A e I_B pueden escribirse como:

$$I_A = I_{CM} + md_A^2$$
$$I_B = I_{CM} + md_B^2$$

Sustituyendo en (1):

$$(I_{CM} + md_A^2)d_B = (I_{CM} + md_B^2)d_A$$

y reordenando los términos, queda la siguiente ecuación de segundo grado en d_B:

$$md_A d_B^2 - (md_A + I_{CM})d_B + I_{CM}d_A = 0$$

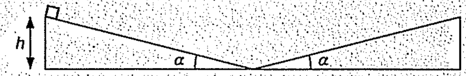
Despejando d_B de la ecuación anterior:

$$d_B = \frac{md_A^2 + I_{CM} \pm \sqrt{m^2 d_A^4 + I_{CM}^2 + 2md_A^2 I_{CM} - 4md_A^2 I_{CM}}}{2md_A} = \frac{md_A^2 + I_{CM} \pm (md_A^2 - I_{CM})}{2md_A}$$

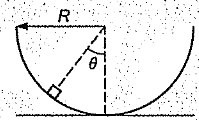
se obtienen dos soluciones $d_B = d_A$ que es la que conocíamos de antemano y $d_B = \dfrac{I_{CM}}{md_A}$ que es la solución que buscábamos.

11.14. Un pequeño bloque de masa *m* oscila en torno a la posición de equilibrio en los dos sistemas que se presentan en las figuras. Determinar para cada uno de ellos, el periodo de la oscilación y si se trata o no de un movimiento armónico simple.

a) En el primer sistema el bloque oscila sobre dos planos inclinados opuestos sin fricción. El bloque sale de una altura *h* con velocidad inicial nula.



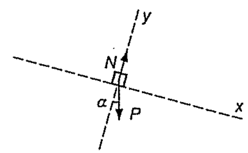
b) En el segundo sistema el bloque oscila en una superficie semiesférica sin fricción. Parte de un punto que forma un ángulo θ_0 con la vertical con velocidad inicial nula.



Solución

a) En el primer sistema, la fuerza resultante que actúa sobre el bloque tiene la dirección del plano inclinado y apunta hacia el punto de equilibrio. Su módulo es:

$$F_{res} = mg \text{ sen } \alpha$$



Esta fuerza en todo momento es constante y no depende de la distancia del punto de equilibrio. En consecuencia este movimiento oscilatorio no será armónico simple.

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección del plano inclinado se obtiene:

$$+ \rightarrow \quad \sum_i F_{xi} = ma_x \qquad mg \text{ sen } \alpha = ma$$

y despejando $a = g$ sen α.

La distancia recorrida por el bloque sobre el plano es:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g \text{ sen } \alpha\, t^2 \qquad (1)$$

El periodo del movimiento es el tiempo que el bloque tarda en realizar una oscilación completa, es decir, el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a $4L$, siendo L la longitud de uno de los planos, $L = h/\text{sen } \alpha$.

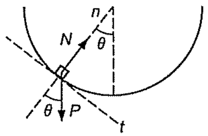
Sustituyendo en (1):

$$\frac{4h}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{2}g \text{ sen } \alpha\, T^2$$

y despejando el periodo T, se obtiene:

$$T = \frac{2}{\text{sen } \alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

b) En el segundo sistema la fuerza resultante que actúa en dirección tangente a la esfera es $F_{res} = mg$ sen θ, siendo θ el ángulo que forma el objeto con la vertical. Esta fuerza no es constante, ya que el valor de θ va cambiando a lo largo del movimiento.



Aplicando la segunda ley de Newton en dirección tangencial se obtiene

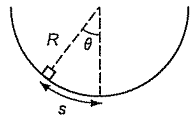
$$+ \searrow \sum_i F_{it} = ma_t \qquad mg \text{ sen } \theta = ma_t$$

y despejando: $a_t = g$ sen θ (2)

La aceleración tangencial también puede expresarse como $a_t = -\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ donde s es la longitud del arco de la circunferencia, $s = R\theta$. El signo menos indica que la aceleración tangencial tiene sentido contrario al de la variación del arco de circunferencia.

En consecuencia $a_t = -R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, y sustituyéndola en (2) se obtiene:

$$-R\frac{d^2\theta}{dt^2} = g \text{ sen } \theta \qquad (3)$$



Cuando las oscilaciones son pequeñas (es decir, para ángulos de oscilación menores de 15°) se puede aproximar sen $\theta \approx \theta$. Entonces la ecuación (3) puede escribirse como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\theta \qquad (4)$$

Esta ecuación diferencial es idéntica a la ecuación que describe el movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (5)$$

Comparando las expresiones (4) y (5) se deduce que la frecuencia angular del movimiento (para amplitudes de oscilación pequeñas) es $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, y su periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

11.15. Una varilla de 1,0 kg y longitud 60 cm oscila respecto a un punto O situado en uno de sus extremos. La constante de amortiguamiento de este péndulo es $b = 0{,}49$ kg/s y la amplitud inicial de la oscilación $\theta_0 = 10°$. Determinar:

a) El factor de calidad del péndulo.

b) La ecuación de la posición angular del péndulo en función del tiempo.

Dato: El momento de inercia de una varilla de masa M y longitud l respecto a un eje que pasa por su centro de masas es $I_{CM} = Ml^2/12$.

Solución

El periodo de un péndulo físico sin amortiguamiento es igual, para oscilaciones pequeñas, a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mgd}}$$

Y su frecuencia angular:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Mgd}{I_O}} \qquad (1)$$

Donde I_O es el momento de inercia del péndulo respecto al eje de oscilación, y d la distancia del punto O al centro de masas.

I_O se calculará considerando el teorema de Steiner:

$$I_O = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

Sustituyendo en (1) se determinará la frecuencia natural del oscilador.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{3}Ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 0{,}60 \text{ m}}} = 4{,}95 \text{ rad/s}$$

a) El factor de calidad del oscilador es $Q = \dfrac{m\omega_0}{b}$. Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene $Q = \dfrac{1{,}0 \text{ kg} \cdot 4{,}95 \text{ rad/s}}{0{,}49 \text{ kg/s}} = 10{,}1$.

El factor de calidad del sistema es $Q = 10$, en consecuencia el péndulo se encontrará subamortiguado.

b) La ecuación del péndulo subamortiguado que nos ocupa será del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta)$$

donde ω es la frecuencia angular del péndulo con amortiguamiento, que viene dada por la expresión:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

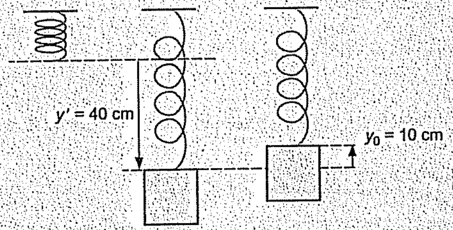
$$\omega = \sqrt{(4{,}95 \text{ rad/s})^2 - \left(\frac{0{,}49 \text{ kg/s}}{2 \cdot 1{,}0 \text{ kg}}\right)^2} = 4{,}94 \text{ rad/s}$$

Y la ecuación de la posición angular a lo largo del tiempo quedará:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\theta(t) = 10° e^{-\frac{0{,}49 \text{ kg/s}}{2 \cdot 1{,}0 \text{ kg}}t} \cos(4{,}94 \text{ rad/s} \cdot t) = 10° e^{-0{,}245 \text{ s}^{-1} \cdot t} \cos(4{,}94 \text{ rad/s} \cdot t)$$

11.16. Cuando un bloque de 1,0 kg se cuelga de un muelle vertical, el muelle se alarga 40 cm hasta conseguir la posición de equilibrio. Seguidamente se comprime el muelle 10 cm y se deja oscilar al sistema libremente. Se observa que pasados 20 segundos la amplitud de la oscilación se ha reducido a la mitad.



Determinar:

a) La constante recuperadora del muelle.

b) La constante de tiempo y el factor de calidad del oscilador amortiguado.

c) La ecuación de la elongación del muelle en función del tiempo.

Solución

a) Cuando se alcanza la posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el muelle sobre el bloque y el peso del bloque se compensan, en consecuencia:

$$ky' = mg \qquad k = \frac{mg}{y'} = \frac{1{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}40 \text{ m}} = 24{,}5 \text{ N/m}$$

La constante recuperadora del muelle es $k = 25$ N/m.

b) La amplitud de un oscilador amortiguado decae exponencialmente en el tiempo según la expresión:

$$A(t) = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}$$

que en función de la constante de tiempo $\tau = \dfrac{m}{b}$ queda:

$$A(t) = A_o e^{-\frac{t}{2\tau}} \qquad (1$$

El enunciado indica que pasados 20 s la amplitud de la oscilación se ha reducido a la mitad, es decir ha pasado de 10 cm a 5 cm. Sustituyendo estos datos en (1):

$$5{,}0 \text{ cm} = 10 \text{ cm}\, e^{-\frac{20\text{ s}}{2\tau}}$$

y despejando τ de la ecuación anterior:

$$\tau = -\frac{20 \text{ s}}{2 \cdot \ln\left[\dfrac{5{,}0 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}\right]} = 14{,}4 \text{ s}$$

El factor de calidad viene dado por la expresión:

$$Q = \frac{m\omega_0}{b} = \tau\omega_0$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural de la oscilación (o la frecuencia del oscilador sin rozamiento).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24{,}5 \text{ N/m}}{1{,}0 \text{ kg}}} = 4{,}95 \text{ rad/s}$$

Finalmente el factor de calidad queda:

$$Q = \tau\omega_0 = 14{,}4 \text{ s} \cdot 4{,}95 \text{ rad/s} = 71{,}3$$

Resumiendo, diremos que la constante de tiempo es 14 s y el factor de calidad $Q = 71$.

c) Debido a que $Q > \frac{1}{2}$, el oscilador estará subamortiguado, y la elongación del muelle vendrá dada por una ecuación del tipo:

$$y(t) = A_0 e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2}$ $\qquad \omega = \sqrt{(4{,}95 \text{ rad/s})^2 - \left(\dfrac{1}{2 \cdot 14{,}4 \text{ s}}\right)^2} = 4{,}95$ rad/s

La frecuencia de oscilación coincide con la frecuencia de oscilación natural del sistema.

Considerando que en $t = 0$ el bloque se encuentra en $y(t = 0) = y_0 = 0{,}10$ m, se deduce que la fase inicial es $\delta = 0$, y la ecuación del movimiento queda (en unidades del SI):

$$y(t) = 0{,}10\, e^{-\frac{1}{28{,}8}t} \cos(4{,}95t)$$

11.17. Se acopla en la parte superior del muelle del problema anterior un pequeño motor que imprime al muelle una fuerza $F(t) = 2{,}0 \text{ N} \cdot \cos(5{,}5t)$ en dirección vertical. Una vez alcanzado el régimen estacionario, determinar:

a) La frecuencia de la oscilación.

b) La amplitud de la oscilación.

c) El desfase entre la elongación y la fuerza impulsora.

d) La ecuación de la elongación del muelle en función del tiempo.

Solución

a) Cuando se alcanza el régimen estacionario, la frecuencia de la oscilación es igual a la frecuencia de la fuerza impulsora:

$$\omega_F = 5{,}5 \text{ rad/s}$$

b) Cuando se alcanza el régimen estacionario, la amplitud de la oscilación es:

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_F}{\tau}\right)^2}} \qquad (1)$$

Donde:

F_0 es la amplitud de la fuerza impulsora, en este problema $F_0 = 2{,}0$ N.
m es la masa oscilante, $m = 1{,}0$ kg.
ω_0 es la frecuencia natural de la oscilación, calculada en el problema anterior, $\omega_0 = 4{,}95$ rad/s.
τ es la constante de tiempo, calculada en el problema anterior, $\tau = 14{,}4$ s.
ω_F es la frecuencia de la fuerza impulsora $\omega_F = 5{,}5$ rad/s.
Sustituyendo los valores numéricos en (1) resulta:

$$A = \frac{2{,}0 \text{ N}}{1{,}0 \text{ kg}} \frac{1}{\sqrt{\left((5{,}5 \text{ rad/s})^2 - (4{,}95 \text{ rad/s})\right)^2 + \left(\dfrac{5{,}5 \text{ rad/s}}{14{,}4 \text{ s}}\right)^2}} = 0{,}347 \text{ m}$$

Se obtiene que la amplitud de oscilación del muelle es $A = 35$ cm.

c) Cuando se alcanza el régimen estacionario, el desfase entre la elongación y la fuerza impulsora es:

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\omega_F / \tau}{\omega_0^2 - \omega_F^2}\right] \qquad (2)$$

Sustituyendo por los valores numéricos en (2):

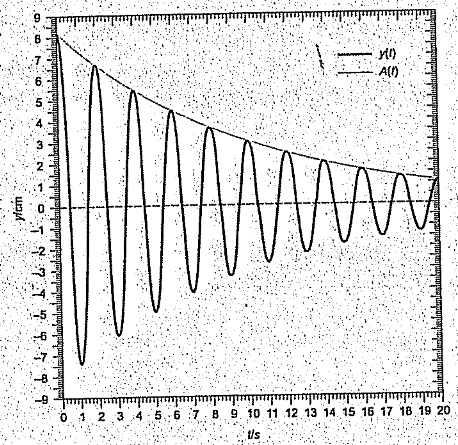
$$\alpha = \arctan\left[\frac{\dfrac{5{,}5 \text{ rad/s}}{14{,}4 \text{ s}}}{(5{,}5 \text{ rad/s})^2 - (4{,}95 \text{ rad/s})^2}\right] = 0{,}0664 \text{ rad}$$

Se obtiene que el desfase entre la fuerza impulsora y la elongación es $\alpha = 0{,}066$ rad.

d) En el régimen estacionario la ecuación de la elongación del muelle en función del tiempo es (en unidades del SI):

$$y(t) = A \cos(\omega_F t - \alpha) \qquad y(t) = 0{,}347 \cdot \cos(5{,}5t - 0{,}0664)$$

11.18. La gráfica de la figura muestra la variación temporal de la elongación $y(t)$ y de la amplitud $A(t)$ de un oscilador armónico amortiguado. Teniendo en cuenta que la amplitud inicial es $A_0 = 8{,}15$ cm, determinar:



a) La frecuencia angular de la oscilación.

b) La constante de tiempo del oscilador.

c) La ecuación de la amplitud de la oscilación en función del tiempo.

d) El tiempo necesario para que la amplitud de la oscilación pase del valor inicial A_0 al valor $A_0 \cdot e^{-1}$.

e) El tiempo necesario para que la energía mecánica del oscilador pase del valor inicial A_0 al valor $A_0 \cdot e^{-1}$.

Solución

a) El periodo de la oscilación puede leerse directamente de la gráfica. El oscilador realiza 10 oscilaciones completas en 20,0 segundos. En consecuencia $T = 20{,}0 \text{ s}/10 = 2{,}00$ s. La frecuencia angular es $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2{,}00 \text{ s}} = 3{,}14$ s.

b) La constante de tiempo del oscilador puede estimarse teniendo en cuenta que en 20 segundos la amplitud de la oscilación pasa de 8,15 cm a 1,10 cm. La amplitud decae exponencialmente según la expresión:

$$A(t) = A_o e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$A(t = 20 \text{ s}) = 1{,}10 \text{ cm} = 8{,}15 \text{ cm} \cdot e^{-\frac{20 \text{ s}}{2\tau}}$$

Despejando τ de la expresión anterior:

$$\tau = -\frac{10 \text{ s}}{\ln\left(\dfrac{1{,}10 \text{ cm}}{8{,}15 \text{ cm}}\right)} = 4{,}99 \text{ s}$$

La constante de tiempo es $\tau = 4{,}99$ s.

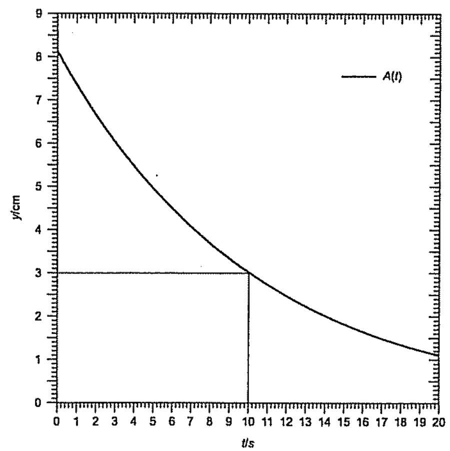
c) La ecuación de la elongación en función del tiempo es del tipo:

$$x(t) = A_o e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(\omega t + \delta)$$

Sustituyendo por los valores numéricos, se obtiene (en unidades del SI):

$$x(t) = 8{,}15 \cdot 10^{-2} e^{-\frac{1}{9{,}98}t} \cos(3{,}14t)$$

d) El tiempo necesario para que la amplitud de la oscilación pase de $A_0 = 8{,}15$ cm al valor $A_0 \cdot \exp(-1) = 3{,}00$ cm, se puede leer directamente en la gráfica. Sobre la gráfica es fácil leer el tiempo $t = 10$ s.



También se puede calcular utilizando la expresión de $A(t)$.

$$A(t) = A_o e^{-1} = A_o e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

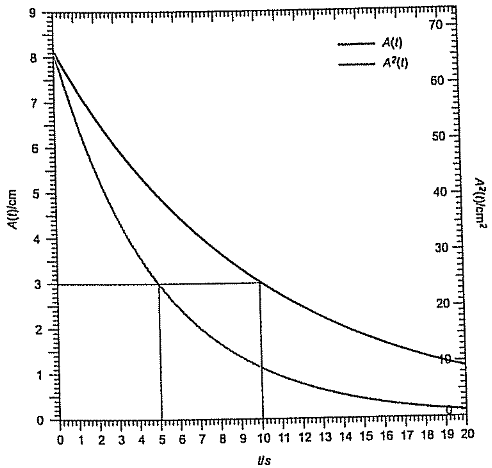
Esto implica que $1 = \frac{t}{2\tau}$, y despejando t se obtiene: $t = 2\tau = 2 \cdot 4{,}99$ s $= 9{,}98$ s $= 10$ s.

e) La energía mecánica del oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación. En consecuencia, el tiempo necesario para que la energía mecánica del sistema pase de E_0 al valor $E_0 \cdot e^{-1}$, será igual al tiempo requerido para que $A^2(t)$ pase del valor inicial A_0^2, al valor $A_0^2 \cdot e^{-1}$.
Este tiempo se determinará haciendo:

$$A_0^2 \cdot e^{-1} = A_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Igualando los exponentes se obtiene $1 = \frac{t}{\tau}$, y despejando t se obtiene: $t = \tau = 4{,}99$ s.

En la siguiente gráfica se presentan superpuestas las curvas de $A(t)$ y de $A^2(t)$. La energía mecánica, que es proporcional a $A^2(t)$, decrece el doble de rápido que la amplitud de oscilación $A(t)$. En consecuencia, el tiempo empleado en reducirse en un factor exp(1) es la mitad que el de la amplitud, y coincide con la constante de tiempo del oscilador.



11.19. Un oscilador armónico amortiguado de masa m, frecuencia natural ω_0 y constante de tiempo τ se conecta a un sistema que le imprime una fuerza que varía senoidalmente con el tiempo según la expresión $F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$. Determinar, en el régimen estacionario:

a) La energía cinética del oscilador, y su valor medio en un período.

b) El valor de ω_F para el cual la energía cinética media es máxima.

c) La potencia media entregada en un periodo para el valor de ω_F calculado en el apartado anterior.

Solución

a) La energía cinética del oscilador es:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

La velocidad se obtendrá calculando la derivada temporal de la elongación:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La elongación del oscilador armónico forzado, en el régimen estacionario, viene dada por:

$$x(t) = A \cos(\omega_F t - \alpha) \tag{1}$$

Con amplitud:

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2}} \tag{2}$$

El desfase de la fuerza impulsora respecto la elongación es:

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\omega_F / \tau}{\omega_0^2 - \omega_F^2}\right] \tag{4}$$

Derivando (1) respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_F \operatorname{sen}(\omega_F t - \alpha)$$

y, en consecuencia, la energía cinética del oscilador depende del tiempo y viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (A\omega_F)^2 \operatorname{sen}^2(\omega_F t - \alpha)$$

El valor medio de la energía cinética en un periodo es:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_c dt = \frac{1}{2} m (A\omega_F)^2 \int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega_F t - \alpha) dt = \frac{1}{4} m (A\omega_F)^2$$

Sustituyendo en la expresión anterior la amplitud A por (2) se obtiene:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} mA^2\omega_F^2 = \frac{1}{4\,m} \frac{F_0^2}{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2} \omega_F^2 \tag{4}$$

b) El valor de ω_F para el cual la energía cinética media es máxima es aquel que maximiza la expresión:

$$f(\omega_F) = \frac{\omega_F^2}{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2}$$

Y se obtendrá calculando el valor para el cual $\dfrac{df}{d\omega_F} = 0.$

$$\frac{df}{d\omega_F} = \frac{2\omega_F\left((\omega_F^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2\right)-\omega_F^2\left(2(\omega_F^2-\omega_0^2)2\omega_F+\frac{2\omega_F}{\tau^2}\right)}{\left((\omega_F^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2\right)^2}=0$$

Reordenando términos queda:

$$\frac{df}{d\omega_F} = \frac{-2\,\omega_F\,(\omega_F^4-\omega_0^4)}{\left((\omega_F^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{\omega_F}{\tau}\right)^2\right)^2}=0$$

La expresión anterior es cero cuando el numerador es cero, esto se produce cuando:

$$\omega_F = 0,\ \text{o bien cuando}\ \omega_F^4-\omega_0^4=0 \Rightarrow \omega_F=\omega_0.$$

Sustituyendo en (4) es fácil comprobar que cuando $\omega_F = 0$, la energía cinética media es $\langle E_c\rangle = 0$ y cuando $\omega_F = \omega_0$ la energía cinética media es máxima e igual a $\langle E_c\rangle = \dfrac{1}{4\,m}F_0^2\,\tau^2$.

c) La potencia suministrada por la fuerza impulsora es $P(t) = F(t)\cdot v(t)$.

Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincide con la frecuencia natural del sistema ($\omega_F = \omega_0$), la expresión de la fuerza impulsora queda $F(t) = F_0\cos(\omega_0 t)$, y la velocidad $v(t) = -A\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t - \alpha)$. Siendo la amplitud $A = \dfrac{F_0\,\tau}{m\,\omega_0}$ y el desfase $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

En consecuencia, la potencia instantánea queda:

$$P(t) = F(t)\cdot v(t) = -\,F_0\cos(\omega_0 t)\,\frac{F_0\tau}{m}\,\text{sen}\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta que: sen $(A-B)$ = sen (A) cos (B) − cos (A) sen (B), la expresión anterior puede escribirse como:

$$P(t) = -\frac{F_0^2\,\tau}{m}\cos(\omega_0 t)\left[\text{sen}(\omega_0 t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\omega_0 t)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{F_0^2\,\tau}{m}\cos^2(\omega_0 t)$$

Y el valor medio de la potencia entregada en un periodo por la fuerza impulsora es:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{F_0^2\,\tau}{m}\,\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega_0 t)\,dt = \frac{F_0^2\,\tau}{2m}$$

CUESTIONES

11.1. En un oscilador armónico simple:

a) La energía mecánica del sistema es igual al valor máximo de la energía cinética del sistema.

b) La energía potencial es máxima cuando la energía cinética es máxima.

c) La energía potencial es máxima cuando la elongación es la mitad de la amplitud.

d) La energía cinética es máxima cuando la aceleración es máxima.

11.2. Una masa m oscila ligada a un muelle de constante recuperadora k. El periodo del movimiento es T. Si se sustituye la masa m por una masa $m' = 2\cdot m$, el periodo de la oscilación.

a) Queda multiplicado por un factor $\sqrt{2}$. *b)* Queda dividido por un factor $\sqrt{2}$.

c) Queda multiplicado por un factor 2. *d)* Queda dividido por un factor 2.

11.3. Un oscilador armónico tiene un periodo de 1s, una amplitud de 5 m y su constante de fase es π. La ecuación del movimiento de este oscilador en unidades del SI es:

a) $x(t) = 5\cos(t+\pi)$ *b)* $x(t) = 10\cos(\pi t)$

c) $x(t) = 5\cos(\pi t)$ *d)* $x(t) = 5\cos(2\pi t+\pi)$

11.4. Un objeto oscila ligado a un muelle horizontal. La fracción de la energía mecánica total, E_m, que está en forma de energía cinética, E_c, cuando la elongación es la mitad de la amplitud, es:

a) $E_c = \dfrac{E_m}{2}$ *b)* $E_c = \dfrac{E_m}{4}$ *c)* $E_c = \dfrac{3E_m}{4}$ *d)* $E_c = \dfrac{E_m}{3}$

11.5. Un muelle de masa despreciable se encuentra en posición horizontal. Uno de los extremos está fijo y el otro está unido a un bloque de masa 5,0 kg. Se separa el bloque de la posición de equilibrio y se deja oscilar. El bloque tarda 30 s en realizar 10 oscilaciones. La constante recuperadora del muelle es:

a) 2,1 N/m *b)* 10 N/m *c)* 22 N/m *d)* 0,88 N/m

11.6. Dos muelles con diferentes constantes elásticas se alargan una distancia A con una fuerza que en todo momento contrarresta la fuerza del muelle. El trabajo realizado por esta fuerza es:

a) Igual en ambos casos.

b) Mayor en el muelle de constante elástica superior.

c) Menor en el muelle de constante elástica superior.

d) Para responder esta pregunta es necesario conocer los valores de las constantes elásticas.

11.7. En un movimiento armónico simple, la aceleración:

a) Es constante.

b) Crece cuando aumenta la velocidad.

c) Es inversamente proporcional a la elongación.

d) Es proporcional a la elongación.

11.8. Un objeto realiza un movimiento armónico simple. Tarda 2,0 s en pasar de un extremo al otro de la oscilación que distan 20 cm. La frecuencia del movimiento es:

a) 0,50 Hz *b)* 2,0 Hz *c)* 0,25 Hz *d)* 4,0 Hz

11.9. Una partícula realiza un movimiento armónico simple con periodo $T = 1{,}6$ s. En el instante $t = 0$ la elongación es $x = 1{,}1$ m y la velocidad de la partícula es $v = -6{,}7$ m/s. Es correcto afirmar que:

a) La constante de fase es $\delta = 2{,}0$ rad.

b) La amplitud del movimiento es $A = 4{,}0$ m.

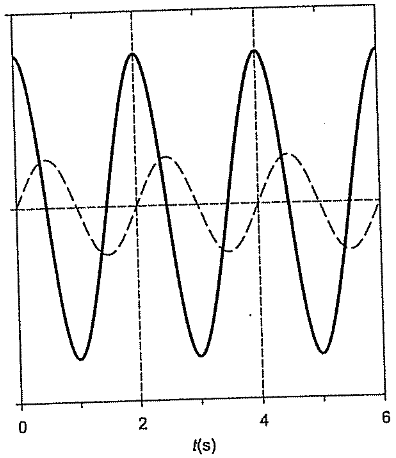
c) La amplitud del movimiento es $A = 1{,}1$ m.

d) La velocidad máxima que alcanza esta partícula es $v = 8{,}0$ m/s.

11.10. Un objeto se mueve con un movimiento armónico simple de periodo $T = 4{,}0$ s y amplitud A. Inicialmente el objeto está en $x = 0$ y su velocidad es positiva. Calcular el tiempo que tarda el objeto en llegar al punto de elongación $x = A/2$.

a) 0,50 s *b)* 0,33 s *c)* 1,0 s *d)* 0,66 s

11.11. En la gráfica se encuentran superpuestas las curvas $x(t)$ y $v(t)$ de un movimiento armónico simple.



Es correcto afirmar que:

a) La curva continua corresponde a $x(t)$ y la discontinua a $v(t)$.

b) Cualquiera de las dos curvas puede ser la $x(t)$ o la $v(t)$.

c) Si la curva continua corresponde a $x(t)$, la curva $v(t)$ debería estar desfasada un ángulo ·

d) La curva continua corresponde a $v(t)$ y la discontinua a $x(t)$.

11.12. Un bloque unido a un muelle describe un movimiento armónico simple sobre una superfi horizontal lisa. La amplitud del movimiento es 16 cm. En el instante en que 3/4 partes de la en gía mecánica del bloque se encuentran en forma de energía cinética, el bloque se encuentr:

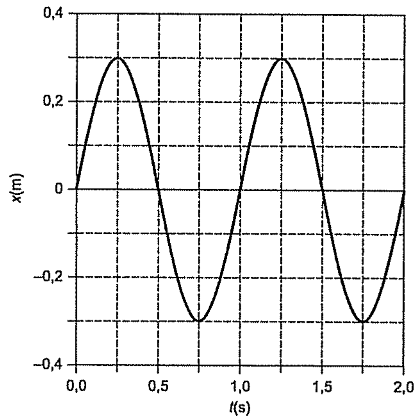
a) 12 cm del punto de equilibrio.

b) 8,0 cm del punto de equilibrio.

c) 4,0 cm del punto de equilibrio.

d) No se puede determinar sin conocer el valor de k.

11.13.1. Un objeto de 350 g realiza un movimiento armónico simple. En la figura se presenta la gráfica de la elongación en función del tiempo.



La ecuación de la elongación en función del tiempo en unidades del SI es:

a) $x(t) = 0{,}30 \cos(2\pi t + 0{,}25)$

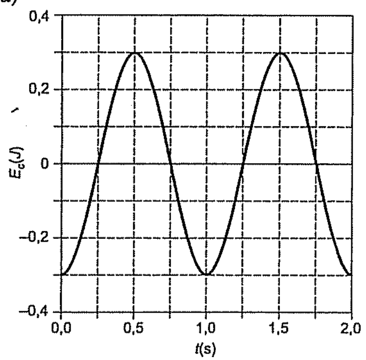
b) $x(t) = 0{,}60 \cos(t + \pi)$

c) $x(t) = 0{,}30 \cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

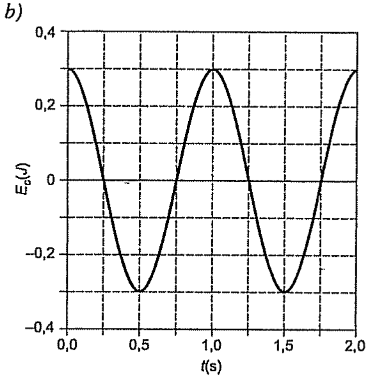
d) $x(t) = 0{,}30 \cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

11.13.2. La representación gráfica de la energía cinética de este objeto en función del tiempo es:

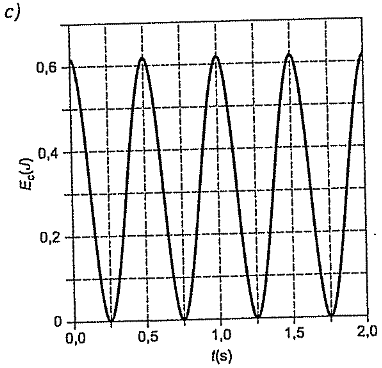
a)



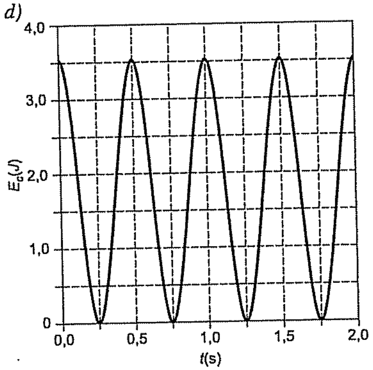
b)



c)



d)



11.14. Un objeto de 30 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud $A = 2{,}0$ cm. La constante recuperadora del movimiento es $k = 100$ N/m. Cuando se encuentra a 1,0 cm del origen de coordenadas su energía cinética es:

a) 10 mJ *b)* 20 mJ *c)* 15 mJ *d)* 30 J

11.15. En un movimiento armónico simple, es cierto que:

a) El periodo del movimiento es proporcional a la amplitud.

b) El periodo del movimiento es inversamente proporcional a la amplitud.

c) El periodo es independiente de la amplitud.

d) La amplitud depende del tiempo.

11.16. Una partícula describe un movimiento armónico simple. Su velocidad máxima es 1,0 m/s la aceleración máxima 2,0 m/s^2. La amplitud del movimiento es:

a) No hay suficientes datos para calcularla.

b) 1,0 m

c) 0,25 m

d) 0,50 m

11.17.1. Cuando un bloque de 0,20 kg se cuelga del extremo de un muelle vertical, éste se alarga 9 cm. Seguidamente se aparta el bloque 2,0 cm de la posición de equilibrio y se hace oscila

La constante recuperadora del muelle es:

a) 20 N/m *b)* 17 N/m *c)* 0,20 N/m *d)* 9,8 N/m

11.17.2. El periodo de las oscilaciones es:

a) 6,3 s *b)* 10 s *c)* 81 s *d)* 0,63 s

11.17.3. La amplitud del movimiento armónico es:

a) 2,0 cm *b)* 12 cm *c)* 7,8 cm *d)* 4,0 cm

11.17.4. La variación de energía potencial (elástica y gravitatoria) que experimenta el objeto al pasar de la posición de equilibrio a un punto situado 1,0 cm por encima del punto de equilibrio es:

a) 21 mJ *b)* 1,0 mJ *c)* 0,010 mJ *d)* 4,9 mJ

11.18. Una partícula de 100 g está ligada a un muelle de constante recuperadora k, y oscila en un medio viscoso con un movimiento armónico amortiguado. La ecuación del movimiento de esta partícula en unidades del SI es $x(t) = 3{,}0\, e^{-4{,}0t} \cos(5{,}0t + 3)$.

Es correcto afirmar que:

a) La amplitud de la oscilación es 3,0 m.

b) El periodo del movimiento es 2π.

c) La constante recuperadora del muelle es 4,1 N/m.

d) La constante recuperadora del muelle es 2,5 N/m.

11.19.1. Un oscilador armónico amortiguado tiene una masa de 10 g, la constante recuperadora es 0,49 N/m y $b = 0{,}10$ kg/s. Cuando $t = 0$ s la elongación es de 0,02 y la velocidad es cero.

La ecuación de la elongación en función del tiempo es

a) $x(t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\, e^{-5{,}0t} \cos(7{,}0t + \pi)$ *b)* $x(t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\, e^{-2{,}5t} \cos(4{,}9t + \frac{\pi}{2})$

c) $x(t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\, e^{-2{,}5t} \cos(7{,}0t + \pi)$ *d)* $x(t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\, e^{-5{,}0t} \cos(4{,}9t)$

11.19.2. Respecto al tipo de movimiento, es correcto afirmar que:

a) El factor de calidad es $Q = 0{,}70$ y en consecuencia el oscilador está subamortiguado.

b) El factor de calidad es $Q = 14$ y en consecuencia el oscilador está sobreamortiguado.

c) El factor de calidad es $Q = 0{,}50$ y en consecuencia el oscilador está críticamente amortiguado.

d) El factor de calidad es $Q = 1{,}4$ y en consecuencia el oscilador está subamortiguado.

11.19.3. El descenso de la energía mecánica en cada ciclo es del:

a) 0,10 % *b)* $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ % *c)* $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ % *d)* 1,1%

11.20. Un niño se columpia con un periodo de 3,0 s. En el instante $t = 0$ la amplitud de la oscilación del niño es A_0 y pasado un tiempo igual a ocho periodos la amplitud pasa a ser $A_0 \cdot e^{-1}$. La constante de tiempo del movimiento es:

a) 3,0 s *b)* 24 s *c)* 0,38 s *d)* 12 s

11.21. Un péndulo simple de 0,40 m de longitud oscila en el interior de un fluido viscoso. La energía del péndulo pasa de un valor inicial E_0 a un valor igual a $E_0 \cdot \exp(-1)$ en un tiempo de 90 s. El factor de calidad de este sistema es:

a) 5,0 *b)* 450 *c)* 90 *d)* 18

11.22. La frecuencia de un oscilador armónico forzado en régimen estacionario:

a) Coincide con la de la fuerza impulsora.

b) Coincide con la frecuencia natural de oscilación.

c) Depende de la constante de amortiguamiento.

d) Depende del tiempo.

11.23. La amplitud de oscilación de un oscilador armónico forzado en régimen estacionario:

a) Coincide con la de la fuerza impulsora.

b) Se extingue con el tiempo.

c) Depende de la constante de amortiguamiento.

d) Aumenta con el tiempo.

SOLUCIONES

11.1. *a)*
11.2. *a)*
11.3. *d)*
11.4. *c)*
11.5. *c)*
11.6. *c)*
11.7. *d)*
11.8. *c)*
11.9. *d)*
11.10. *d)*
11.11. *d)*
11.12. *b)*
11.13.1. *d)*
11.13.2. *c)*
11.14. *c)*
11.15. *c)*
11.16. *d)*
11.17.1. *a)*
11.17.2. *d)*
11.17.3. *a)*
11.17.4. *b)*
11.18. *c)*
11.19.1. *d)*
11.19.2. *a)*
11.19.3. *b)*
11.20. *d)*
11.21. *b)*
11.22. *a)*
11.23. *c)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Una partícula realiza un movimiento armónico simple. La expresión de la elongación en función del tiempo es (en unidades del SI):**

$$x(t) = 0{,}20 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Determinar:

a) La amplitud, el periodo y la constante de fase de este movimiento.

b) La elongación en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25s, 0,50 s y 0,75 s.

c) La velocidad en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25 s, 0,50 s y 0,75 s.

d) La aceleración en los instantes de tiempo $t = 0{,}00$ s, 0,25 s, 0,50 s y 0,75 s.

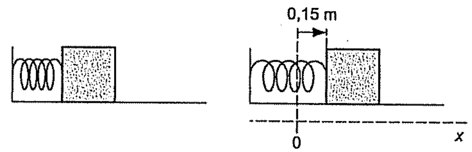
Sol.: *a)* $A = 20$ cm; $T = 2{,}0$ s; $\delta = -\pi/4$

b) $x(t = 0{,}00) = 0{,}14$ m; $x(t = 0{,}25) = 0{,}20$ m; $x(t = 0{,}50) = 0{,}14$ m; $x(t = 0{,}75) = 0{,}00$ m

c) $v(t = 0{,}00) = -0{,}44$ m/s; $v(t= 0{,}25) = 0{,}00$ m/s; $v(t = 0{,}50) = 0{,}44$ m/s; $v(t = 0{,}75) = 0{,}63$ m/s

d) $a(t = 0{,}00) = -1{,}4$ m/s^2; $a(t = 0{,}25) = -2{,}0$ m/s^2; $a(t = 0{,}50) = -1{,}4$ m/s^2; $a(t = 0{,}75) = 0{,}00$ m/s^2

2 **Un bloque de 0,80 kg descansa sobre un plano horizontal sin fricción. Cuando se separa el bloque 0,15 m del punto de equilibrio y se deja oscilar el sistema, se observa que el bloque realiza 20 oscilaciones en 30 segundos. Determinar:**



a) La constante recuperadora del muelle.

b) La ecuación de la elongación en función del tiempo.

Sol.: *a)* $k = 14$ N/m; *b)* $x(t) = 0{,}15 \cdot \cos(4{,}19\ t)$ en unidades del SI

3 **Una partícula de 0,20 kg oscila con un MAS de amplitud $A = 7{,}0$ cm. Cuando la partícula se encuentra en $x = 5{,}0$ cm su velocidad es $v = 2{,}0$ cm/s. Determinar:**

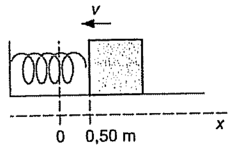
a) La constante k de la fuerza recuperadora.

b) La energía mecánica del oscilador.

c) La velocidad de la partícula cuando llegue a $x = 6{,}0$ cm.

Sol.: *a)* $k = 33$ mN/m; *b)* 16 μJ; *c)* 1,5 cm/s

4 **Un bloque de 1,2 kg ligado a un muelle de constante recuperadora $k = 30$ N/m oscila con un MAS de 1,5 m de amplitud. En el momento en que se empieza a contar el tiempo, el bloque se encuentra en $x = 0{,}50$ m moviéndose hacia la izquierda. Determinar:**



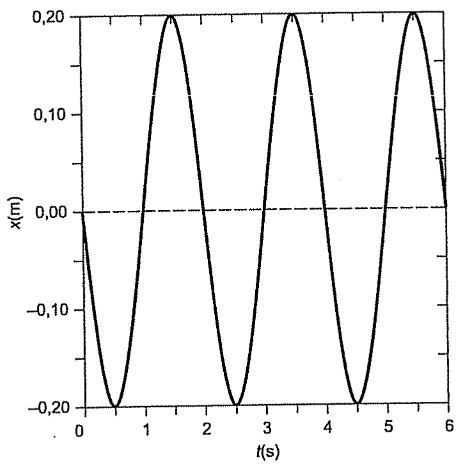
a) La ecuación de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

b) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración que alcanza el bloque.

Sol.: a) En unidades del SI: $x(t) = 1{,}50 \cdot \cos(5{,}00t + 1{,}23)$; $v(t) = -7{,}50 \cdot \operatorname{sen}(5{,}00t + 1{,}23)$; $a(t) = -37{,}5 \cdot \cos(5{,}00t + 1{,}23)$

b) $v_{máx} = 7{,}5$ m/s; $a_{máx} = 38$ m/s^2

5 La gráfica de la elongación en función del tiempo para un MAS es:



Determinar la expresión de la elongación en función del tiempo.

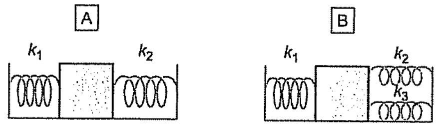
Sol.: $x(t) = 0{,}20 \cdot \cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (en unidades del SI)

6 Una boya de 3,0 kg flota sobre el mar. En un determinado momento una gaviota se pos sobre la boya hundiéndola 15 cm respecto a su posición de equilibrio. Cuando la gaviota alz el vuelo y abandona la boya, ésta última realiza un movimiento oscilatorio respecto a la posi ción de equilibrio. Despreciando los efectos de la fricción, determinar el periodo de la osci lación.

Datos: considerar la boya un cilindro de altura 50 cm con área de la base de 100 cm^2; densida del agua 1,0 g/cm^3.

Sol.: $T = 1{,}1$ s

7 Determinar la constante recuperadora equivalente de los siguientes sistemas:



Sol.: a) $k_{eq} = k_1 + k_2$; *b)* $k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$

8 Un carnicero pesa una pieza de carne con una balanza de resorte de constante recuperadora $k = 150$ N/m. La pieza provoca un alargamiento del muelle de la balanza de 39 cm. Seguidamente aparta 10 cm la pieza de la posición de equilibrio y deja oscilar el sistema. Determinar:

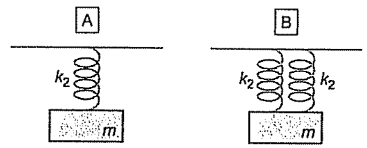
a) La masa de la pieza de carne.

b) La ecuación de la elongación del muelle en función del tiempo (despreciando los efectos de la fricción).

c) La variación de energía potencial total (gravitatoria más elástica) que experimenta el trozo de carne al desplazarse de un punto situado 5,0 cm sobre el punto de equilibrio a un punto situado 7,0 cm por debajo del de equilibrio.

Sol.: a) 6,0 kg; *b)* en unidades del SI: $y(t) = 0{,}10 \cdot \cos(5{,}0t)$; *c)* 0,18 J

9 Un bloque de masa $m = 3{,}1$ kg se cuelga de un muelle vertical de constante recuperadora k_1 provocándole un alargamiento de 30 cm. Seguidamente el muelle se parte por la mitad siendo la constante recuperadora de cada una de las mitades k_2. Determinar el valor de la constante recuperadora equivalente y el alargamiento respecto a la longitud natural en las dos situaciones siguientes:



a) Cuando se cuelga el bloque de una de las dos mitades.

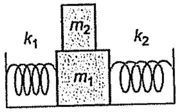
b) Cuando se unen las dos mitades del techo y se cuelga el bloque de ellas.

Sol.: a) $k_2 = 2 \cdot k_1 = 0{,}20$ kN/m; 15 cm; *b)* $k_{eq} = 2 \cdot k_2 = 4 \cdot k_1 = 0{,}41$ kN/m; 7,5 cm

10 Un bloque de masa $m_1 = 5{,}0$ kg está unido a las paredes mediante dos muelles de constantes recuperadoras $k_1 = 100$ N/m y $k_2 = 200$ N/m. Sobre este bloque descansa un segundo bloque de masa $m_2 = 1{,}0$ kg. Entre el bloque 1 y el suelo no existe fricción, y el coeficiente de fricción estático entre los bloques 1 y 2 es $\mu_e = 0{,}60$. El sistema se aparta de su posición de equilibrio y se deja oscilar de manera que el bloque 2 no deslice sobre la superficie del 1. Determinar:

a) El periodo de las oscilaciones.

b) La amplitud máxima de oscilación para la cual no existe deslizamiento entre las superficies de los bloques 1 y 2.



Sol.: *a)* 0,89 s; *b)* 12 cm

11 **Un péndulo simple que en la Tierra tiene un periodo de 3,0 s se lleva a la Luna, donde la aceleración de la gravedad es 1,58 m/s^2. Determinar el periodo del péndulo en la superficie lunar.**

Sol.: 7,5 s

12 **Un disco de masa m = 0,40 kg y radio 10 cm se cuelga por un punto que dista 8,0 cm de su centro de masas. El sistema se aparta ligeramente del equilibrio y se deja oscilar libremente. Determinar:**

a) El periodo de las oscilaciones.

b) La longitud del péndulo simple equivalente.

Dato: el momento de inercia de un disco respecto a un eje perpendicular a su superficie y que pasa por su centro de masas es: $I_{CM} = 1/2\ MR^2$.

Sol.: *a)* 0,76 s; *b)* 14 cm

13 **Un anillo de 0,70 kg y de 30 cm de radio se suspende de un clavo, se separa ligeramente del equilibrio y se deja oscilar. Se observa que la amplitud de la oscilación disminuye un 3,0 % en cada periodo. Determinar:**

a) La constante de tiempo del movimiento.

b) El descenso de la energía mecánica del sistema en un periodo.

c) El factor de calidad del sistema.

Dato: el momento de inercia de un anillo respecto a un eje perpendicular a su superficie que pas por el centro de masas es $I_{CM} = m \cdot R^2$.

Sol.: *a)* 26 s; *b)* la energía mecánica disminuye un 6,0 % en cada periodo; *c)* Q = 100

14 **Los amortiguadores de un coche se diseñan para que atenúen las vibraciones producida por los baches de la carretera y de esta forma los ocupantes del vehículo apenas las perci ban. Supongamos un coche de 1000 kg sin amortiguación. Cuando se empuja hacia abaj la carrocería y se deja oscilar libremente se observa que oscila con un periodo de 0,50 Determinar:**

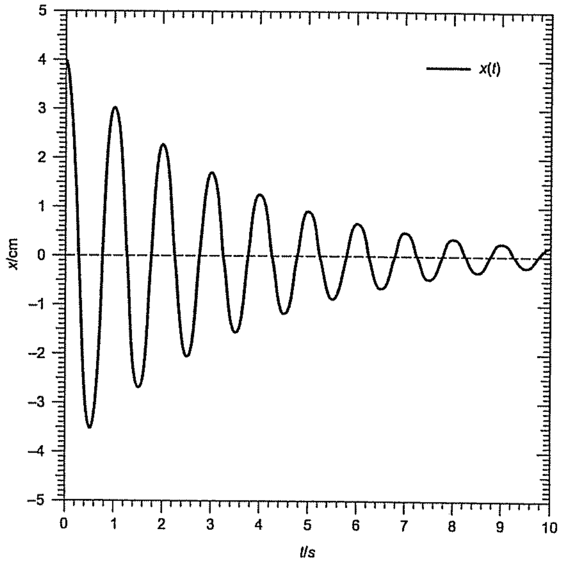
a) La constante de tiempo que deberá tener el sistema con los amortiguadores instalados para qu se encuentre ligeramente subamortiguado, con un factor de calidad Q = 1,6.

b) El tiempo necesario para que la amplitud de la oscilación del sistema amortiguado se redu ca en un factor 100.

c) El periodo de las oscilaciones amortiguadas.

Sol.: *a)* 0,13 s; *b)* 0,12 s; *c)* 0,53 s

15 **En la siguiente gráfica se presenta la elongación respecto al tiempo para un oscilador arm nico amortiguado. Escribir la ecuación de la elongación en función del tiempo.**



Sol.: $x(t) = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-0{,}30t} \cos(2\pi t)$ en unidades del sistema internacional.

16 **Un oscilador armónico amortiguado de masa m = 12 kg, frecuencia natural ω_0 = 5,0 rad/s y constante de tiempo τ = 20 s se conecta a un motor que le imprime una fuerza que varía senoidalmente con el tiempo según la expresión F = 40 N cos (2,0t). Determinar la ecuación de la elongación en función del tiempo en el régimen estacionario.**

Sol.: $x(t) = 1{,}6 \cos(2{,}0\ t + 4{,}8 \cdot 10^{-3})$ en unidades del SI

17 **Determinar el valor de la frecuencia de la fuerza impulsora ω_F de un oscilador armónico forzado para el cual el desfase entre la fuerza impulsora y la elongación es $\pi/2$. Considerar la constante de tiempo igual a τ y la frecuencia natural del oscilador ω_0. Escribir la expresión de la elongación en función del tiempo para el valor de ω_F calculado, y también la expresión de la velocidad en función del tiempo.**

Sol.: $\omega_F = \omega_0$; $x(t) = \dfrac{F_0\,\tau}{m\,\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$; $v(t) = -\dfrac{F_0\,\tau}{m}\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

18 **Determinar el valor de la frecuencia de la fuerza impulsora ω_F de un oscilador armónico forzado para el cual la amplitud de la oscilación es máxima. Considerar la constante de tiempo igual a τ y la frecuencia natural del oscilador ω_0.**

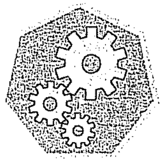
Sol.: $\omega_F = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{2\tau^2}}$

19 **Deducir la expresión de la elongación en función del tiempo de un oscilador armónico simple, sin amortiguamiento, al que se aplica una fuerza impulsora del tipo:**

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$$

Determinar la frecuencia ω_F de resonancia de este oscilador, para la cual la amplitud de la oscilación es máxima.

Sol.: $x(t) = \dfrac{F_0}{m(\omega_F^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega_F t);\ \omega_F = \omega_0$



CAPÍTULO 12

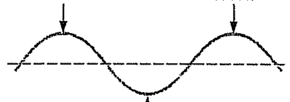
ONDAS

12.1. ONDAS

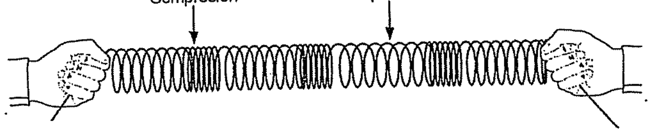
Una *onda* es una perturbación que se propaga por el espacio transportando energía y cantidad de movimiento sin un transporte neto de materia.

En este capítulo restringiremos el estudio a las ondas mecánicas. Más adelante se tratarán las ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío. Las *ondas mecánicas* se propagan a través de un medio material que es perturbado. Ejemplos de ondas mecánicas son las ondas sonoras, las olas, las ondas que se propagan en cuerdas, muelles, etc.

Las ondas pueden clasificarse según la dirección en que se produce la perturbación. Las *ondas transversales* son aquellas en que la perturbación se produce en dirección perpendicular a la dirección de propagación. Por ejemplo, en la figura se muestra la onda que se propaga en una cuerda, en ella los puntos de la cuerda se mueven en dirección vertical mientras la onda avanza en dirección horizontal.



Las *ondas longitudinales* son aquellas en que la perturbación se produce en la misma dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, en la figura se muestra una onda de compresión en un muelle, en ella las partículas del muelle oscilan en dirección horizontal, la misma dirección de avance de la onda. Las ondas sonoras son otro ejemplo de ondas longitudinales.



No todas las ondas pueden englobarse en una de estas dos categorías, las olas del mar, sin ir más lejos, no son ni transversales ni longitudinales ya que las partículas del agua efectúan un movimiento circular.

12.2. VELOCIDAD DE LAS ONDAS

La velocidad de propagación de las ondas en un medio material depende exclusivamente de las características de este medio.

La velocidad (v) de las ondas que se propagan en una cuerda depende de la tensión (T) de la cuerda y de su densidad lineal de masa (μ):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La velocidad de las ondas sonoras depende de las propiedades del medio (temperatura, densidad, humedad, rigidez...) en que se están propagando. En general el sonido se propaga más lentamente en un gas que en un líquido, y en un líquido que en un sólido. Por ejemplo, la velocidad de propagación del sonido en aire seco a 0 °C es de 331 m/s, en el agua de mar a 8 °C es de 1435 m/s y en el acero de unos 5,0 km/s.

12.3. FUNCIÓN DE ONDA Y ECUACIÓN DE ONDAS

La *función de onda* $y = f(x,t)$ es la expresión que indica la posición y, respecto a la posición de equilibrio, de cualquier partícula de la onda situada a una distancia x del origen de coordenadas en cualquier instante de tiempo t. Las funciones de onda de cualquier tipo de onda tienen en común que cumplen la ecuación de ondas.

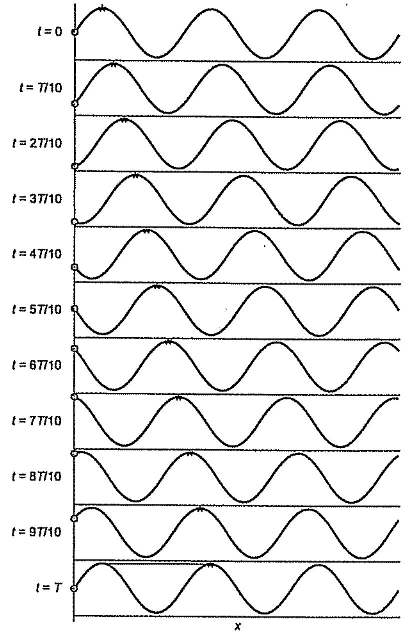
La *ecuación de ondas* es una ecuación diferencial que relaciona la derivada segunda temporal de la función de ondas con su derivada segunda espacial. Para ondas que se propagan en la dirección del eje x, la ecuación de ondas es:

$$\frac{\delta^2 f(x \cdot t)}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 f(x \cdot t)}{\delta x^2}$$

12.4. ONDAS ARMÓNICAS

Las *ondas armónicas* se generan cuando un punto de un medio se perturba con un movimiento armónico simple. Las ondas armónicas también se denominan *ondas sinusoidales* u *ondas planas*.

Por ejemplo, en una cuerda, cuando se hace oscilar un punto de la misma con un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T se genera una onda armónica que avanza a lo largo de la cuerda. En la figura se representa el perfil de la cuerda en distintos instantes de tiempo, a lo largo de un periodo. El punto marcado con un círculo corresponde a un punto cualquiera de la cuerda que oscila en dirección vertical con movimiento armónico simple; a lo largo de la secuencia representada en la figura el punto completa una oscilación. El punto marcado con un asterisco corresponde a un punto cualquiera de la onda, puede observarse cómo la perturbación avanza a lo largo de la cuerda.



La función de ondas, cuando la onda viaja hacia la derecha, viene dada por una expresión del tipo:

$$y\,(x,\,t) = A\text{sen}\,(kx - \omega t + \delta)$$

Y cuando la onda viaja hacia la izquierda, por:

$$y\,(x,\,t) = A\text{sen}\,(kx + \omega t + \delta)$$

Donde A es la *amplitud* de oscilación, o la máxima distancia que se apartan los puntos de la cuerda de la posición de equilibrio. En el SI se expresa en metros (m).

ω es la *frecuencia angular* o *pulsación* con que oscilan los puntos de la cuerda, en el SI se expresa en rad/s, o lo que es equivalente en s^{-1}.

La *frecuencia* de la oscilación es $f = \frac{\omega}{2\pi}$ y se expresa en hertz (Hz).

k es el *número de onda*, en el SI viene dado en rad/m o en m^{-1}. El número de onda está relacionado con la *longitud de onda* λ mediante $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. La longitud de onda es la distancia entre dos crestas consecutivas y en el SI se expresa en metros (m).

δ es la *constante de fase*. Su valor depende de las condiciones iniciales del problema.

En la figura se aprecia que en un periodo, es decir, el tiempo que los puntos de la cuerda invierten en realizar una oscilación completa, la perturbación avanza una distancia igual a λ. En consecuencia, se puede establecer la siguiente relación entre la velocidad de avance de la perturbación v, el periodo T y la longitud de onda λ:

$$\lambda = vT$$

O lo que es equivalente: $v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$

En este capítulo también estudiaremos ondas sonoras armónicas. Cuando, por ejemplo, las partículas de aire oscilan con movimiento armónico simple se genera una onda sonora de tipo armónico, ésta puede describirse como una onda de desplazamiento, en función de los desplazamientos de las partículas respecto a la posición de equilibrio, mediante una función de onda:

$$s\,(x,\,t) = s_0\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

O bien como una onda de presión, en función de las variaciones de presión respecto a la presión de equilibrio:

$$p\,(x,\,t) = p_0\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Los valores máximos de desplazamiento corresponden siempre a valores nulos de la presión relativa y viceversa, por este motivo las dos funciones de onda están desfasadas $\frac{\pi}{2}$.

Los valores máximos del desplazamiento s_0 y de la presión relativa p_0 están relacionados entre sí mediante la siguiente expresión:

$$p_0 = \rho\omega v s_0$$

donde ρ es la densidad del medio.

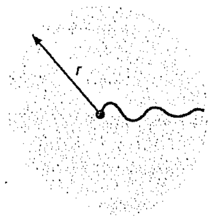
12.5 POTENCIA E INTENSIDAD DE UNA ONDA

La *potencia* es la energía por unidad de tiempo que transporta una onda, y en el SI se expresa en watts (W). Cuando las ondas se propagan en una sola dimensión y no hay pérdidas de energía, la potencia se transmite perfectamente a lo largo de la dirección de propagación.

En una cuerda, la potencia media que transporta una onda armónica viene dada por:

$$P_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

Cuando, en cambio, un foco emite una onda que se propaga por el espacio, la energía que emite en un instante de tiempo queda repartida sobre todo el frente de ondas a medida que éste avanza.



Por este motivo, en el caso de ondas tridimensionales es preciso introducir una nueva magnitud denominada intensidad de la onda. La *intensidad* de una onda en un punto es la potencia media que atraviesa una superficie unidad colocada en este punto perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

La intensidad de una onda en un punto situado a una distancia r de un foco que emite en todas direcciones (suponiendo que la onda se propaga en un medio homogéneo e isótropo y que no hay pérdidas de energía) es:

$$I = \frac{P_m}{4\pi r^2}$$

En el SI la intensidad de una onda se expresa en W/m^2.

La intensidad de una onda también puede calcularse como el producto de la densidad de energía del medio η en que se propaga por la velocidad de propagación v.

$$I = \eta \cdot v$$

La intensidad de una onda sonora en un punto del espacio viene dada por:

$$I = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{2\rho v}$$

El oído humano percibe intensidades que se encuentran entre 10^{-12} W/m^2 (umbral de audición) y 1 W/m^2 (umbral de dolor). La respuesta del oído humano a la intensidad no es lineal, sino logarítmica, por este motivo se caracteriza por el *nivel de intensidad sonora* β que viene dado por:

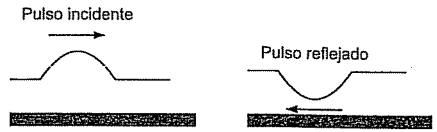
$$\beta = 10\ \text{dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{donde } I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

En el SI β se expresa en decibelios (dB).

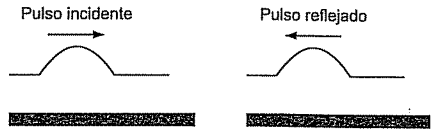
12.6 COMPORTAMIENTO DE LAS ONDAS EN UNA FRONTERA

Cuando una onda *incidente* llega a la frontera que separa dos medios, parte de la energía se *refleja* y parte se *transmite*.

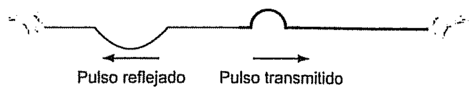
Consideremos una cuerda sujeta por un extremo. Un pulso ondulatorio viaja por la cuerda, cuando llega al extremo parte de la energía se transmite a la fijación y parte se refleja. El pulso reflejado está invertido respecto al incidente.



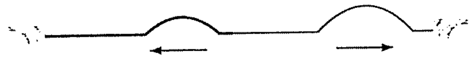
Cuando el extremo de la cuerda puede oscilar libremente, el pulso reflejado no se invierte respecto al incidente.



Consideremos ahora dos cuerdas unidas en un punto, la primera con menor densidad lineal de masa que la segunda. Cuando se envía un pulso, al llegar al punto de unión aparece un pulso reflejado (invertido respecto al incidente) y un pulso transmitido que se propaga por la segunda cuerda. Si se desprecian las pérdidas, la potencia del pulso incidente deberá ser igual a la del pulso reflejado más la del transmitido.



Cuando la primera cuerda tiene mayor densidad lineal de masa que la segunda el pulso reflejado no sufre ninguna inversión.



12.7. INTERFERENCIAS

La *interferencia* es un fenómeno que se produce cuando en un punto del espacio coinciden dos o má ondas. Las interferencias se explican con una propiedad general de los fenómenos ondulatorios cono cida como principio de superposición. El *principio de superposición* establece que cuando dos o má ondas coinciden en un punto del espacio, la ecuación de la perturbación resultante puede obteners como la suma algebraica de las funciones de onda de cada una de las ondas.

Seguidamente mostraremos algunos ejemplos de interferencias de ondas armónicas que se propa gan en la misma dirección.

INTERFERENCIA DE ONDAS ARMÓNICAS DESFASADAS ENTRE ELLAS

Vamos a suponer dos ondas armónicas idénticas que se desplazan en la dirección y sentido del eje que se encuentran desfasadas un ángulo δ. Sus funciones de onda son:

$$y_1(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

Atendiendo al principio de superposición, la ecuación de la onda resultante vendrá dada por:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad ($$

Se obtiene:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

La función de onda resultante es la de una onda armónica de igual frecuencia y longitud de on que las ondas que interfieren, y cuya amplitud es:

$$A' = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Para un desfase $\delta = \pi$, la amplitud resultante es cero. Las ondas que interfieren se encuentran oposición de fase y la interferencia es destructiva.

Para $\delta = 0$, se obtiene $A' = 2A$. Las ondas que interfieren están en fase y la interferencia es cor tructiva.

PULSACIONES

Consideremos ahora dos ondas sonoras con la misma amplitud de presión p_0, y con frecuencias f_1 y f_2 ligeramente distintas, que coinciden en un punto del espacio.

En este punto, la presión sonora de las dos ondas variará con el tiempo según las expresiones:

$$p_1(t) = p_0\,\text{sen}(\omega_1 t)$$

$$p_2(t) = p_0\,\text{sen}(\omega_2 t)$$

La presión sonora resultante se calculará aplicando el principio de superposición:

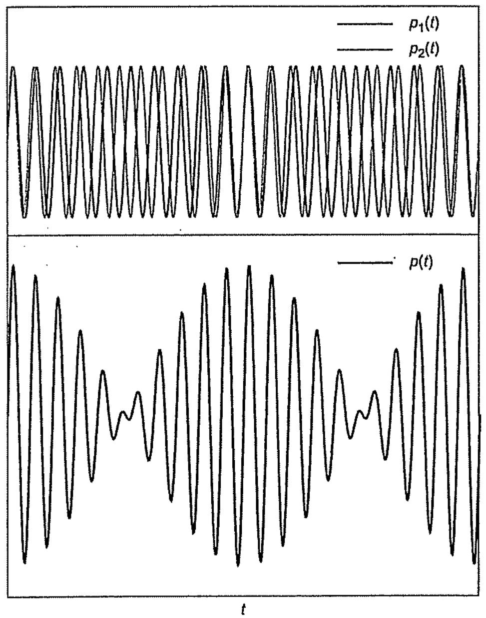
$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = p_0\,\text{sen}(\omega_1 t) + p_0\,\text{sen}(\omega_2 t)$$

Aplicando la identidad (1) se obtiene:

$$p(t) = 2p_0\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

En la parte superior de la gráfica se muestra la evolución temporal de las dos ondas de presión en un punto. Se observa que a medida que transcurre el tiempo las ondas se desfasan progresivamente como consecuencia de su diferencia de frecuencia, para luego más tarde volver a estar en fase. En la gráfica inferior se presenta la onda resultante de la interferencia. Ésta es una onda de tipo sinusoidal cuya frecuencia f es igual al valor medio de las frecuencias de las ondas que interfieren:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$



Además su amplitud varía desde $2p_0$, cuando las dos ondas que interfieren están en fase, hasta hacerse cero cuando las ondas precursoras están desfasadas 180°. Estas variaciones de la amplitud se perciben como variaciones de la intensidad del sonido y se conocen con el nombre de *batidos* o *pulsaciones*. La frecuencia a la que se producen estas pulsaciones es igual a la diferencia de frecuencia de las dos ondas que interfieren:

$$f_{pulsación} = |f_1 - f_2|$$

ONDAS ESTACIONARIAS

Seguidamente estudiaremos la interferencia que se produce cuando dos ondas armónicas idénticas que viajan con la misma dirección y sentido opuesto coinciden en el espacio.

Considérese las funciones de onda:

$$y_1(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2(x, t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

La función de onda resultante de la interferencia se calculará con el principio de superposición:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

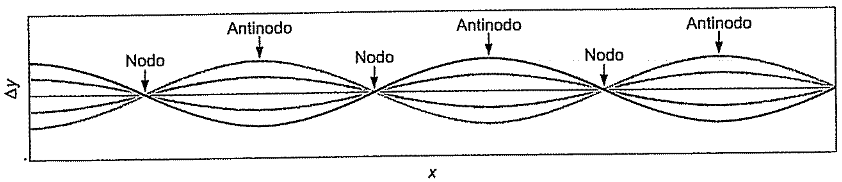
Aplicando la identidad (1) se obtiene la función de ondas de una onda estacionaria:

$$\boxed{y(x, t) = 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)} \quad (2$$

Esta función tiene la parte espacial desacoplada de la parte temporal. Obsérvese que de ella se deduce que un punto cualquiera x_1 de la onda oscila con un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω (igual a la de las ondas precursoras) y de amplitud:

$$A' = 2A \operatorname{sen}(kx_1) \quad (3$$

Los puntos de la onda cuya amplitud de vibración es máxima se denominan *antinodos* o *vientre* y aquellos cuya amplitud es nula *nodos*. En la siguiente figura se representa la evolución temporal d una onda estacionaria.

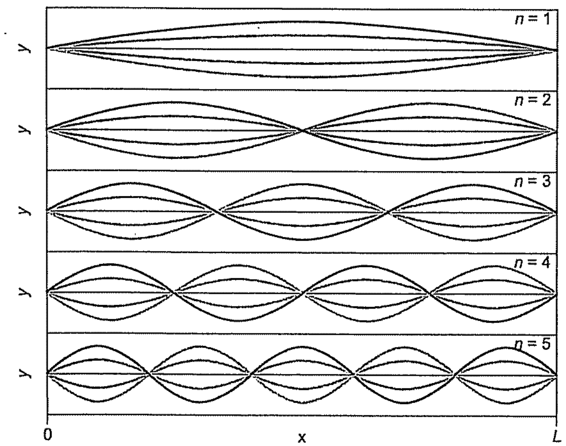


En tal situación parece como si la onda no avanzara, de ahí que se denomine onda estacionaria.

Es frecuente encontrar ondas estacionarias en sistemas confinados entre dos límites. Este es el cas de una cuerda (como la cuerda de un instrumento musical) o de un tubo (como un tubo de órgano).

En una *cuerda* de longitud *L con ambos extremos fijos*, la onda que se propaga interfiere con la ondas reflejadas en los extremos dando lugar, para ciertas frecuencias, a una onda estacionaria. Si cuerda tiene los dos extremos fijos, la onda estacionaria debe tener un nodo en ambos extremos. E la figura se representan algunas de las posibles formas de onda. Todas cumplen que la longitud de cuerda es igual a un número entero de semilongitudes de onda:

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, 4...$$



Y en consecuencia, las posibles frecuencias son aquellas que verifican:

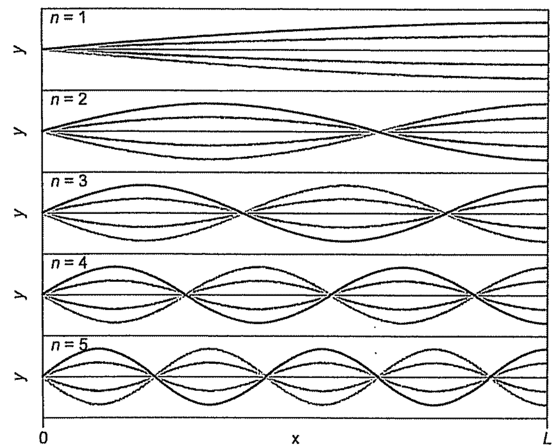
$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, 4...$$

siendo v la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

La frecuencia más pequeña f_1 recibe el nombre de *frecuencia fundamental* o *primer armónico*. El resto se denominan, en función del valor de n, segundo armónico, tercer armónico, etc.

Cuando la *cuerda tiene un extremo fijo y el otro libre* la onda estacionaria que en ella se produce tiene un nodo en el extremo fijo y un antinodo en el libre. En la figura se presentan algunas de las posibles formas de onda. Todas tienen en común que la longitud de la cuerda es un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda.

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{4}} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, 7... \quad \text{impar}$$



Y en consecuencia, las posibles frecuencias son aquellas que verifican:

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{4L}} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, 7...$$

siendo v la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

La frecuencia más pequeña f_1 también se la conoce como *frecuencia fundamental* o *primer armónico*. El resto se denominan, en función del valor de n, tercer armónico, quinto armónico, etc.

Las ondas estacionarias que se generan en un tubo órgano con un extremo cerrado y el otro abierto son del mismo tipo que las descritas anteriormente. En este caso en el extremo cerrado se genera un nodo de desplazamiento (o antinodo de presión) y cerca del extremo abierto un antinodo de desplazamiento (o nodo de presión). La longitud de la columna de aire vibrante L no coincide exactamente con la longitud del tubo debido al defecto de boca.

12.8. EFECTO DOPPLER

El *efecto Doppler* se produce cuando el emisor de una onda y el receptor están en movimiento relativo con respecto al medio en que se propaga la onda. Este efecto consiste en una variación de la frecuencia f' que percibe el receptor respecto a la frecuencia f_0 del emisor.

Sean u_r y u_e las velocidades del receptor y el emisor respecto al medio de propagación de la onda v la velocidad de propagación de la onda y f_0 la frecuencia de la onda. La frecuencia f' que percibe e receptor viene dada por:

$$f' = \left(\frac{v - u_r}{v - u_e}\right) f_0$$

Las velocidades u_r y u_e se consideran positivas cuando tienen el mismo sentido del vector que un el emisor con el receptor, y negativas cuando tienen sentido contrario.

Seguidamente se particulariza la expresión anterior a distintas situaciones.

RECEPTOR EN MOVIMIENTO

Consideremos un emisor en reposo que emite una onda de frecuencia f_0 y un receptor que se muev en la dirección de la recta que lo une con el emisor. La velocidad de propagación de la onda es v.

Cuando el receptor se acerca al emisor con velocidad u_r la frecuencia que percibe es superior a f y viene dada por:

$$f' = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) f_0$$

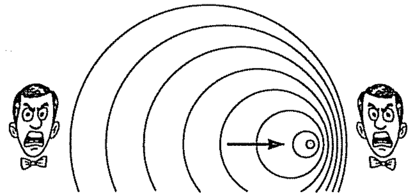
Cuando el receptor se aleja del emisor con velocidad u_r la frecuencia que percibe es inferior a f_0 viene dada por:

$$f' = \left(1 - \frac{u_r}{v}\right) f_0$$

EMISOR EN MOVIMIENTO

Consideremos un emisor que se mueve con velocidad u_e. La frecuencia del emisor cuando se encuentra en reposo es f_0. La longitud de onda en los puntos que se encuentran por delante del emisor es:

$$\lambda = \frac{v - u_e}{f_0}$$



Y por detrás del emisor:

$$\lambda = \frac{v + u_e}{f_0}$$

En consecuencia, si el receptor se encuentra en reposo y el emisor se mueve en la dirección de la recta que le une con el receptor, cuando el emisor se acerca al receptor con velocidad u_e la frecuencia que este último percibe es superior a f_0 y viene dada por:

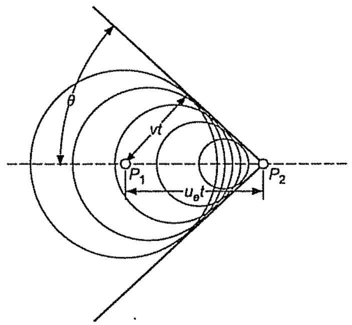
$$f' = \frac{1}{1 - \frac{u_e}{v}} f_0$$

Y cuando se aleja la frecuencia percibida es inferior a f_0 e igual a:

$$f' = \frac{1}{1 + \frac{u_e}{v}} f_0$$

12.9. ONDAS DE CHOQUE

Las *ondas de choque* se generan cuando el foco emisor de una onda viaja a velocidad superior a la de propagación de la onda.



La relación entre la rapidez del emisor u_e y la rapidez de la onda v se llama *número de Mach*:

$$\text{Mach} = \frac{u_e}{v}$$

Y el ángulo que forma la onda de choque con la dirección de avance del emisor es:

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{v}{u_e}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje x y viene dada por la siguiente expresión (en unidades del SI).

$$y\,(x,\,t) = 0{,}45 \cos\,(2{,}0x - 3{,}0\,t)$$

Determinar:

a) La longitud de la onda, la frecuencia en que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.

b) La ecuación del movimiento de un punto situado a $x = 1{,}0$ m del origen de coordenadas. La distancia que separa este punto de la posición de equilibrio en los instantes $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s.

c) La ecuación de la velocidad de un punto cualquiera en función del tiempo.

d) La expresión de la velocidad de un punto situado en $x = 1{,}0$ m en función del tiempo y su valor en los instantes $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s.

e) La ecuación de la aceleración de un punto cualquiera en función del tiempo.

f) La expresión de la aceleración de un punto situado en $x = 1{,}0$ m en función del tiempo y su valor en los instantes $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s.

Solución

a) La onda armónica que nos ocupa: $y\,(x,\,t) = 0{,}45 \cos\,(2{,}0x - 3{,}0\,t)$ tiene amplitud $A = 0{,}4$ m, número de onda $k = 2{,}0\ \text{m}^{-1}$, y frecuencia angular $\omega = 3{,}0\ \text{s}^{-1}$.

La longitud de la onda viene dada por $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$. Sustituyendo por los valores numéricos queda $\lambda = \dfrac{2\pi}{2\ \text{m}^{-1}} = 3{,}14$ m; $\lambda = 3{,}1$ m.

La frecuencia es $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$. Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$f = \frac{3{,}0\ \text{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}477\ \text{Hz}; \quad f = 0{,}48\ \text{Hz}$$

La velocidad con que se propaga la onda se puede calcular haciendo: $v = \lambda f = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\omega}{k}$. Sustituyendo por los valores numéricos queda: $v = \dfrac{3{,}0\ \text{s}^{-1}}{2{,}0\ \text{m}^{-1}} = 1{,}5$ m/s.

b) La ecuación del movimiento de un punto situado a 1,0 m del origen de coordenadas se obtendrá sustituyendo $x = 1{,}0$ m en la función de onda. En unidades del SI queda:

$$y\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t) = 0{,}45 \cos\,(2{,}0 - 3{,}0\,t)$$

En el instante $t = 1{,}0$ s la elongación de $x = 1{,}0$ m es:

$$y\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t = 1{,}0\ \text{s}) = 0{,}45 \cos\,(2{,}0 - 3{,}0) = 0{,}243\ \text{m}$$

El punto situado a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 1{,}0$ s se encuentra 24 cm por encima del punto de equilibrio.

En el instante $t = 2{,}0$ s la elongación del punto $x = 1{,}0$ m es:

$$y\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t = 2{,}0\ \text{s}) = 0{,}45 \cos\,(2{,}0 - 6{,}0) = -0{,}294\ \text{m}$$

El punto situado a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 2{,}0$ s se encuentra 29 cm por debajo del punto de equilibrio.

c) La velocidad de un punto cualquiera se determinará hallando la derivada temporal de la función de onda. En unidades del SI queda:

$$v\,(x,\,t) = \frac{\partial y\,(x,\,t)}{\partial t}; \quad v\,(x,\,t) = 0{,}45 \cdot 3{,}0 \text{ sen}\,(2{,}0x - 3{,}0t); \quad v\,(x,\,t) = 1{,}35 \cdot \text{sen}\,(2{,}0x - 3{,}0t) \quad (1)$$

d) La expresión de la velocidad en función del tiempo para la partícula situada en $x = 1{,}0$ m es:

$$v\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t) = 1{,}35 \cdot \text{sen}\,(2{,}0 \cdot 1{,}0 - 3{,}0t); \quad v\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t) = 1{,}35 \cdot \text{sen}\,(2{,}0 - 3{,}0t)$$

La velocidad de esta partícula en $t = 1{,}0$ s viene dada por:

$$v\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t = 1{,}0\ \text{s}) = 1{,}35 \cdot \text{sen}\,(2{,}0 - 3{,}0) = -1{,}14\ \text{m/s}$$

La partícula situada a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 1{,}0$ s se mueve en dirección descendente a 1,1 m/s.

La velocidad de esta partícula en $t = 2{,}0$ s viene dada por:

$$v\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t = 2{,}0\ \text{s}) = 1{,}35 \cdot \text{sen}\,(2{,}0 - 6{,}0) = 1{,}02\ \text{m/s}$$

La partícula situada a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 2{,}0$ s se mueve en dirección ascendente a 1,0 m/s.

e) La aceleración de un punto cualquiera se determinará hallando la derivada temporal de la ecuación (1). En unidades del SI queda:

$$a\,(x,\,t) = \frac{\partial v\,(x,\,t)}{\partial t}; \quad a\,(x,\,t) = -0{,}45 \cdot (3{,}0)^2 \cos\,(2{,}0x - 3{,}0t); \quad a\,(x,\,t) = -4{,}05 \cos\,(2{,}0x - 3{,}0t)$$

f) La expresión de la aceleración en función del tiempo para la partícula situada en $x = 1{,}0$ m es:

$$a\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t) = -4{,}05 \cdot \cos\,(2{,}0 \cdot 1{,}0 - 3{,}0t); \quad a\,(x = 1{,}0\ m,\, t) = -4{,}05 \cdot \cos\,(2{,}0 - 3{,}0t)$$

La aceleración de esta partícula en $t = 1{,}0$ s viene dada por:

$$a\,(x = 1{,}0\ m,\, t = 1{,}0\ s) = -4{,}05 \cdot \cos\,(2{,}0 - 3{,}0) = -\,2{,}18\ \text{m/s}^2$$

La partícula situada a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 1{,}0$ s tiene aceleración descendente de 2,2 m/s^2.

La aceleración de esta partícula en $t = 2{,}0$ s viene dada por:

$$a\,(x = 1{,}0\ \text{m},\, t = 2{,}0\ \text{s}) = -4{,}05 \cdot \cos\,(2{,}0 - 6{,}0) = 2{,}65\ \text{m/s}^2$$

La partícula situada a 1,0 m del origen de coordenadas, en el instante $t = 2{,}0$ s tiene aceleración ascendente de 2,7 m/s^2.

12.2. Una onda armónica se propaga por una cuerda con amplitud $A = 0{,}10$ m. Un punto de la cuerda tarda 1,1 s en completar una oscilación y la longitud de la onda es de 50 cm. En el instante en que se empieza a contar el tiempo, $t = 0$, el punto de la cuerda situado sobre el origen de coordenadas se encuentra 0,10 m por encima del punto de equilibrio.

a) Determinar la función de onda.

b) En el instante de tiempo $t = 0$, ¿qué puntos de la cuerda tienen elongación máxima, mínima y cero?

c) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración de los puntos de esta cuerda.

Solución

a) La función de onda armónica es del tipo:

$$y\,(x, t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \delta)$$

El número de ondas es $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. Sustituyendo la longitud de onda por $\lambda = 0{,}50$ m, queda:

$$k = \frac{2\pi}{0{,}50\text{ m}} = 12{,}6\text{ m}^{-1}$$

La frecuencia angular es $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Sustituyendo el periodo por $T = 1{,}1$ s, queda:

$$\omega = \frac{2\pi}{1{,}1\text{ s}} = 5{,}71\text{ s}^{-1}$$

El enunciado indica que $y\,(x = 0, t = 0) = A$. Sustituyendo en la función de onda:

$$y\,(x = 0, t = 0) = A\,\text{sen}\,(\delta) = A$$

En consecuencia, la constante de fase será $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, y la función de onda quedará en unidades del SI

$$y\,(x, t) = 0{,}10\,\text{sen}\left(12{,}6\,x - 5{,}71\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

O lo que es equivalente:

$$y\,(x = t) = 0{,}10\cos\,(12{,}6\,x - 5{,}71\,t) \qquad (1$$

b) La ecuación de la elongación de los puntos de la cuerda en $t = 0$, se obtiene sustituyendo en la función de onda (1):

$$y\,(x, t = 0) = 0{,}10\cos\,(12{,}6\,x)$$

Los puntos con elongación máxima son aquellos para los que se cumpla que:

$$\cos\,(12,\,6x) = 1 \Rightarrow 12{,}6x = 2\pi n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

despejando x de la expresión anterior se obtiene:

$$x = \frac{2\pi}{12{,}6}\,n \qquad x = 0{,}499\text{ m}\cdot n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

En consecuencia, los puntos situados a 0,0 m, 0,50 m, 1,0 m, 1,5 m, 2,0 m, 2,5 m, etc. del origen de coordenadas tendrán elongación máxima.

Los puntos con elongación mínima son aquellos para los que se cumple que:

$$\cos\,(12{,}6x) = -1 \quad\Rightarrow\quad 12{,}6x = \pi(2n + 1) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

despejando x de la expresión anterior se obtiene

$$x = \frac{\pi}{12{,}6}\,(2n + 1) \qquad x = 0{,}249\text{ m}\cdot(2n + 1) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

En consecuencia, los puntos situados a 0,25 m, 0,75 m, 1,2 m, 1,7 m, 2,2 m, 2,7 m, etc. del origen de coordenadas tendrán elongación mínima.

Los puntos con elongación cero son aquellos para los que se cumple que:

$$\cos\,(12{,}6x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 12{,}6x = \frac{\pi}{2}\,(2n + 1) \quad \text{con} \quad 0, 1, 2, 3...$$

despejando x de la expresión anterior se obtiene:

$$x = \frac{\pi}{2\cdot 12{,}6}\,(2n + 1) \qquad x = 0{,}125\text{ m}\cdot(2n + 1) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

En consecuencia, los puntos situados a 0,13 m, 0,38 m, 0,63 m, 0,88 m, 1,1 m, 1,4 m, etc. del origen de coordenadas tendrán elongación cero.

c) La velocidad de un punto de la cuerda, en cualquier instante de tiempo, se obtiene realizando la derivada temporal de la función de onda:

$$v\,(x, t) = \frac{\partial y\,(x, t)}{\partial t} \qquad v\,(x, t) = 0{,}10\cdot 5{,}71\,\text{sen}\,(12{,}6x - 5{,}71t)$$

En unidades del SI queda:

$$v\,(x, t) = 0{,}571\,\text{sen}\,(12{,}6x - 5{,}71t) \qquad (2)$$

La velocidad será máxima cuando el argumento de la función seno sea 1, quedando el valor máximo de la velocidad igual a 0,57 m/s.

La aceleración de un punto de la cuerda se obtiene derivando la expresión (2) respecto al tiempo:

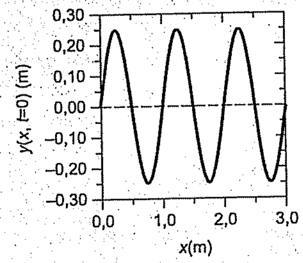
$$a\,(x, t) = \frac{v\,(x, t)}{\partial t} \qquad a\,(x, t) = -0{,}571\cdot 5{,}71\cos\,(12{,}6x - 5{,}71t)$$

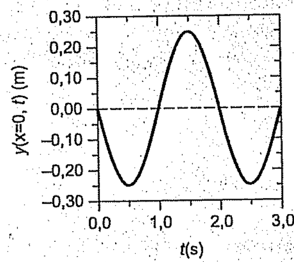
quedando:

$$a\,(x, t) = -3{,}26\cos\,(12{,}6x - 5{,}71t) \qquad (2)$$

La aceleración será máxima cuando el argumento de la función coseno sea -1, y su valor es 3,3 m/s^2.

12.3. En la gráfica de la izquierda se representa la elongación de los puntos de una onda armónica en el instante de tiempo $t = 0$, y en la de la derecha la elongación del punto que ocupa la coordenada $x = 0$ en función del tiempo.





Determinar:

a) La amplitud, longitud de onda y periodo de la onda armónica.

b) La función de onda.

Solución

a) La amplitud de la onda es la distancia máxima que las partículas alcanzan respecto a la pos ción de equilibrio. En ambas gráficas puede leerse que la amplitud es de 0,25 m.

La longitud de onda es la distancia que debemos avanzar sobre la onda para, a partir de un punt cualquiera, encontrar otro punto en el mismo estado de vibración, es decir, con la misma elongació y moviéndose en el mismo sentido. La longitud de onda puede leerse fácilmente en la gráfica de izquierda y es $\lambda = 1{,}0$ m.

El periodo es el tiempo que un punto de la onda tarda en realizar una oscilación. En la gráfica c la derecha puede leerse que el periodo es $T = 2{,}0$ s.

b) La función de onda vendrá dada por una expresión del tipo: $y(x, t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t + \delta)$

Siendo:

— la amplitud $A = 0{,}25$ m;

— el número de ondas $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $\quad k = \dfrac{2\pi}{1{,}0\text{ m}} = 2\pi\text{ m}^{-1}$;

— la frecuencia angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{2{,}0\text{ s}} = \pi\text{ s}^{-1}$;

— la constante de fase es $\delta = 0$ porque según las gráficas la partícula en $x = 0$ y $t = 0$ se encue tra en el punto de equilibrio $y\,(x = 0, t = 0) = 0$.

En consecuencia, la función de onda, en unidades del SI, quedará:

$$y\,(x, t) = 0{,}25\text{ sen}\,(2\pi x - \pi t)$$

12.4. En una tormenta el rayo y el trueno se producen simultáneamente. Una persona ve un rayo en el horizonte y oye el trueno 4,0 segundos después. Teniendo en cuenta que la luz se propaga a $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s y el sonido a $3{,}4 \cdot 10^2$ m/s, determinar la distancia entre la persona y la tormenta.

Solución

Sea t el tiempo transcurrido desde que se produce el rayo y la persona lo ve, y $t + \Delta t$ el tiempo entre que se produce el trueno y el observador lo oye. La diferencia entre ambos tiempos, según el enunciado es $\Delta t = 4{,}0$ s.

Teniendo en cuenta que las dos ondas recorren la misma distancia d. Podemos escribir para la onda luminosa:

$$d = 3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s} \cdot t \qquad (1)$$

Y para la onda sonora:

$$d = 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot (t + \Delta t) \qquad (2)$$

Despejando t de (1) y sustituyendo en (2) se obtiene:

$$d = 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s}\left(\frac{d}{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}} + 4{,}0\text{ s}\right)$$

Y finalmente despejando la distancia d de la expresión anterior:

$$d\left(1 - \frac{3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s}}{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}}\right) = 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s}$$

$$d = \frac{3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s}}{1 - \dfrac{3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s}}{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}}} = 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s} \cdot \left(\frac{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}}{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s} - 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s}}\right)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de la luz es muy superior a la del sonido y por tanto $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s $-$ $3{,}4 \cdot 10^2$ m/s $\approx 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, la expresión anterior se puede aproximar por:

$$d \approx 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s} \cdot \left(\frac{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}}{3{,}0 \cdot 10^8\text{ m/s}}\right) = 3{,}4 \cdot 10^2\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s} = 1\,360\text{ m}$$

La tormenta se encuentra a 1,4 km del observador. Efectivamente, tal y como se acaba de demostrar, se puede hacer una buena estimación de la distancia a la que se encuentra una tormenta midiendo el tiempo que transcurre entre que se ve un rayo y se oye el trueno, y multiplicándolo por la velocidad del sonido.

12.5. Dos cuerdas muy largas de acero de secciones S_1 y S_2, con $S_1 = 4S_2$, se unen por uno de sus extremos formando una única cuerda. Una onda armónica se propaga por esta cuerda y cuando llega al punto de unión, parte de la onda se refleja volviendo hacia atrás, y parte se transmite. Teniendo en cuenta que la potencia de la onda reflejada es un 60 % de la incidente, y suponiendo que no se producen pérdidas de energía, determinar la relación entre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, respecto a la amplitud de la onda incidente.

Solución

La potencia media de una onda armónica que se propaga por una cuerda viene dada por:

$$P_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

Donde μ es la densidad lineal de la cuerda, ω es la frecuencia a la que vibra un punto de la cuerda, A es la amplitud de la onda y v es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

Empezaremos determinando las relaciones existentes entre μ y v de los dos segmentos de cuerda (que denominaremos segmentos 1 y 2). Al tratarse de dos segmentos del mismo material, su densidad será la misma.

La densidad de la cuerda es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

donde m es la masa de un volumen V de cuerda. V también puede expresarse como $V = S \cdot l$, siendc S la sección de la cuerda y l su longitud. En consecuencia, la densidad de un segmento de cuerda también puede escribirse como:

$$\rho = \frac{m}{l\,S} = \frac{\mu}{S}$$

μ es la densidad lineal de masa de la cuerda.

Para los dos segmentos de cuerda

$$\rho_1 = \rho_2 \qquad \frac{\mu_1}{S_1} = \frac{\mu_2}{S_2}$$

Como $S_1 = 4S_2$, entonces:

$$\frac{\mu_1}{4S_2} = \frac{\mu_2}{S_2}$$

Y en consecuencia se obtiene que $\mu_1 = 4\mu_2$.

La velocidad de propagación de las ondas viene dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, siendo T la tensión de la cuei da. Supondremos que en todo momento la tensión se mantiene constante. Sustituyendo la densida lineal en la expresión de la velocidad se obtiene la relación entre las velocidades de propagación e los dos segmentos de cuerda.

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T}{4\mu_2}} = \frac{v_2}{2}$$

La frecuencia de oscilación de los puntos de los dos segmentos de cuerda es la misma $\omega_1 = \omega_2 =$ (Según el enunciado la potencia de la onda reflejada (P_r) es un 60 % de la incidente (P_i), por lo qu

$$\frac{P_r}{P_i} = 0{,}60 \qquad \frac{\frac{1}{2}\mu_1\,\omega^2 A_r^2\,v_1}{\frac{1}{2}\mu_1\,\omega^2 A_i^2\,v_1} = \frac{A_r^2}{A_i^2} = 0{,}60$$

Resultando la relación entre las amplitudes de la onda reflejada (A_r) y la incidente (A_i) igual a:

$$\frac{A_r}{A_i} = \sqrt{0{,}60} = 0{,}775$$

Solución

Si no existen pérdidas de energía y el 60 % de la potencia de la onda incidente se refleja, el 40 % de la potencia se transmitirá (P_t):

$$\frac{P_t}{P_i} = 0{,}40 \qquad \frac{\frac{1}{2}\mu_2\,\omega^2 A_t^2\,v_2}{\frac{1}{2}\mu_1\,\omega^2 A_i^2\,v_1} = \frac{\mu_2 A_t^2\,v_2}{\mu_1 A_i^2\,v_1} = \frac{\frac{\mu_1}{4}A_t^2\,2v_1}{\mu_1 A_i^2\,v_1} = \frac{A_t^2}{2A_i^2} = 0{,}40$$

Resultando la relación entre las amplitudes de la onda transmitida (A_t) y la incidente (A_i) igual a:

$$\frac{A_t}{A_i} = \sqrt{2 \cdot 0{,}40} = 0{,}894$$

En resumen, la amplitud de la onda reflejada es un 77 % de la inicial mientras que la de la onda transmitida es un 89 % de la inicial.

12.6. Las funciones de onda de dos ondas armónicas que se propagan sobre el eje x y que coinciden en el espacio, en unidades del SI, son:

$$y_1(x, t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}\left(4\pi x - \pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_2(x, t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,(4\pi x - \pi t)$$

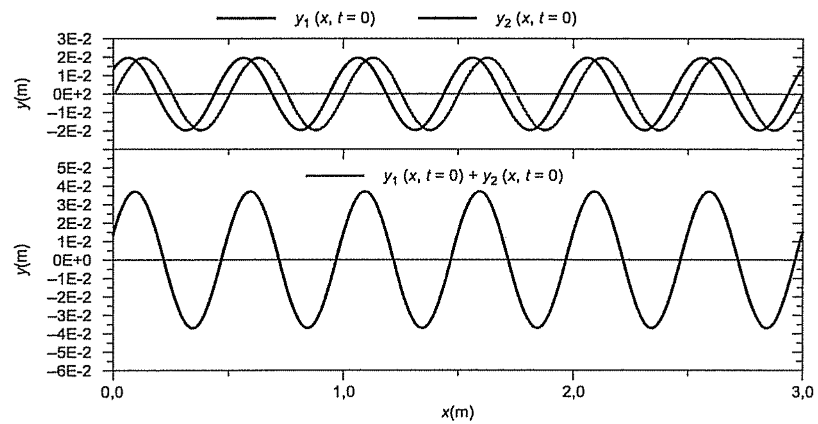
a) Representar gráficamente las formas de las dos ondas en el instante en que se empieza a contar el tiempo, $t = 0$, y la onda resultante de la interferencia.

b) Determinar la función de onda de la onda resultante.

c) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante?

Solución

a) En la siguiente figura se representa, en la gráfica superior las dos funciones de onda de las ondas armónicas que interfieren y en la inferior la función de onda resultante de la interferencia.



Se puede apreciar que la onda resultante es una onda armónica cuya amplitud no alcanza lo: 0,04 m.

b) La función de onda resultante se determina aplicando el principio de superposición:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\left(4\pi x - \pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\,(4\pi x - \pi t)$$

Aplicando a la expresión anterior la identidad trigonométrica que establece que:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\ \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

la función de onda resultante en unidades del SI queda:

$$y(x,t) = 2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\text{sen}\left(4\pi x - \pi t + \frac{\pi}{8}\right) = 3{,}70 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\left(4\pi x - \pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

c) La amplitud de la onda resultante de la interferencia es de 3,7 cm.

12.7. Un guitarrista está afinando su guitarra. En un determinado momento consigue afinar la tercera cuerda, cuya frecuencia fundamental es $f_1 = 196$ Hz que corresponde a la nota Sol3. Seguidamente se dispone a afinar la cuarta cuerda y para ello toca la nota Sol3 en esta cuerda y la oye más grave que la emitida por la tercera cuerda. A continuación pulsa simultáneamente la nota Sol3 en la tercera y la cuarta cuerda. El guitarrista percibe, como resultado de la interferencia de las ondas sonoras creadas por ambas cuerdas, un batido de dos pulsaciones por segundo.

a) ¿Cuál es la frecuencia de la nota Sol3 (f_1') que emite la cuarta cuerda?

b) ¿Cuál es la frecuencia de la nota que escucha el guitarrista?

Solución

a) La frecuencia de la onda sonora emitida por la cuarta cuerda (f_1') es menor a la emitida por tercera cuerda (f_1) ya que el guitarrista la percibe como más grave.

Que el guitarrista escuche dos pulsaciones por segundo nos indica que la diferencia entre las f cuencias de las ondas emitidas por las dos cuerdas es de 2 Hz. Es decir:

$$2{,}00\ \text{Hz} = |f_1 - f_1'|$$

Y en consecuencia $f_1' = f_1 - 2{,}00\ \text{Hz} = 194{,}0$ Hz.
La frecuencia de la nota Sol3 en la cuarta cuerda es de 194 Hz.

b) La frecuencia de la onda resultado de la interferencia de las dos es:

$$f = \frac{f_1 + f_1'}{2} = \frac{196\ \text{Hz} + 194\ \text{Hz}}{2} = 195\ \text{Hz}$$

12.8. En un bajo eléctrico la máxima longitud de vibración de las cuerdas es de 86,4 cm. La cuarta cuerda tiene una densidad lineal de masa de 0,0447 kg/m y se la tensa con una fuerza de 226 N.

a) Determinar la frecuencia fundamental de vibración.

b) ¿Cuál debería ser la tensión de la cuerda para que la frecuencia fundamental fuera de 36,7 Hz?

Solución

a) La velocidad de propagación de una onda en una cuerda únicamente depende de la tensión (T) de la cuerda y de su densidad lineal de masa (μ):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (1)$$

Cuando la tensión es de 226 N la velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{226\ \text{N}}{0{,}0447\ \text{kg/m}}} = 71{,}11\ \text{m/s}$$

La longitud de la onda es inversamente proporcional a su frecuencia:

$$\lambda = \frac{v}{f} \qquad (2)$$

Y a su vez, la longitud de onda del primer armónico o fundamental puede expresarse como:

$$\lambda_1 = 2L \qquad (3)$$

donde L es la longitud del tramo de cuerda que vibra.
Sustituyendo (3) en (2) y despejando la frecuencia f se obtiene:

$$f = \frac{v}{2L} \qquad (4)$$

$$f = \frac{71{,}11\ \text{m/s}}{2 \cdot 86{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 41{,}15\ \text{Hz}$$

La frecuencia de la fundamental es de 41,2 Hz.

b) Si la frecuencia fundamental es $f' = 36{,}7$ Hz, la velocidad de propagación de las ondas se puede obtener despejándola de la ecuación (4):

$$v' = 2Lf' \qquad v' = 2 \cdot 86{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 36{,}7\ \text{Hz} = 63{,}42\ \text{m/s}$$

Despejando ahora la tensión de (1) y sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$T = \mu v^2 \qquad T = 0{,}0447\ \text{kg/m} \cdot (63{,}42\ \text{m/s})^2 = 179{,}8\ \text{N}$$

La tensión de la cuerda es de 180 N.

12.9. La frecuencia fundamental de la quinta cuerda de una guitarra es de 110 Hz (corresponde a la nota La1). La longitud de cuerda vibrante es de 64,8 cm y la densidad lineal de masa de esta cuerda es 0,00329 kg/m. Determinar:

a) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

b) La tensión de la cuerda.

Cuando un guitarrista quiere tocar la nota Do2, cuya frecuencia es 131 Hz, pone el dedo sobre el tercer traste y pulsa la cuerda, consiguiendo de esta forma que la longitud de cuerda L' que vibra sea inferior.

c) Hallar el valor de L'.

Solución

a) La velocidad de propagación de la onda v puede obtenerse calculando el producto de la frecuencia fundamental f_1 con la longitud de onda λ_1 asociada a dicha frecuencia:

$$v = \lambda_1 f_1 \qquad (1)$$

Por otro lado, la longitud de onda del primer armónico o fundamental puede expresarse como:

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

donde L es la longitud del tramo de cuerda que vibra.

En consecuencia, la longitud de onda del primer armónico es:

$$\lambda_1 = 2L$$

Y sustituyendo en la expresión (1); la velocidad de propagación de la onda es:

$$v = 2Lf_1 \qquad (2$$

$$v = 2 \cdot 64{,}8{\cdot}10^{-2}\ \text{m} \cdot 110\ \text{Hz} = 142{,}6\ \text{m/s}$$

La velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda es de 143 m/s.

b) La velocidad de propagación de una onda en una cuerda, únicamente depende de características físicas de la cuerda como son su tensión (T) y densidad lineal de masa (μ):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Despejando la tensión se obtiene:

$$T = \mu v^2$$

Y sustituyendo por los correspondientes valores numéricos:

$$T = 0{,}00329\ \text{kg/m} \cdot (142{,}6\ \text{m/s})^2 = 66{,}90\ \text{N}$$

La tensión de la cuerda es de 66,9 N.

c) Cuando el guitarrista toca el Do2 no modifica ni la tensión de la cuerda ni su densidad lineal de masa, en consecuencia la velocidad de propagación de las ondas seguirá siendo de 142,6 m/s.

En esta situación deberemos encontrar la longitud de cuerda vibrante L' para la cual la fundamental es $f_1' = 131$ Hz. Sustituyendo en la expresión (2) se obtiene:

$$v = 2L' f_1'$$

Y despejando L':

$$L' = \frac{v}{2f_1'} \qquad L' = \frac{142{,}6\ \text{m/s}}{2 \cdot 131\ \text{Hz}} = 0{,}5443\ \text{m}$$

La longitud de cuerda que vibra cuando el guitarrista toca el Do2 es 54,4 cm.

12.10. Dos ondas armónicas de amplitud $A = 1{,}3$ cm, frecuencia 100 Hz y longitud de onda 1,0 m se propagan en la dirección del eje x en sentidos opuestos. La constante de fase para ambas es $\delta = 0$.

a) Escribir las funciones de onda.

b) Determinar la función de onda resultante de la superposición de ambas ondas.

c) Calcular la distancia entre dos nodos consecutivos.

Solución

a) La función de onda armónica es del tipo:

$$y\,(x, t) = A\text{sen}\,(kx \mp \omega t + \delta)$$

El número de ondas es $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Sustituyendo la longitud de onda por $\lambda = 1{,}0$ m, queda:

$$k = \frac{2\pi}{1{,}0\ \text{m}} = 2\pi\ \text{m}^{-1}$$

La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$. Sustituyendo la frecuencia por $f = 100$ Hz, queda:

$$\omega = 2\pi \cdot 100\ \text{Hz} = 200\pi\ \text{s}^{-1}$$

La función de la onda que se desplaza hacia la derecha queda (en unidades del SI):

$$y\,(x, t) = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\,(2\pi x - 200\pi t)$$

Y la de la onda que se desplaza hacia la izquierda:

$$y\,(x, t) = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\,(2\pi x + 200\pi t)$$

b) La función de onda resultante de la superposición de dos ondas armónicas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, que se propagan en sentido opuesto, es:

$$y_r\,(x, t) = y_1\,(x, t) + y_2\,(x, t) = A\text{sen}\,(kx + \omega t) + A\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad (1)$$

teniendo en cuenta la identidad trigonométrica que establece que:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\ \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

se puede rescribir la expresión (1) de la forma:

$$y_t(x, t) = 2A\text{sen}\left(\frac{kx + \omega t + kx - \omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{kx + \omega t - kx + \omega t}{2}\right)$$

$$y_t(x, t) = 2A\text{sen}\,(kx)\cos(\omega t) \qquad (2)$$

Sustituyendo en (2) por los correspondientes datos numéricos se obtiene, en unidades del SI:

$$y_t(x, t) = 2{,}6 \cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,(2\pi x)\cos(200\,\pi t)$$

c) Los nodos son los puntos cuya amplitud de vibración es nula, es decir, aquellos puntos para los que:

$$\text{sen}\,(2\pi x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi x = n\pi \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5...$$

Estos puntos se encontrarán a una distancia x del origen de coordenadas igual a:

$$x = \frac{n}{2} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5...$$

Y la distancia entre dos nodos consecutivos queda igual a:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\,\text{m}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es de 0,50 m.

12.11. Dos altavoces están situados uno delante del otro y separados por una distancia de 5,0 m. Ambos emiten una onda armónica de igual amplitud y de frecuencia 1,0 kHz.

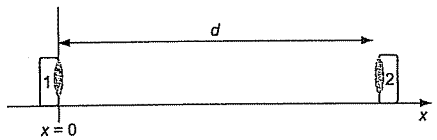
Considerando la velocidad del sonido igual a 343 m/s, determinar:

a) La función de onda de las ondas sonoras emitidas por los dos altavoces.

b) La función de onda resultante de la interferencia de las dos anteriores.

c) Los puntos situados sobre la línea que une los dos altavoces en los que la amplitud de la onda resultante será mínima.

Solución



a) Ambos altavoces emiten ondas armónicas de amplitud de desplazamiento s_0, frecuencia angular $\omega = 2\pi f = 2\,000\;\pi\,\text{s}^{-1}$ y longitud de onda $\lambda = v/f = 340$ m/s/1 000 Hz = 0,340 m. El número de onda es $k = 2\pi/\lambda = 5{,}88\;\pi$.

El altavoz de la izquierda emite una onda que se propaga hacia la derecha, y por tanto la función de onda será del tipo:

$$s_1(x, t) = s_0 \cdot \text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Sustituyendo por los valores numéricos queda (en unidades del SI):

$$s_1(x, t) = s_0 \cdot \text{sen}\,(5{,}88\;\pi x - 2\,000\;\pi t)$$

El altavoz de la derecha emite una onda que se propaga hacia la izquierda. Consideraremos el origen de coordenadas en el punto donde se encuentra el altavoz de la izquierda, separado d del altavoz de la derecha. En consecuencia la función de onda será del tipo:

$$s_2(x, t) = s_0 \cdot \text{sen}\,(k(x - d) + \omega t)$$

Sustituyendo por los valores numéricos queda (en unidades del SI):

$$s_2(x, t) = s_0 \cdot \text{sen}\,(5{,}88\;\pi\,(x - 5{,}0\text{ m}) + 2\,000\;\pi t)$$

b) La función de onda resultante de la interferencia de las ondas emitidas por los dos altavoces es:

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = s_0 \cdot \text{sen}\,(kx - \omega t) + s_0 \cdot \text{sen}\,(k\,(x - d) + \omega t)$$

Teniendo en cuenta la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Podemos escribir la función de onda resultante como:

$$s(x, t) = 2s_0 \cdot \text{sen}\left(k\left(x - \frac{d}{2}\right)\right)\cos(\omega t) \qquad (1)$$

y sustituyendo por los correspondientes valores numéricos:

$$s(x, t) = 2s_0 \cdot \text{sen}\,(5{,}88\;\pi\,(x - 2{,}50))\cos(2\,000\;\pi t)$$

c) La amplitud de la onda resultante será mínima cuando se cumpla que:

$$\text{sen}\left(k\left(x - \frac{d}{2}\right)\right) = 0$$

Es decir, cuando el argumento de la función seno sea:

$$k\left(x - \frac{d}{2}\right) = n\pi \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4...$$

Despejando x de la ecuación anterior se obtiene:

$$x = n\frac{\pi}{k} + \frac{d}{2} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4...$$

y sustituyendo por los valores numéricos se encuentran los valores de la coordenada x para los cuales la amplitud de la onda resultante es mínima:

$$x = n \cdot 0{,}170\text{ m} + 2{,}50\text{ m} \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4...$$

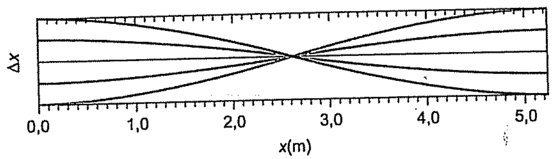
12.12. Un tubo de órgano de 16 pies está abierto por ambos extremos. Suponiendo que la longitud de la columna de aire vibrante es de 5,25 m y teniendo en cuenta que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 343 m/s, determinar:

a) La frecuencia de la fundamental (f_1).

b) La frecuencia del quinto armónico (f_5).

Solución

a) Cuando el tubo tiene los dos extremos abiertos, cerca de cada extremo se produce un antitodo de desplazamiento (que equivale a un nodo de presión). La fundamental será una onda estacionaria del tipo:



Y su longitud de onda: $\lambda_1 = 2L$.

La frecuencia f_1 está relacionada con la longitud de onda y con la velocidad de propagación de sonido v mediante la expresión:

$$v = \lambda_1 \cdot f_1 \qquad v = 2L \cdot f_1$$

Despejando f_1 se obtiene: $f_1 = \dfrac{v}{2L}$.

Y sustituyendo por los correspondientes valores numéricos:

$$f_1 = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 5{,}25 \text{ m}} = 32{,}67 \text{ Hz}$$

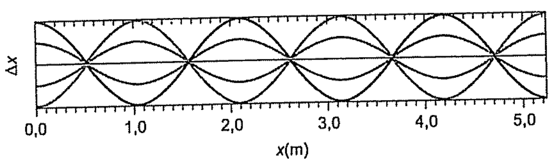
La frecuencia fundamental de este tubo es de 32,7 Hz.

b) La frecuencia del quinto armónico es cinco veces la frecuencia fundamental:

$$f_5 = 5f_1$$

$$f_5 = 5 \cdot 32{,}67 \text{ Hz} = 163{,}4 \text{ Hz} \qquad f_5 = 163 \text{ Hz}$$

La forma de la onda que corresponde al quinto armónico se representa en la figura:



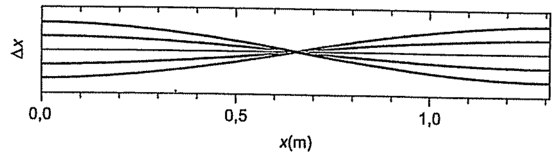
12.13. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 4 pies es de 65,5 Hz. La longitud de columna de aire que vibra en el tubo es $L = 1{,}31$ m y la velocidad de propagación del sonido 343 m/s. Determinar:

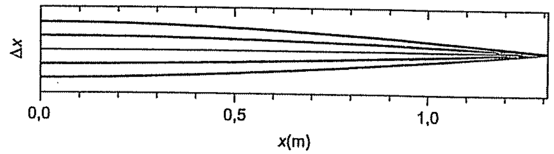
a) Si se trata de un tubo con ambos lados abiertos, o bien de un tubo con un extremo abierto y el otro cerrado.

b) La frecuencia de las notas que se producen en el tubo cuando suena.

Solución

a) Vamos a empezar calculando la frecuencia fundamental para el tubo con ambos extremos abiertos y para el tubo con un extremo abierto y el otro cerrado. La forma de la onda fundamental para cada uno de los casos aparece representada en las siguientes gráficas.





Cuando el tubo tiene los dos extremos abiertos, se producen dos antinodos de desplazamiento cerca de los extremos, y la longitud de onda (λ_1) será igual a:

$$\lambda_1 = 2L$$

La frecuencia f_1 está relacionada con la longitud de onda y con la velocidad de propagación de sonido v mediante la expresión:

$$v = \lambda_1 \cdot f_1 \tag{1}$$

Sustituyendo la longitud de onda en la ecuación anterior se obtiene:

$$v = 2L \cdot f_1$$

Y despejando f_1:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 1{,}31 \text{ m}} = 130{,}9 \text{ Hz}$$

Si el tubo tuviera los dos extremos abiertos la frecuencia fundamental sería de 131 Hz. Este valor no coincide con el valor de la fundamental dado en el enunciado.

Vamos a suponer ahora que el tubo tiene un extremo abierto y el otro cerrado. En este caso, como puede verse en la figura, se produce un antitodo de desplazamiento en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. La longitud de onda (λ_1) será igual a:

$$\lambda_1 = 4L$$

y sustituyendo en (1) se obtiene:

$$v = 4L \cdot f_1$$

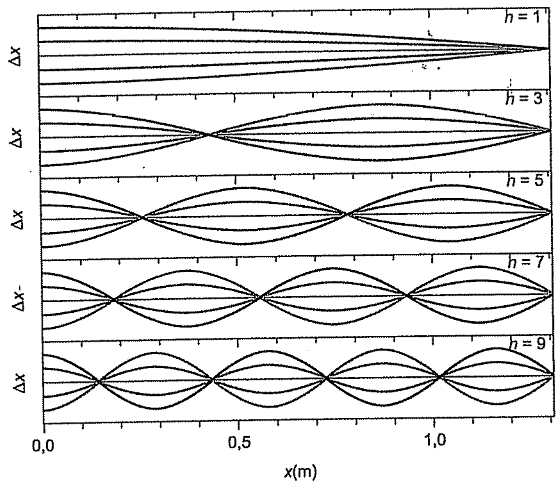
quedando la frecuencia fundamental (f_1) igual a

$$f_1 = \frac{v}{4L} \qquad (2)$$

$$f_1 = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}30} = 65{,}45 \text{ Hz}$$

La frecuencia fundamental obtenida $f_1 = 65{,}5$ Hz coincide con el valor dado en el enunciado. Podemos concluir que este tubo de órgano se encuentra cerrado por un extremo.

b) Cuando el tubo suene se producirán ondas estacionarias con un antitodo de desplazamiento en el extremo abierto y un nodo en el cerrado. En la figura adjunta se representan los cinco primeros armónicos.



Es fácil deducir, mirando la figura, que las ondas estacionarias presentes en el tubo son aquellas para las que su longitud de onda esté relacionada con la longitud de la columna de aire vibrante mediante la expresión:

$$L = n\frac{\lambda}{4} \quad \text{con} \quad n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...$$

Y en consecuencia:

$$\lambda = \frac{4L}{n} \quad \text{con } n \text{ impar}$$

n es el número de armónico que en las gráficas de la figura aparece indicado en la esquina superior derecha.

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$v = \frac{4L}{n} f_n \text{ con } n \text{ impar}$$

Donde f_n es la frecuencia del enésimo armónico.

Despejando f_n:

$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad \text{con } n \text{ impar}$$

Teniendo en cuenta la expresión (2) se puede rescribir la expresión anterior de la forma:

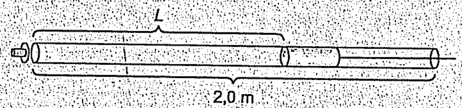
$$f_n = nf_1 \quad \text{con } n \text{ impar}$$

Las frecuencias de las notas que se producen en el tubo son aquellas que cumplen:

$$f_n = n \cdot 65{,}5 \text{ Hz} \quad \text{con } n \text{ impar}$$

Es decir: 65,5 Hz, 197 Hz, 328 Hz, 459 Hz, 590 Hz, 721 Hz, etc.

12.14. Un tubo de 5,0 cm de diámetro y de 2,0 m de longitud tiene un extremo abierto y el otro se cierra mediante un émbolo que permite variar su longitud. A una distancia de 3,0 cm del extremo abierto se coloca un pequeño altavoz orientado hacia el interior del tubo que emite una onda armónica de 600 Hz. Calcular las longitudes L de vibración de la columna de aire para las que se producen ondas estacionarias.



Dato: Considerar la velocidad de propagación del sonido igual a 343 m/s.

Solución

La longitud de la onda emitida por el altavoz es:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

donde v es la velocidad de propagación del sonido:

$$\lambda = \frac{343 \text{ m/s}}{600 \text{ Hz}} = 0{,}572 \text{ m}$$

Este tubo tiene un extremo abierto y el otro cerrado. En consecuencia, la resonancia se producirá para aquellas longitudes de vibración que cumplan que:

$$L = n\frac{\lambda}{4} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, 7, 9...$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$L = n\frac{0{,}572 \text{ m}}{4} = n \cdot 0{,}143 \text{ m} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, 7, 9...$$

Es decir, para L = 14 cm, 43 cm, 72 cm, 1,0 m, 1,3 m, 1,6 m y 1,9 m.

12.15. Un obrero de la construcción está utilizando un martillo neumático para perforar el suelo. A una distancia de 1,0 m del martillo el nivel de intensidad sonora es de 130 dB. Suponiendo que la onda sonora generada por el martillo se propaga en un hemisferio esférico, determinar:

a) La potencia sonora generada por el martillo neumático.

b) El nivel de intensidad sonora a 10 m del martillo.

Solución

a) El nivel de intensidad sonora (β) está relacionado con la intensidad de la onda (I) en un punto mediante la expresión:

$$\beta = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad (1)$$

donde I_0 es el nivel de referencia o umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

En consecuencia, la intensidad sonora en un punto se puede obtener despejando de la ecuación anterior:

$$I = I_0\, 10^{\frac{\beta}{10\text{ dB}}}$$

A un metro del martillo la intensidad sonora será igual a:

$$I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{\frac{130\text{ dB}}{10\text{ dB}}} = 10 \text{ W/m}^2$$

Teniendo en cuenta que la intensidad es la potencia media por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación, y que esta onda se propaga en un hemisferio esférico, podremos expresarla como:

$$I = \frac{P_m}{2\pi r^2} \qquad (2)$$

Despejando la potencia media obtenemos:

$$P_m = 2\pi r^2 I \qquad P_m\, 2\pi\, (1 \text{ m})^2\, 10 \text{ W/m}^2 = 62{,}8 \text{ W}$$

La potencia sonora media emitida por el martillo neumático es de 62,8 W.

b) La intensidad sonora (I') a 10 m del martillo neumático se determinará sustituyendo en la expresión (2):

$$I' = \frac{62{,}8 \text{ W}}{2\pi\, (10 \text{ m})^2} = 9{,}99 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

Sustituyendo en (1) se obtiene la potencia sonora (β') a 10 m del martillo:

$$\beta' = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{9{,}99 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2}\right) = 109 \text{ dB}$$

La intensidad sonora a 10 m del martillo es de unos 110 dB.

12.16. El nivel de intensidad sonora en un punto del espacio provinente de un altavoz es de 80dB. ¿Cuántos altavoces serían necesarios para conseguir en este punto un nivel de intensidad sonora de 90 dB? Considerar todos los altavoces iguales, situados muy cerca entre sí y alejados del punto de donde se recibe el sonido.

Solución

El nivel de intensidad sonora en un punto provinente de un altavoz es $\beta = 80$ dB. β está relacionado con la intensidad de la onda (I) en un punto mediante la expresión:

$$\beta = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad (1)$$

donde I_0 es el nivel de referencia o umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Despejando la intensidad sonora provinente de un altavoz (I) de la expresión anterior se obtiene:

$$I = I_0\, 10^{\frac{\beta}{10\text{ dB}}} \qquad (2)$$

Sea $\beta' = 90$ dB el nivel de intensidad sonora provinente de N altavoces idénticos situados muy cerca unos de otros y muy alejados del punto de recepción. La intensidad sonora provinente de cada altavoz será igual a I y la intensidad sonora total será NI. En consecuencia:

$$\beta' = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{NI}{I_0}\right)$$

despejando I de la expresión anterior se obtiene:

$$I = \frac{I_0}{N}\, 10^{\frac{\beta'}{10\text{ dB}}} \qquad (3)$$

Igualando las expresiones (2) y (3) y despejando N se obtiene:

$$I_0\, 10^{\frac{\beta}{10\text{ dB}}} = \frac{I_0}{N}\, 10^{\frac{\beta}{10\text{ dB}}} \qquad N = 10^{\frac{\beta' - \beta}{10\text{ dB}}}$$

y sustituyendo por los valores numéricos:

$$N = 10^{\frac{90\text{ dB} - 80\text{ dB}}{10\text{ dB}}} = 10 \text{ altavoces}$$

Serán necesarios 10 altavoces para conseguir un nivel de intensidad sonora de 90 dB.

12.17. El silbato de un tren parado tiene una frecuencia de 220 Hz. Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido en el aire igual a 343 m/s, determinar la frecuencia del silbato que escuchará una persona situada al lado de la vía cuando:

a) El tren se acerca a la persona a 90,0 km/h.

b) El tren se aleja de la persona a 90,0 km/h.

Solución

a) Cuando el tren se acerca a 90,0 km/h = 25,0 m/s, la frecuencia que percibe la persona situada al lado de la vía es superior a la que oiría si ambos estuvieran parados. Esta frecuencia puede determinarse mediante la expresión:

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{u_e}{v}} f_0$$

Donde u_e es la velocidad con que viaja el emisor (en este caso el tren) respecto al medio de propagación de la onda; v es la velocidad de propagación del sonido, y f_0 es la frecuencia de la onda producida por el emisor cuando está parado.

Sustituyendo por los correspondientes datos numéricos se obtiene:

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{25{,}0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}} 220 \text{ Hz} = 237{,}3 \text{ Hz}$$

Cuando el tren se acerca, la persona situada al pie de la vía escuchará el silbido con una frecuencia de 237 Hz.

b) Cuando el tren se aleja, la frecuencia que percibe la persona es inferior a la que escucharía si ambos estuvieran parados. Esta frecuencia se determina con la siguiente expresión:

$$f' = \frac{1}{1 + \frac{u_e}{v}} f_0$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$f' = \frac{1}{1 + \frac{25{,}0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}} 220 \text{ Hz} = 205{,}1 \text{ Hz}$$

Cuando el tren se aleja, la persona situada al pie de la vía escuchará el silbido con una frecuencia de 205 Hz.

12.18. El maquinista de un tren parado en la estación acciona el silbato que tiene una frecuencia de 220 Hz. Un segundo tren se mueve por una vía contigua a la primera con velocidad de 90,0 km/h. Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido en el aire igual a 343 m/s, determinar la frecuencia de la onda sonora que percibirá el maquinista del segundo tren cuando:

a) Se acerca a la estación.

b) Se aleja de la estación.

Compare los resultados obtenidos con los del problema anterior.

c) ¿Se produce la misma variación de frecuencias cuando el emisor se mueve y el receptor está parado que en la situación opuesta?

Solución

a) Cuando el segundo tren se acerca a la estación a 90,0 km/h = 25,0 m/s, su maquinista percibe la frecuencia del silbato del tren parado superior a la que escucharía si su velocidad fuera cero. Esta frecuencia puede determinarse mediante la expresión:

$$f = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) f_0$$

Donde u_r es la velocidad con que viaja el receptor (en este caso el segundo tren) respecto al medio de propagación de la onda; v es la velocidad de propagación del sonido, y f_0 es la frecuencia de la onda producida por el emisor cuando está parado.

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$f' = \left(1 + \frac{25{,}0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}\right) 220 \text{ Hz} = 236{,}0 \text{ Hz}$$

Cuando el tren se acerca a la estación el maquinista oye que la frecuencia del silbato del tren parado es de 236 Hz.

b) Cuando el segundo tren se aleja de la estación, su maquinista percibe la frecuencia del silbato del tren parado inferior a la que escucharía si su velocidad fuera cero. Esta frecuencia puede determinarse mediante la expresión:

$$f' = \left(1 - \frac{u_r}{v}\right) f_0$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$f' = \left(1 - \frac{25{,}0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}\right) 220 \text{ Hz} = 204{,}0 \text{ Hz}$$

Cuando el tren se aleja de la estación el maquinista oye que la frecuencia del silbato del tren parado es de 204 Hz.

c) En el problema anterior hemos visto que cuando el emisor se acerca a 90 km/h y el receptor está parado este último percibe una frecuencia de 237 Hz. En cambio, en el apartado *a)* de este problema se ha comprobado que cuando el emisor está parado y el receptor se acerca a éste a 90 km/h este último percibe una frecuencia de 236 Hz. Estas dos frecuencias no son exactamente iguales ya que no se trata de dos situaciones físicamente idénticas.

12.19. Un coche de policía está persiguiendo a 80 km/h una furgoneta que lleva el botín del atraco a un banco y que viaja a 85 km/h. Cuando el coche está en reposo y el aire en calma la frecuencia de su sirena es de 350 Hz. Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido en el aire igual a 343 m/s, determinar la frecuencia de la onda sonora que percibirá el conductor de la furgoneta.

Solución

El coche de policía se mueve a 80 km/h = 22,2 m/s en la misma dirección y sentido que la furgoneta que viaja a 85 km/h = 23,6 m/s. Debido a que la velocidad de la furgoneta es superior a la del coche de policía, ambos vehículos se están alejando entre sí.

La longitud de onda en los puntos que se encuentran por delante del coche de policía es:

$$\lambda = \frac{v - u_e}{f_0}$$

Donde u_e es la velocidad con que viaja el emisor (el coche de policía) respecto al medio de propagación de la onda; v es la velocidad de propagación del sonido, y f_0 es la frecuencia de la onda producida por el emisor cuando está parado. La frecuencia f' de esta onda respecto a un receptor parado es:

$$f' = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - u_e} f_0 = \frac{1}{1 - \frac{u_e}{v}} f_0$$

La frecuencia f'' que percibe un receptor que viaja en el mismo sentido de propagación de la onda será:

$$f'' = \left(1 - \frac{u_r}{v}\right) f' = \frac{1 - \frac{u_r}{v}}{1 - \frac{u_e}{v}} f_0$$

Donde u_r es la velocidad con que viaja el receptor (la furgoneta).
Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$f' = \frac{1 - \frac{23{,}6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}}{1 - \frac{22{,}2 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}} \cdot 350 \text{ Hz} = 348{,}7 \text{ Hz}$$

La frecuencia de la sirena que escuchará el conductor de la furgoneta será de 349 Hz.

12.20. Un murciélago vuela hacia una pared lisa emitiendo ultrasonidos de 36 kHz. La frecuencia de la onda reflejada en la pared que percibe el murciélago es de 38 kHz. ¿A qué velocidad viaja el murciélago?
Considerar el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido igual a 343 m/s.

Solución

La longitud de onda de la señal emitida por el murciélago en los puntos que se encuentran delante de él es:

$$\lambda = \frac{v - u}{f_0}$$

Donde v es la velocidad de propagación del sonido, u la velocidad del murciélago y f_0 la frecuenci de 36 kHz. La frecuencia de la onda que llega a la pared es:

$$f' = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{u}{v}} f_0 \qquad (1$$

Cuando la onda que emite el murciélago se refleja en la pared, la pared actúa como un emisor d ondas de frecuencia f'. Debido a que el murciélago vuela hacia la pared, la frecuencia $f'' = 38$ kH que él percibe vendrá dada por:

$$f'' = \left(1 + \frac{u}{v}\right) f'$$

Sustituyendo (1) en la ecuación anterior:

$$f'' = \frac{1 + \frac{u}{v}}{1 - \frac{u}{v}} f_0 = \frac{v + u}{v - u} f_0$$

Despejando la velocidad del murciélago de la ecuación anterior se obtiene:

$$f''(v - u) = (v + u) f_0 \qquad u(f_0 + f'') = v(f'' - f_0)$$

$$u = \left(\frac{f'' - f_0}{f_0 + f''}\right) v$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$u = \left(\frac{38 \text{ kHz} - 36 \text{ kHz}}{38 \text{ kHz} + 36 \text{ kHz}}\right) 343 \text{ m/s} = 9{,}27 \text{ m/s}$$

El murciélago vuela hacia la pared a 9,3 m/s = 33 km/h.

12.21. Un avión de combate vuela a Mach = 2,0 a una altura de 4 000 m. En un determinado momento una persona situada a altura cero ve pasar el avión por encima de su cabeza. ¿Cuánto tiempo tardará esta persona en oír el trueno sónico? Considerar la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

Solución

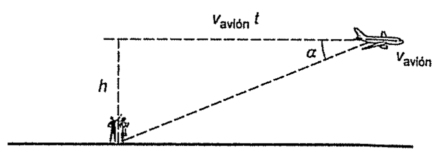
La velocidad del avión es igual a la velocidad del sonido por el número de Mach:

$$v_{\text{avión}} = 2{,}0 \cdot 343 \text{ m/s} = 686 \text{ m/s}$$

El ángulo α puede calcularse haciendo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{v_{sonido}}{v_{avión}} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 30°$$

Según muestra el dibujo, la tangente de α puede expresarse como:



$$tg\ \alpha = \frac{h}{v_{avión}\, t}$$

Donde h es la altura a la que vuela el avión y t es el tiempo que la onda de choque tarda a llegar a la persona. Despejando el tiempo de la expresión anterior y sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$t = \frac{h}{v_{avión}\ \text{tg}\ \alpha} \qquad t = \frac{4\,000 \text{ m}}{686 \text{ m/s} \cdot \text{tg } 30°} = 10{,}1 \text{ s}$$

La onda de choque tarda 10 s en llegar al observador.

CUESTIONES

12.1. Cuando una onda longitudinal se propaga por un medio, una partícula del medio:

a) Permanece fija.

b) Se mueve en una dirección que forma un ángulo recto con la dirección de propagación.

c) Se mueve hacia delante y hacia atrás en la línea de propagación.

d) Se mueve hacia delante en la dirección de propagación.

12.2. Un pulso de onda se mueve por una cuerda ligera que está unida por un extremo a una pared. El pulso reflejado está:

a) Invertido.

b) Al estar el extremo de la cuerda fijo, el pulso no se refleja.

c) No invertido.

d) Que se invierta o no, depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal de masa.

12.3. Cuando una onda pasa de un medio a otro diferente, no varía:

a) La velocidad y la frecuencia. *b)* La velocidad y la longitud de onda.

c) La frecuencia. *d)* La frecuencia y la longitud de onda.

12.4. La velocidad de una onda en una cuerda depende de:

a) La frecuencia y la longitud de onda.

b) La tensión de la cuerda y su densidad lineal de masa.

c) La tensión de la cuerda y la frecuencia.

d) La frecuencia y el periodo.

12.5. En las películas del Oeste los indios ponían las orejas sobre los rieles del tren porque:

a) El sonido viaja más rápido por los rieles que por el aire.

b) El sonido viaja más rápido en un sólido que en un fluido.

c) Las dos anteriores.

d) Ninguna de las anteriores.

12.6.1. Una onda armónica se propaga de izquierda a derecha con una velocidad de 200 m/s, su amplitud es de 4,0 m y su longitud de onda de 20 m. La función de onda $y(x,t)$ que representa a esta onda es: (en unidades del SI)

a) $y = 4{,}0 \text{ sen } (0{,}1\pi x - \pi t/5)$ *b)* $y = 4{,}0 \text{ sen } (40\,\pi x - 20\,\pi t)$

c) $y = 4{,}0 \text{ sen } (0{,}1\,\pi x - 20\,\pi t)$ *d)* $y = 4{,}0 \text{ sen } (0{,}1\,\pi x + \pi t/3)$

12.6.2. La elongación de un punto que se encuentra a 20 m del origen de coordenadas en el instante $t = 0$ es:

a) 0,0 *b)* 4,0 m *c)* –4,0 m *d)* 2,0 m

12.7. Una cuerda vibra con su frecuencia fundamental. La función de la onda estacionaria (en unidades del SI) es:

$$y\,(x,\,t) = 3{,}0 \cos\,(190\,t) \text{ sen }(2\pi x)$$

Es correcto afirmar que:

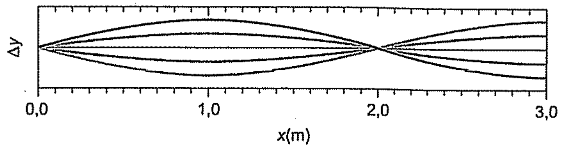
a) La longitud de la cuerda es de 1,0 m.

b) La velocidad de propagación de la onda en la cuerda es de 30 m/s.

c) La amplitud con que oscilará un punto situado a 0,50 m del extremo de la cuerda es 3,0 m.

d) El periodo de oscilación de un punto situado a 0,25 m del extremo de la cuerda es 5,3 ms.

12.8.1. Una cuerda de 3,0 m de longitud, tiene un extremo fijo y el otro puede moverse libremente. Cuando provocamos que los puntos de la cuerda oscilen con una frecuencia de 150 Hz observamos una onda estacionaria como la que indica la figura.



La longitud de la onda estacionaria es:

a) 2,0 m *b)* 3,0 m *c)* 4,0 m *d)* 1,0 m

12.8.2. El armónico presente en la cuerda es:

a) El segundo. *b)* El quinto. *c)* El sexto. *d)* El tercero.

12.8.3. La frecuencia fundamental es:

a) 150 Hz *b)* 50 Hz *c)* 25 Hz *d)* 100 Hz

12.9.1. Por una cuerda se propaga una onda cuya función de onda es (en unidades del SI):

$$y\,(x,\,t) = 0{,}010 \text{ m sen }(\pi x - 10\pi t)$$

La velocidad de propagación de la onda es:

a) 10 m/s *b)* −0,10 m/s *c)* 0,31 m/s *d)* 0,22 m/s

12.9.2. La velocidad de un punto situado en $x = 0{,}25$ m en el instante $t = 0{,}10$ s es:

a) 10 m/s *b)* −0,10 m/s *c)* 0,31 m/s *d)* 0,22 m/s

12.10. La función de onda de una onda estacionaria en una cuerda fija por sus extremos es (en unidades del SI):

$$y\,(x,\,t) = 7{,}0 \cdot 10^{-2} \cos\,(16t) \text{ sen }(8{,}4\,x)$$

Las ecuaciones de las ondas armónicas que interfieren generando la onda estacionaria son:

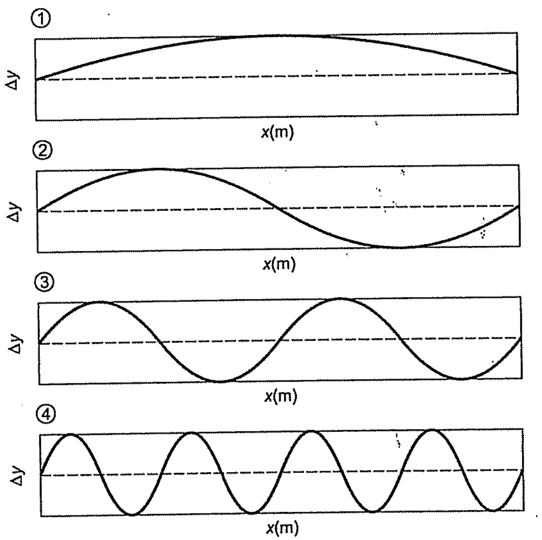
a) $y_1(x, t) = 7{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(8{,}4\,x + 16\,t)$, $y_2(x, t) = 7{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(8{,}4\,x - 16\,t)$

b) $y_1(x, t) = 7{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(16\,x + 8{,}4\,t)$, $y_2(x, t) = 7{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(16\,x - 8{,}4\,t)$

c) $y_1(x, t) = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ sen $(4{,}2\,x + 8{,}0\,t)$, $y_2(x, t) = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ sen $(4{,}2\,x - 8{,}0\,t)$

d) $y_1(x, t) = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ sen $(8{,}4\,x + 16\,t)$, $y_2(x, t) = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ sen $(8{,}4\,x - 16\,t)$

12.11. Una cuerda de arpa de longitud L está oscilando. Si tocamos ligeramente la cuerda en un punto situado a 1/4 de su extremo. Son posibles los estados de vibración:



a) 1, 2, 3 y 4 *b)* 3 *c)* 2,3 y 4 *d)* 3 y 4

12.12.1. Dos ondas 1 y 2 están presentes en una cuerda que tiene dos extremos fijos. Las funcione de onda en unidades del SI, son:

$$y_1(x, t) = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ sen } (10\,x + 14\,t), \quad y_2(x, t) = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ sen } (10\,x - 14\,t)$$

La función de onda de la onda resultante es (en unidades del SI):

a) $y(x, t) = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(10\,x)$ cos $(14\,t)$

b) $y(x, t) = 10 \cdot 10^{-2}$ sen $(10\,x)$ cos $(14\,t)$

c) $y(x, t) = 10 \cdot 10^{-2}$ sen $(20\,x)$ cos $(28\,t)$

d) $y(x, t) = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ sen $(14\,x)$ cos $(10\,t)$

12.12.2. La posición de los dos primeros nodos (empezando en $x = 0$ y avanzando en la dirección c las x positivas) es:

a) $x_1 = 0{,}31$ m; $x_2 = 0{,}63$ m *b)* $x_1 = 0{,}63$ m; $x_2 = 1{,}3$ m

c) $x_1 = 0{,}16$ m; $x_2 = 0{,}32$ m *d)* $x_1 = 0{,}16$ m; $x_2 = 0{,}48$ m

12.13. Una cuerda de 2,0 m de longitud tiene dos extremos fijos. La tensión de la cuerda es tal que su frecuencia fundamental es de 50 Hz. La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es:

a) 100 m/s *b)* 50 m/s *c)* 200 m/s *d)* 400 m/s

12.14. Se producen ondas estacionarias en un tubo de órgano con un extremo cerrado y el otro abierto. Siendo λ la longitud de onda, el nodo de desplazamiento más cercano al extremo cerrado del tubo se encuentra a una distancia igual a

a) λ *b)* $\lambda/4$ *c)* $\lambda/2$ *d)* $\lambda/8$

12.15. La longitud de la columna de aire oscilante de un tubo de órgano con los dos extremos abiertos cuya frecuencia fundamental es de 110 Hz, es igual a: (Considerar la velocidad de propagación del sonido en el aire igual a 343 m/s).

a) 3,1 m *b)* 0,32 m *c)* 1,6 m *d)* 0,77 m

12.16. Una onda armónica de amplitud 8,0 cm se obtiene de la superposición de dos ondas idénticas de amplitudes igual a 5,0 cm. El desfase entre las dos ondas armónicas que interfieren es de:

a) 37° *b)* 90° *c)* 45° *d)* 74°

12.17. Dos ondas armónicas se propagan en la misma dirección y sentido con amplitud $A = 2{,}4$ cm. Ambas ondas tienen la misma frecuencia y longitud de onda y se encuentran desfasadas un ángulo de 30°. La amplitud de onda resultante de la interferencia de las ondas armónicas es:

a) 2,3 cm *b)* 0,62 cm *c)* 4,6 cm *d)* 2,4 cm

12.18. Un guitarrista está afinando su instrumento. Dispone de un diapasón de 110 Hz, y cuando toca simultáneamente la quinta cuerda de la guitarra y el diapasón oye 3 pulsaciones por segundo. La quinta cuerda de su guitarra está afinada a:

a) 107 Hz o 113 Hz

b) 104 Hz o 116 Hz

c) 110 Hz

d) Ninguna de las anteriores.

12.19. La cantidad de energía que transporta una onda armónica que se propaga en una cuerda es:

a) Proporcional a su amplitud al cuadrado.

b) Inversamente proporcional a la frecuencia.

c) Proporcional al cuadrado de la velocidad de propagación.

d) Inversamente proporcional a su amplitud.

12.20. ¿Cuántos decibelios aumenta el nivel de intensidad de un sonido cuando su intensidad se multiplica por 10?

a) 3,0 dB *b)* 10 dB *c)* 20 dB *d)* 5,0 dB

12.21.1. Un altavoz emite un sonido de 25 W de potencia. La onda sonora se propaga en todo el espacio que rodea al altavoz.

La intensidad de la onda sonora a 5,0 m del altavoz es:

a) 25 W/m² *b)* 5,0 W/m² *c)* 80 mW/m² *d)* 160 mW/m²

12.21.2. El nivel de intensidad sonora a 5,0 m del altavoz es:

a) 130 dB *b)* 120 dB *c)* 110 dB *d)* 100 dB

12.21.3. El nivel de intensidad sonora a 10 m del altavoz es:

a) 100 dB *b)* 90 dB *c)* 78 dB *d)* 95 dB

12.22.1. La sirena de un coche de bomberos tiene una frecuencia de 1,10 kHz. El coche se dirige hacia un acantilado, alejándose a una velocidad de 90,0 km/h de un observador parado. La velocidad de propagación del sonido es de 343 m/s.

La frecuencia de la onda sonora provinente de la sirena que percibe el observador es:

a) 1,19 kHz *b)* 1,18 kHz *c)* 1,03 kHz *d)* 1,01 kHz

12.22.2. La frecuencia de la onda reflejada en el acantilado que percibe el observador es:

a) 1,19 kHz *b)* 1,18 kHz *c)* 1,03 kHz *d)* 1,01 kHz

12.23. Una ambulancia se acerca a una velocidad de 16 m/s a un observador en reposo haciendo sonar la sirena. La velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s. Es correcto afirmar que:

a) La frecuencia que oye el observador es mayor a la que oiría si la ambulancia estuviera en reposo.

b) La longitud de onda en los puntos situados por delante de la ambulancia es mayor que si la ambulancia estuviera en reposo.

c) Según el observador, la velocidad del sonido que llega de la ambulancia es de 356 m/s.

d) Según el observador, la velocidad del sonido que llega de la ambulancia es de 324 m/s.

12.24. Un avión a reacción vuela con Mach igual a 1,8 a una altura de 8,5 km. El ángulo que forma la onda de choque con la dirección en que vuela el avión es:

a) 34° *b)* 0,59° *c)* 41° *d)* 16°

SOLUCIONES

12.1. *c)*	**12.8.1.** *c)*	**12.12.2.** *a)*	**12.20.** *b)*
12.2. *a)*	**12.8.2.** *d)*	**12.13.** *c)*	**12.21.1.** *c)*
12.3. *c)*	**12.8.3.** *b)*	**12.14.** *c)*	**12.21.2.** *c)*
12.4. *b)*	**12.9.1.** *a)*	**12.15.** *c)*	**12.21.3.** *a)*
12.5. *c)*	**12.9.2.** *d)*	**12.16.** *d)*	**12.22.1.** *c)*
12.6.1. *c)*	**12.10.** *d)*	**12.17.** *c)*	**12.22.2.** *a)*
12.6.2. *a)*	**12.11.** *d)*	**12.18.** *a)*	**12.23.** *a)*
12.7. *b)*	**12.12.1.** *b)*	**12.19.** *a)*	**12.24.** *a)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje x y viene dada por la siguiente expresión (en unidades del SI).**

$$y(x, t) = 0{,}23 \text{ sen } (1{,}5\,x - 2{,}0\,t + \pi)$$

Determinar:

a) La longitud de la onda, la frecuencia en que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.

b) La ecuación del movimiento de un punto situado a $x = 2{,}0$ m del origen de coordenadas. La distancia que separa este punto de la posición de equilibrio en los instantes $t = 0{,}5$ s y $t = 1{,}0$ s.

c) La ecuación de la velocidad de un punto cualquiera en función del tiempo.

d) La expresión de la velocidad de un punto situado en $x = 2{,}0$ m en función del tiempo y su valor en los instantes $t = 0{,}5$ s y $t = 1{,}0$ s.

e) La ecuación de la aceleración de un punto cualquiera en función del tiempo.

f) La expresión de la aceleración de un punto situado en $x = 2{,}0$ m en función del tiempo y su valor en los instantes $t = 0{,}5$ s y $t = 1{,}0$ s.

Sol.: a) $\lambda = 4{,}2$ m; $f = 0{,}32$ Hz; $v = 1{,}3$ m/s

b) En unidades del SI: $y(x = 2{,}0 \text{ m}, t) = 0{,}23 \text{ sen } (3{,}0 - 2{,}0\,t + \pi)$; -21 cm; -19 cm

c) En unidades del SI: $v(x, t) = -0{,}46 \cos (1{,}5\,x - 2{,}0\,t + \pi)$

d) En unidades del SI: $v(x = 2{,}0 \text{ m}, t) = -0{,}46 \text{ sen } (3{,}0 - 2{,}0\,t + \pi)$; -19 cm/s; 25 cm/s

e) En unidades del SI: $a(x, t) = -0{,}92 \cos (1{,}5\,x - 2{,}0\,t + \pi)$

f) En unidades del SI: $a(x = 2{,}0 \text{ m}, t) = -0{,}92 \text{ sen } (3{,}0 - 2{,}0\,t + \pi)$; 84 cm/s^2; 77 cm/s^2

2 **Una cuerda muy larga tiene una densidad lineal de masa de $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ kg/m y su tensión es de 25 N. Un punto de la cuerda está unido a un pequeño motor que lo hace oscilar con un movimiento armónico simple de frecuencia de 50 Hz y amplitud 5,0 cm. Determinar:**

a) La velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda.

b) La función de onda de la onda armónica que se propaga en la cuerda.

c) La potencia media que transporta la onda armónica.

Sol.: a) 110 m/s

b) En unidades del SI: $y(x, t) = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ sen } (2{,}9x - 3{,}1 \cdot 10^2\,t + \pi)$

c) 28 W

3 **Una piedra cae sobre la superficie de un lago generando una onda circular. Se observa que la distancia entre dos crestas de dos frentes de onda consecutivos es de 42 cm y la cresta de un frente de ondas avanza 6,0 m en 5,0 s. Determinar:**

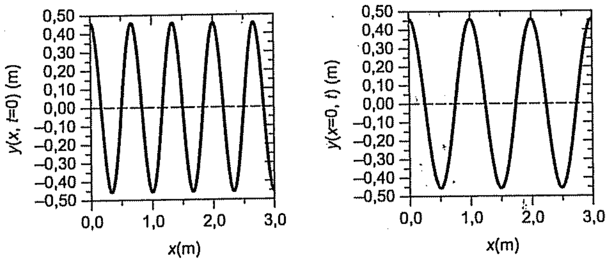
a) La velocidad de propagación de las ondas.

b) La longitud de la onda.

c) La frecuencia de la onda.

Sol.: a) 1,2 m/s; *b)* 42 cm; *c)* 2,9 Hz

4 **En la gráfica de la izquierda se representa la elongación de los puntos de una onda armónica en el instante de tiempo $t = 0$, y en la de la derecha la elongación del punto que ocupa la coordenada $x = 0$ en función del tiempo.**



Determinar:

a) La amplitud, longitud de onda y periodo de la onda armónica.

b) La función de onda.

c) La velocidad máxima de un punto de la cuerda.

d) La aceleración máxima de un punto de la cuerda.

Sol.: a) $A = 45$ cm; $\lambda = 0{,}67$ m; $T = 1{,}0$ s

b) En unidades del SI: $y\,(x, t) = 45 \cdot 10^{-2}$ sen $\left(3{,}0\ \pi x - 2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) 2,8 m/s

d) 18 m/s^2

5 **Dos cuerdas muy largas de densidades lineales de masa μ_1 y μ_2, con $\mu_1 = \mu_2/4$, se unen po uno de sus extremos formando una única cuerda. Una onda armónica se propaga por est cuerda y cuando llega al punto de unión, parte de la onda se refleja volviendo hacia atrá y parte se transmite. La amplitud de la onda transmitida es un 70% de la amplitud de l onda incidente. Suponiendo que no se producen pérdidas de energía, determinar:**

a) La relación entre la potencia de las ondas reflejada y transmitida, respecto a la potencia de l onda incidente.

b) La relación entre la amplitud de la onda reflejada y la incidente.

Sol.: a) La potencia de la onda transmitida es el 98% de la incidente; la potencia de la onda refle jada es el 2,0% de la incidente.

b) La amplitud de la onda reflejada es el 14% de la de la onda incidente.

6 **Cuando se produce un terremoto se generan tres tipos de ondas sísmicas conocidas como ondas *p*, *s*, y *l*. Las ondas *p* son ondas longitudinales que viajan, en zonas superficiales de la corteza terrestre, a unos 6,0 km/s. Las ondas *s* son ondas transversales que en la corteza terrestre viajan a unos 3,5 km/s. Las ondas *l* son ondas de superficie. Un sismógrafo empieza recibiendo las ondas *p* de un terremoto y al cabo de 20 segundos recibe las ondas *s*. Determinar la distancia del sismógrafo al epicentro del terremoto.**

Sol.: 170 km

7 **Percutimos simultáneamente dos diapasones afinados a 440 Hz y 442 Hz. Determinar la frecuencia que oiremos y el número de batidos por segundo.**

Sol.: 441 Hz y 2 batidos por segundo.

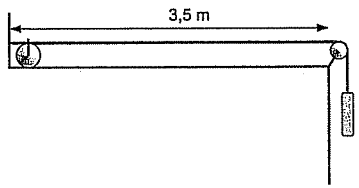
8 **Un bajista está afinando su bajo. En primer lugar afina la primera cuerda (Sol 1) a 98 Hz. Seguidamente pone el dedo en el quinto traste de la segunda cuerda y toca simultáneamente la nota Sol1 en la primera y segunda cuerda. El bajista percibe 4 pulsaciones por segundo por lo que deduce que la cuerda no se encuentra exactamente afinada a 98 Hz, sino que está a una frecuencia f' que desconoce. Seguidamente tensa un poco más la segunda cuerda, ajustando la clavilla, y vuelve a tocar simultáneamente la primera y la segunda cuerda. Ahora no percibe ningún batido y da la segunda cuerda por afinada. ¿Cuál es la frecuencia f' a la que se encontraba afinada inicialmente la segunda cuerda del bajo?**

Sol.: 94 Hz

9 **Dos ondas armónicas idénticas de amplitud A viajan en la dirección del eje x y sentido positivo. Ambas están desfasadas un ángulo δ. La amplitud de la onda resultante de la interferencia es $3A/2$. Determinar el desfase angular δ.**

Sol.: 0,84 rad = 48°

10 **Una cuerda de densidad lineal de masa $\mu = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg/m tiene sus dos extremos fijos y se tensa colgando de ella un recipiente con arena. En un punto de la cuerda se coloca un pequeño motor que le imprime un movimiento armónico simple de frecuencia 50 Hz. La longitud de cuerda vibrante es de 3,5 m.**



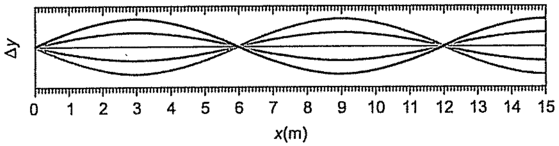
Determinar:

a) La tensión necesaria para que la cuerda vibre en el modo fundamental o primer armónico.

b) La tensión por la cual la cuerda vibrará en el quinto armónico.

Sol.: a) 0,15 kN; *b)* 5,9 N

11 **Una cuerda de 15 m de longitud tiene un extremo fijo y el otro libre. La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 120 m/s. En esta cuerda se genera la onda estacionaria que se representa en la figura:**



Determinar:

a) El número de armónico presente en la cuerda, su longitud de onda y frecuencia.

b) La longitud de onda y frecuencia de la fundamental.

Sol.: a) La cuerda vibra en su quinto armónico; $\lambda_{5°} = 12$ m; $f_{5°} = 10$ Hz

b) $\lambda_{1°} = 60$ m; $f_{5°} = 2{,}0$ Hz

12 **La longitud de vibración de las cuerdas de una guitarra es de 65,0 cm. La quinta cuerda tiene un diámetro de 0,860 mm y una masa de 2,00 g. La frecuencia fundamental de esta cuerda es de 110 Hz (corresponde a la nota La1).**

a) ¿Cuál es la tensión de la quinta cuerda?

La frecuencia fundamental de la sexta cuerda (más gruesa que la anterior) es de 83,0 Hz (corresponde a un Mi1).

b) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en la sexta cuerda?

Cuando un guitarrista pulsa la sexta cuerda apretando en el quinto traste suena la nota La1. Como la guitarra se encuentra desafinada la frecuencia de esta nota es de 112 Hz.

c) ¿Cuál es la longitud del tramo de cuerda que está vibrando?

Cuando el guitarrista pulsa simultáneamente el La1 de la quinta y la sexta cuerda:

d) ¿Cuál es la frecuencia de la nota que escucha un espectador del público?

e) ¿Cuál es la frecuencia de las pulsaciones que se producen?

Sol.: a) 62,9 N; *b)* $1{,}08 \cdot 10^2$ m/s; *c)* 48,2 cm; *d)* 111 Hz; *e)* 2,00 Hz

13 **Un pequeño motor hace oscilar una cuerda de 9,00 m de longitud con sus dos extremos fijos. La masa de la cuerda es de 0,100 kg y su tensión de $2{,}00 \cdot 10^2$ N. La frecuencia de la oscilación del motor es de 37,2 Hz.**

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda?

b) ¿Cuál es el armónico de la onda estacionaria presente en la cuerda?

c) ¿Cuál es la frecuencia a la que debería oscilar el motor para conseguir que la cuerda vibre en el modo fundamental?

Sol.: a) $1{,}34 \cdot 10^2$ m/s; *b)* el quinto; *c)* 7,44 Hz

14 **Las funciones de onda de dos ondas armónicas que se desplazan sobre el eje x son (en unidades del SI):**

$$y_1(x,t) = 0{,}70 \text{ sen}\left(2{,}0\ \pi x - 50\ \pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2(x,t) = 0{,}70 \text{ sen}\left(2{,}0\ \pi x - 50\ \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Determinar:

a) La función de onda resultante de la interferencia de las dos ondas.

b) La amplitud de la onda resultante de la interferencia.

Sol.: a) En unidades del SI: $y(x,t) = 1{,}4 \text{ sen}\left(2{,}0\ \pi x - 5{,}0\ \pi t + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

b) 0,54 m

15 **Las funciones de onda de dos ondas armónicas que se desplazan sobre el eje x son (en unidades del SI):**

$$y_1(x,t) = 0{,}25 \text{ sen}\ (0{,}50\ \pi x - 1{,}0\ \pi t)$$

$$y_2(x,t) = 0{,}25 \text{ sen}\ (0{,}50\ \pi x + 1{,}0\ \pi t)$$

Determinar:

a) La función de onda resultante de la interferencia de las dos ondas.

b) La distancia entre dos nodos consecutivos.

c) Las distancias x a las que se encuentran los puntos cuya amplitud de oscilación es máxima (antinodos o vientres).

Sol.: a) $y(x,t) = 0{,}50 \text{ sen}\ (0{,}50\ \pi x) \cos\ (1{,}0\ \pi t)$

b) 2,0 m

c) Los antinodos se encuentran en $x = (2n+1)$ siendo $n = 0,1,2,3\ldots$ Es decir, para valores de $x = 1{,}0$ m; 3,0 m; 5,0 m; 7,0 m; etc.

16 **En un concierto de rock un chico se sitúa a unos 15 m de los amplificadores y percibe un nivel de intensidad sonora de 100 dB. Suponiendo que la potencia sonora que emite un amplificador se propaga en el hemisferio que se encuentra por delante del mismo, determinar:**

a) La intensidad sonora que percibe el chico.

b) La potencia sonora emitida por el amplificador.

c) El nivel de intensidad sonora que percibiría al acercarse a sólo 2,0 m del amplificador.

Sol.: a) 10 mW/m^2; *b)* 14 W; *c)* 120 dB

17 **¿Cuántos decibelios aumenta el nivel de intensidad de un sonido cuando se duplica su intensidad?**

Sol.: 3,0 dB

18 **Un tren se encuentra parado en la estación y hace sonar su pitido que tiene una frecuencia de 370 Hz. Un segundo tren se aleja de la estación y sus viajeros oyen el pitido del tren para-**

do con una frecuencia de 360 Hz. Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido igual a 343 m/s, determinar la velocidad a la que se aleja el segundo tren.

Sol.: 9,3 m/s

19 **La sirena de un camión de bomberos tiene una frecuencia de 520 Hz. Este camión acude a sofocar un incendio con la sirena conectada. Un conductor se encuentra parado en un semáforo cuando ve por el retrovisor que se acerca el camión de bomberos a 50 km/h. El camión de bomberos adelanta al coche y cuando el semáforo se pone en verde el coche arranca y sigue al camión de bomberos a 30 km/h.**

Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido igual a 343 m/s, determinar:

a) La frecuencia que percibe el conductor del coche cuando está parado y el camión se acerca por detrás a 50 km/h.

b) La frecuencia que percibe el conductor del coche cuando está parado y el camión se aleja por delante a 50 km/h.

c) La frecuencia que percibe el conductor del coche cuando avanza a 30 km/h y el camión se aleja por delante a 50 km/h.

Sol.: *a)* 540 Hz; *b)* 500 Hz; *c)* 510 Hz

20 **Una sirena está montada sobre un dispositivo que la hace girar con velocidad angular constante. Cuando el dispositivo está parado la frecuencia de la sirena que percibe un observador en reposo es de 550 Hz. Cuando se conecta el dispositivo y la sirena gira, el observador percibe que la frecuencia del sonido aumenta hasta 570 Hz y luego decae por debajo de los 550 Hz.**

Considerando el aire en calma y la velocidad de propagación del sonido igual a 343 m/s, determinar:

a) La velocidad de giro de la sirena.
b) La mínima frecuencia que escuchará el observador.

Sol.: *a)* 12 m/s; *b)* 530 Hz

21 **Un avión a reacción vuela a Mach 2,3. Un observador ve pasar el avión por encima de su cabeza y al cabo de 15 s escucha el trueno sónico. Determinar la altura a la que vuela el avión. Considerar la velocidad del sonido igual a 343 m/s.**

Sol.: 5,7 km

22 **Una lancha avanza a una velocidad de 15 m/s por la superficie del agua de un lago generando ondas que se propagan a 10 m/s. La lancha se mueve en dirección paralela a la orilla y a una distancia de 90 m de ésta. Determinar el tiempo que ha de transcurrir desde que la lancha pasa por delante de un observador situado en la orilla hasta que llega al observador el oleaje generado por la lancha.**

Sol.: 0,91 segundos

PARTE II

TERMODINÁMICA

CAPÍTULO 13

TEMPERATURA Y CALOR

13.1. TEMPERATURA

ESCALA CELSIUS DE TEMPERATURA

En la escala Celsius la temperatura se mide en grados Celsius, que se simbolizan °C. Para definir esta escala se toma como referencia el punto de congelación del agua a la presión de $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa (1 atm), este valor se toma como cero, 0 °C. El otro punto de referencia es el de ebullición del agua a la presión de $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, a este valor se le asigna el valor 100 °C. Este intervalo se divide en 100 partes iguales y cada una corresponde a 1 °C.

ESCALA ABSOLUTA DE TEMPERATURA

En la escala absoluta la temperatura se mide en kelvin, su símbolo es K. Un kelvin se define como 1/273,16 de la temperatura del *punto triple del agua*. Esto es la temperatura a la que el sólido, el líquido y el gas están en equilibrio. La temperatura del punto triple del agua es 273,16 K o 0,01 °C y la presión es de 610 Pa. La amplitud de un grado Celsius es la misma que la de un kelvin; es decir, una determinada variación de temperatura tiene el mismo valor tanto si se expresa en grados Celsius como si se expresa en kelvin. El cero de la escala kelvin recibe el nombre de cero absoluto. Para pasar de grados Celsius a kelvin se suma 273,15 a los grados Celsius:

$$T = T_C + 273{,}15$$

DILATACIÓN TÉRMICA

Salvo algunas excepciones, los cuerpos se dilatan al aumentar su temperatura. Una de estas excepciones es el agua que, entre 0 °C y 4 °C, al aumentar su temperatura disminuye su volumen.

Dilatación lineal

En el caso de una barra o un hilo normalmente sólo interesa su variación de longitud con los cambios de temperatura. La variación de longitud ΔL es proporcional a la longitud inicial L_0 y prácticamente proporcional a la variación de temperatura ΔT:

$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta T$$

α es el coeficiente de dilatación lineal, que es característico de cada material. ΔT tiene el mismo valor en grados Celsius que en kelvin. El coeficiente de dilatación lineal de un material representa la variación relativa de longitud cuando su temperatura se eleva una unidad. El coeficiente de dilatación de un sólido no varía mucho con la presión pero sí varía con la temperatura, pero para intervalos no muy grandes de temperatura puede considerarse constante.

Dilatación superficial

En una lámina normalmente interesa la variación del área, ΔA, de su superficie que viene dada por la expresión:

$$\Delta A = A_0\, \gamma\, \Delta T$$

γ es el coeficiente de dilatación superficial. Está relacionado con el coeficiente de dilatación lineal por: $\gamma = 2\,\alpha$.

Dilatación volúmica

La variación de volumen de un sólido cuando su temperatura varía ΔT es:

$$\Delta V = V_0\, \beta\, \Delta T$$

β es el coeficiente de dilatación volúmica, que está relacionado con el coeficiente de dilatación lineal por: $\beta = 3\,\alpha$ y V_0 es el volumen inicial.

GASES IDEALES

Los gases normalmente ocupan todo el recipiente donde están contenidos; por tanto, para calcular la variación de volumen de un gas contenido en un recipiente de paredes rígidas no podemos utilizar la ecuación anterior. Al aumentar la temperatura de un gas contenido en un recipiente de este tipo, se incrementa la presión.

Ley de Boyle

A temperatura constante, el volumen de una determinada masa de gas es inversamente proporcional a la presión:

$$PV = \text{constante o bien } P_1 V_1 = P_2\, V_2$$

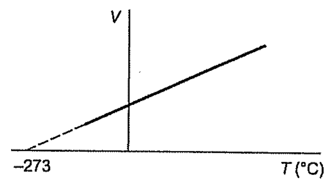
Ley de Charles

A presión constante, el volumen de una determinada masa de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta:

$$\frac{V}{T} = \text{constante o bien } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Una situación de presión constante se da por ejemplo en un gas que está en un recipiente que tiene una pared móvil.

El francés Jacques Charles (1746-1823) descubrió que al representar gráficamente el volumen de una masa de gas frente a la temperatura se obtiene una línea recta, al extrapolar esta recta hasta volumen cero, resulta que para $V = 0$, $T = -273$ °C. Como la temperatura de un determinado gas no puede ser tan baja como se quiera, ya que se llega a una temperatura a la que el gas experimenta un cambio de estado y deja de comportarse como tal, fue necesario extrapolar las gráficas. Puesto que un gas no puede tener un volumen negativo, no cabía esperar que fuese posible alcanzar una temperatura inferior a -273 °C, ésta debía ser, por tanto, la temperatura más baja que se podía alcanzar; muchos experimentos posteriores han confirmado esta idea.



Ley de Gay Lussac

A volumen constante, la presión de una determinada masa de gas es proporcional a la temperatura absoluta:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Cuando varían simultáneamente la presión y la temperatura de un gas, pueden combinarse las ecuaciones de Boyle y Charles y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Ley de los gases ideales

Las leyes anteriores son casos particulares de la ley de los gases ideales que podemos expresar mediante la ecuación:

$$P\,V = n\,R\,T$$

n es el número de moles de gas y R es la constante de los gases que en el SI es $R = 8{,}314$ J/(K · mol), también puede expresarse $R = 0{,}08205$ atm · L/(K · mol).

Un *mol* es la cantidad de sustancia que contiene tantas unidades elementales (moléculas, átomos...) como átomos hay en 12 g de carbono 12. Un mol es $6{,}02 \cdot 10^{23}$ partículas. La masa en gramos de un mol de átomos, o de un mol de moléculas, de cualquier elemento o compuesto es numéricamente igual a la masa atómica o molecular, respectivamente, expresada en unidades de masa atómica. La masa de un mol de moléculas de una sustancia es la *masa molar* de esta sustancia. La masa de un mol de átomos de un elemento es la *masa molar atómica* de este elemento.

El número de moles de una masa m de un gas cuya masa molar (masa de un mol de moléculas) M es:

$$n = \frac{m}{M}$$

El número de moléculas contenidas en un mol es igual a la *constante de Avogadro* N_A, siendo $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Ley de Dalton

En una mezcla de gases cada componente de la mezcla ejerce una *presión parcial* igual a la que ejercería si sólo ocupase un volumen igual al de la mezcla a la misma temperatura que ésta. La presión total de la mezcla es igual a la suma de las presiones parciales de todos los componentes.

La presión parcial de un gas de la mezcla se expresa:

$$P_i = \frac{n_i RT}{V}$$

n_i es el número de moles de un gas genérico i, T es la temperatura de la mezcla y V es el volumen que ocupa la mezcla.

La presión total de la mezcla será:

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n = \Sigma P_i$$

Aunque estas leyes se refieren al gas ideal, se cumplen con buena aproximación en los gases reales cuando están a bajas presiones y temperaturas lejanas a las de sus correspondientes puntos de licuefacción.

13.2. CALOR

El calor es la energía transferida de un cuerpo a otro o entre dos puntos de un mismo cuerpo como consecuencia de una diferencia de temperaturas. Podemos decir que el calor es energía en tránsito. La unidad de calor del SI es, lógicamente, el *joule*. Otra unidad bastante utilizada es la caloría, cal. Una *caloría* es la energía que hay que suministrar a 1 g de agua para aumentar su temperatura desde 14,5 °C a 15,5 °C.

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

MODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Hay tres modos de transferir energía mediante calor: conducción, convección y radiación.

Conducción

Se da en los sólidos, líquidos y gases. Cuando aumenta la temperatura de un cuerpo, las partículas (átomos, moléculas, iones, electrones) que lo forman incrementan su energía cinética media (de vibración en el caso de los sólidos y de traslación en el caso de los gases y líquidos). Debido a las colisiones entre las partículas hay una transferencia de energía de las más energéticas a las menos energéticas.

Experimentalmente se ha encontrado que la energía transferida por unidad de tiempo, I, denominada flujo de calor o intensidad térmica, entre las dos caras de una placa viene dada por la *ley de Fourier:*

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

A es el área de la sección transversal de la placa, ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos caras, Δx es el espesor de la lámina y k es una constante de proporcionalidad denominada *conductividad térmica,* en el SI se mide en $W/(m \cdot K)$. Esta expresión es válida si ΔT y Δx son pequeñas. Las sustancias, como el cobre o la plata, que presentan valores altos para la conductividad térmica, se dice que son buenos conductores del calor; en general los metales son buenos conductores. Las sustancias

que tienen valores bajos de conductividad térmica, como el corcho o la madera, son aislantes. La relación $\Delta T/\Delta x$ es el *gradiente de temperatura.*

La *resistencia térmica,* R, de una plancha es:

$$R = \frac{\Delta x}{Ak}$$

En el SI se mide en K/W.

Podemos expresar el flujo de calor:

$$I = \frac{\Delta T}{R}$$

La resistencia térmica equivalente, R_{eq}, de una placa compuesta por diversas placas en contacto, de diversos materiales y del mismo o distinto espesor, combinación en serie, es :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

R_1... representa las resistencias térmicas de cada una de las placas.

La resistencia térmica equivalente, R_{eq}, a un conjunto de placas de la misma longitud colocadas en paralelo es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Convección

La convección es la transferencia de energía por las partículas de las zonas calientes que se mueven a las zonas frías. En general los líquidos y gases son malos conductores, la transferencia de energía mediante calor se produce por convección. Si el movimiento de las partículas que transportan la energía se debe a diferencias de densidad o a la acción de la gravedad se dice que la convección es *natural.* Si la sustancia es obligada a circular por la acción de un ventilador o de una bomba se trata de una convección *forzada.*

Radiación

En la radiación la energía es transmitida mediante ondas electromagnéticas. A diferencia de la conducción y de la convección, en la radiación no se requiere un medio material, la energía puede transmitirse por el espacio vacío. La energía emitida por unidad de tiempo es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma AT^4$$

Esta ecuación es la expresión matemática de la ley de *Stefan-Boltzmann.* A es el área de la superficie del cuerpo emisor es, T es la temperatura absoluta, σ es la constante de Stefan-Boltzmann que tiene un valor $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/(m^2 \cdot K^4)$, e es la *emisividad,* su valor está comprendido entre 0 y 1. Para los cuerpos que tienen una superficie negra la emisividad tiene un valor próximo a 1 y los cuerpos que tienen superficies brillantes presentan emisividades bajas. El cuerpo ideal cuya emisividad es 1 se denomina *cuerpo negro.*

La energía neta ganada o perdida por unidad de tiempo por un objeto a una temperatura T_1 que tiene una superficie de área A que se encuentra dentro de una cavidad de temperatura T_2 es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A\,(T_1^4 - T_2^4)$$

CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

La capacidad calorífica, C, de un objeto es la energía que hay que suministrarle para aumentar su temperatura en una unidad. Si para producir una variación de temperatura ΔT a un objeto se requiere una cantidad de energía Q, se cumple:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

En el SI la capacidad calorífica se mide en J/kg. Otra unidad es la cal/g.

La capacidad calorífica por unidad de masa es el calor específico, c. Por tanto, el calor específico es la energía que hay que suministrar a la unidad de masa de una sustancia para aumentar su temperatura en una unidad. Si para producir una variación de temperatura ΔT a una de masa m de una sustancia se requiere una cantidad de energía Q, se cumple:

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}$$

La unidad del SI de calor específico es J/(kg K). Otra unidad es cal/(°C g).

El calor específico de una sustancia depende de la temperatura y algo de la presión, pero para variaciones no muy grandes de la temperatura puede considerarse constante.

De la expresión anterior se deduce:

$$Q = m\,c\,\Delta T$$

Si la temperatura aumenta, ΔT es positivo, por tanto Q también es positivo y el sistema gana energía. Si la temperatura disminuye, ΔT es negativo, por tanto Q también es negativo y el sistema pierde energía.

CALOR LATENTE

Para que tenga lugar un cambio de fase de sólido a líquido o de líquido a gas es necesario suministrar energía al sistema, aunque la temperatura no varía mientras se produce el cambio. En los cambios inversos, de líquido a gas o de gas a líquido, el sistema pierde energía y la temperatura del sistema tampoco varía mientras tiene lugar el cambio. La energía que la unidad de masa de una sustancia gana o pierde cuando tiene lugar un cambio de fase se denomina calor latente. La energía necesaria para que una masa m realice un cambio de fase es:

$$Q = m\,L$$

L representa el calor latente, que en el caso de una fusión es el *calor latente de fusión* que simbolizaremos L_f, y si se trata de una valorización, el *calor latente de vaporización* que simbolizaremos L_v.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CALORIMETRÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En muchos problemas de calorimetría se considera un sistema aislado cuando las temperaturas de las diferentes partes son distintas. Cuando estas partes se ponen en contacto térmico se llega a una situación de equilibrio en el que todas ellas alcanzan la misma temperatura Si el sistema está aislado, la energía que cede una parte del sistema debe ser igual y de signo contrario al que gana la otra parte:

$$-Q_{cedido} = Q_{ganado}$$

Recordemos que cuando un sistema pierde energía mediante calor, Q es negativo y cuando gana energía mediante calor, Q es positivo.

Por ejemplo, si mezclamos una masa m_1 de una sustancia de calor específico c_1 que se encuentra a la temperatura T_1 con una masa m_2 de otra sustancia de calor específico c_2 que se encuentra a una temperatura inferior T_2, cuando se alcance el equilibrio las dos tendrán la misma temperatura T_f. Si la mezcla se ha hecho en un recipiente aislado térmicamente, la energía que ha cedido la sustancia caliente es numéricamente igual a la que ha ganado la sustancia fría.

Energía que ha cedido la sustancia caliente:

$$Q_{cedido} = m_1\,c_1\,(T_f - T_1)$$

Energía ganada por la sustancia fría:

$$Q_{ganado} = m_2\,c_2\,(T_f - T_2)$$

Como $T_1 < T_f < T_2$, Q_{cedido} es negativo y Q_{ganado} es positivo. Por tanto:

$-Q_{cedido} = Q_{absorbido}$ o bien: $-\,m_1\,c_1\,(T_f - T_1) = m_2\,c_2\,(T_f - T_2)$

Esto suele escribirse:

$$m_1\,c_1\,(T_1 - T_f) = m_2\,c_2\,(T_f - T_2)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

DILATACIÓN TÉRMICA

13.1. ¿Cuál es la longitud de una barra de hierro a 50 °C, si su longitud a 0,0 °C es 15,4816 cm? Coeficiente de dilatación lineal del hierro $12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.

Solución

Aplicaremos la expresión:

$\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta T$; de la que se deduce $L_f = L_0 + L_0\,\alpha\,\Delta T$

$L_f = 15{,}4816 \text{ cm} + 15{,}4816 \text{ cm} \times 12 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1} \times 50\,°C = 15{,}4909 \text{ cm}$

$L_f = 15{,}4909$ cm

13.2. Cuál debe ser la variación de temperatura de una barra de latón de longitud L_0 para que su longitud se incremente en $L_0/1000$. Coeficiente de dilatación lineal del latón $20 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.

Solución

Aplicaremos la expresión:

$$\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta T$$

$$\frac{L_0}{1\,000} = L_0 \times 20 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}\,\Delta T;\ \Delta T = \frac{1}{1\,000 \times 20 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}} = 50\ °C$$

$$\Delta T = 50\ °C$$

13.3. Se desea introducir un aro circular de hierro de 49,9 cm de diámetro, medido a 0,0 °C, en una barra de cobre de 50,0 cm de diámetro. Coeficiente de dilatación lineal del hierro $12{,}1 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}$.

Solución

$$\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta T;\ 50{,}0\ \text{cm} - 49{,}9\ \text{cm} = 49{,}9\ \text{cm} \times 12{,}1 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}\,\Delta T;\ \Delta T = 165{,}6\ °C$$

Se tendrá que calentar a 166 °C.

13.4. Con una regla de latón que ha sido calibrada a 0,0 °C se ha medido una varilla de hierro, la temperatura de las dos era 25 °C y la longitud de la varilla de hierro ha sido 2,875 m. ¿Cuál será la longitud de la barra de hierro a 0,0 °C? Coeficiente de dilatación lineal del latón $20 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}$. Coeficiente de dilatación lineal del hierro $12 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}$.

Solución

A 25 °C, la longitud de una división de la regla es: $1\,(1 + \alpha_{\text{latón}}\,\Delta T)$.
A 25 °C, la longitud de la barra de hierro es: $L_{25} = L_0\,(1 + \alpha_{\text{hierro}}\,\Delta T)$.

La longitud de la barra de hierro que se ha medido será: $L_{25} = \dfrac{L_0\,(1 + \alpha_{\text{hierro}}\,\Delta T)}{(1 + \alpha_{\text{latón}}\,\Delta T)}$

$$L_0 = \frac{L_{25}\,(1 + \alpha_{\text{latón}}\,\Delta T)}{(1 + \alpha_{\text{hierro}}\,\Delta T)}$$

Sustituimos:

$$L_0 = \frac{2{,}875\ \text{m}\,(1 + 20 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}\,30\ °C}{(1 + 12 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}\,30\ °C} = \frac{2{,}875\ \text{m}\,(1 + 600 + 10^{-6})}{(1 + 360 \cdot 10^{-6})}$$

Podemos hacer la aproximación: $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

Que podemos desarrollar en serie:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots \approx 1 - x$$

$$(1 + 360 \cdot 10^{-6})^{-1} = (1 - 360 \cdot 10^{-6})$$

$$L_0 = 2{,}875\ \text{m}\,(1{+}600 \cdot 10^{-6}) + (1{-}360 \cdot 10^{-6})$$

Si despreciamos el producto $2{,}875\ \text{m} \times 600 \cdot 10^{-6} \times 1 - 360 \cdot 10^{-6}$, podemos escribir:

$$L_0 = 2{,}875\ \text{m} + 2{,}875\ \text{m}\,(600\ 10^{-6} - 360 \cdot 10^{-6}) = 2{,}8756\ \text{m}$$

Mide 2,876 m

13.5. Un termómetro de mercurio tiene un depósito de 0,65 cm³ y un capilar cuya área de la sección transversal es 0,12 mm² medidos a 0,0 °C. A esta temperatura el depósito está justamente lleno de mercurio. ¿Qué altura alcanzará el mercurio a 100 °C? Coeficiente de dilatación cúbica del mercurio $0{,}18 \cdot 10^{-3}\,(°C)^{-1}$, coeficiente de dilatación lineal del vidrio $9{,}0 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}$.

Solución

Sea V_0 el volumen del depósito y del mercurio a 0,0 °C.

El volumen del depósito de mercurio a 100 °C será:

$$V_D = V_0\,(1 + 3\,\alpha_V\,\Delta T)$$

El volumen del mercurio a 100 °C será:

$$V_M = V_0\,(1 + \alpha_M\,\Delta T)$$

El volumen de mercurio que sale del capilar es:

$$V_M - V_D = V_0\,(1 + \alpha_M\,\Delta T) - V_0\,(1 + 3\,\alpha_V\,\Delta T) = V_0\,\Delta T\,(\alpha_M - 3\,\alpha_V)$$

Este volumen es igual al área de la sección recta del capilar, A, a 100 °C por la altura de la columna de mercurio, l.
El área de la sección recta del capilar a 100 °C será:

$$A = A_0\,(1 + 2\,\alpha_V\,\Delta T)$$

Escribimos:

$$A_0\,(1 + 2\,\alpha_V\,\Delta T)\,l = V_0\,\Delta T\,(\alpha_M - 3\,\alpha_V)$$

Despejamos l:

$$l = \frac{V_0\,\Delta T\,(\alpha_M - 3\alpha_V)}{A_0\,(1 + 2\alpha_V\,\Delta T)}$$

Sustituimos:

$$l = \frac{0{,}65 \cdot 10^3\ \text{mm}^3 \times 100\ °C\,(0{,}18 \cdot 10^{-3}\,(°C)^{-1} - 3 \times 9{,}0 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1})}{0{,}12\ \text{mm}^2\,(1 + 2 \times 9{,}0 \cdot 10^{-6}\,(°C) \times 100\ °C)}$$

Alcanza una altura de 83 mm.

13.6. Una varilla de acero de 0,300 m de longitud está sujeta por los extremos, y a una temperatura de 25,0 °C no hay ningún esfuerzo. Se enfría a 0,0 °C sin que cedan las sujeciones de los extremos y sin que la varilla se deforme. Calcular el esfuerzo de tensión que soporta la varilla. Coeficiente de dilatación lineal del acero $12 \cdot 10^{-6}\,(°C)^{-1}$, módulo de Young del acero $20 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2$.

Solución

Si los extremos de la varilla no estuvieran fijos, al enfriarse la varilla se contraería una distancia ΔL que valdría:

$$\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta T \qquad (1)$$

Al estar los extremos fijos, la varilla no puede contraerse, en consecuencia aparece un esfuerzo que recibe el nombre de *esfuerzo térmico*. Este esfuerzo es el mismo que habría que aplicar para producir un alargamiento ΔL. Este esfuerzo viene dado por la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_0} \qquad (2)$$

Donde A es el área de la sección transversal de la varilla e Y es el módulo de Young. De la expresión (1) se obtiene:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\, \Delta T$$

Que sustituimos en (2) y resulta:

$$\frac{F}{A} = Y\, \alpha\, \Delta T$$

Sustituimos:

$$\frac{F}{A} = 20 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2 \times 12 \cdot 10^{-6}\ (°\text{C})^{-1} \times 25{,}0\ °C = 60 \cdot 10^6\ N/m^2$$

Esfuerzo: 60 MN/m²

13.7. Un cable de aluminio tiene un nervio central de cobre. La tensión en el acero es nula a 0,0 °C. Calcular la tensión que soportará el cable si se calienta a 30 °C. Coeficiente de dilatación lineal del acero $12 \cdot 10^{-6}\ (°\text{C})^{-1}$, coeficiente de dilatación lineal del aluminio $24 \cdot 10^{-6}\ (°\text{C})^{-1}$, módulo de Young del acero $20 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2$.

Solución

Como el coeficiente de dilatación del aluminio es mayor que el del acero, el primero se dilatará más, pero al estar los dos unidos aparecerá una tensión en el acero que lo estirará un distancia igual a la diferencia de los alargamientos.

El alargamiento viene dado por la expresión:

$$\Delta L = \text{L}_0\, \alpha\, \Delta T$$

$$\Delta L_{\text{aluminio}} = L_0\, 24 \cdot 10^{-6}\ (°\text{C})^{-1} \times 30\ °\text{C} = L_0\, 720 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta L_{\text{acero}} = \text{L}_0\, 12 \cdot 10^{-6}\ (°\text{C})^{-1} \times 30\ °C = L_0\, 360 \cdot 10^{-6}$$

La diferencia entre estos dos alargamientos es:

$$\Delta L = L_0\, 720 \cdot 10^{-6} - L_0\, 360 \cdot 10^{-6} = L_0\, 360 \cdot 10^{-6}$$

Para calcular el esfuerzo aplicaremos la expresión:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\frac{F}{A} = 20 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2 \times \frac{L_0\, 360 \cdot 10^{-6}}{L_0} = 72 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$$

Esfuerzo: 72 MN/m²

GASES IDEALES

13.8. Cierta cantidad de un gas ideal ocupa 76,8 cm³ a la presión de 1,20 atm. ¿Cuál será el volumen a 1,00 atm y a la misma temperatura?

Solución

Aplicaremos la ley de Boyle $P_1 V_1 = P_2\, V_2$.

$$1{,}20\ \text{atm} \times 76{,}8\ \text{cm}^3 = 1{,}00\ \text{atm}\ \text{V}_2 \qquad \text{V}_2 = 92{,}2\ \text{cm}^3$$

13.9. 100 L de aire se encuentran a una temperatura de 18,5 °C, manteniendo la presión constante, se eleva la temperatura a 27,0 °C. ¿Cuál será el volumen a la nueva temperatura?

Solución

Aplicaremos la ley de Charles $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

$$T_1 = (18{,}5 + 273{,}15)\ K = 291{,}65\ K;\ T_2 = (27{,}0 + 273{,}15)\ K = 300{,}15\ K$$

$$\frac{100\ \text{L}}{291{,}65\ K} = \frac{V_2}{300{,}15\ K} \qquad V_3 = 103\ \text{L}$$

13.10. Un tubo de vidrio estrecho cerrado por un extremo contiene aire encerrado por una gota de mercurio. A una temperatura de 20 °C el aire encerrado en el tubo alcanza una altura de 25 cm. Si se calienta el tubo a 80 °C, ¿qué altura alcanzará el aire? Suponer que la sección del tubo es uniforme y suponer despreciable su dilatación.

Solución

Al calentar el tubo el volumen del aire aumenta, y como se desplaza la gota de mercurio, la presión se mantiene constante.

El volumen inicial y el volumen final mantienen la relación:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$T_1 = (20 + 273{,}15)\ K = 293{,}1\ K;\ T_2 = (80 + 273{,}15)\ K = 353{,}1\ K \qquad (1)$$

Por otra parte $V = A\,h$; por tanto, $V_1 = A \cdot 25$ cm y $V_2 = A \cdot h_2$

Sustituimos en (1):

$$\frac{A \cdot 25 \text{ cm}}{293{,}1\ K} = \frac{A \cdot h}{353{,}1\ K} \qquad h = 30 \text{ cm}$$

13.11. Cierta masa de gas ocupa un volumen de 100 L a 95 °C y $1{,}04 \cdot 10^5$ Pa. ¿Cuál será el volumen de esta masa de gas a 65 °C y $1{,}08 \cdot 10^5$ Pa?

Solución

Como se modifica la presión y la temperatura, aplicaremos la expresión:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \qquad (1)$$

$$T_1 = (95 + 273{,}15) = 368{,}1\ K;\ T_2 = (65 + 273{,}15) = 338{,}1\ K$$

Sustituimos en (1):

$$\frac{1{,}04 \cdot 10^5\ Pa \times 100 \text{ L}}{368{,}1\ K} = \frac{1{,}08 \cdot 10^5\ Pa \times V_2}{338{,}1\ K}$$

$V_2 = 88{,}4$ L

13.12. Un recipiente de 10 dm^3 contiene 4,0 mol de hidrógeno a una temperatura de 17 °C. ¿A qué presión se encuentra este gas?

Solución

Supondremos comportamiento ideal y aplicaremos la ecuación $PV = nRT$.

$$T = (273{,}15 + 17)\ K = 290{,}1\ K$$

$$P \times 10 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 4{,}0 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)} \times 290{,}1 \text{ K};\ P = 9{,}6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

13.13. Hallar la densidad del nitrógeno a una presión de 125 kPa y una temperatura de 310 K. El nitrógeno es un gas diatómico cuya masa atómica es 14,0.

Solución

Aplicaremos la ecuación de los gases ideales $PV = nRT$.

Como el nitrógeno es un gas diatómico, su fórmula es N_2 y su masa molar es $M_{N_2} = 28{,}0$ g/mol. Consideremos una masa m de hidrógeno que ocupa un volumen V en las condiciones indicadas, el número de moles de esta masa m es $n = m/M_{N_2}$. Sustituimos en la ecuación de los gases ideales:

$$PV = \frac{m}{M_{N_2}} R\,T$$

Como la densidad es $\rho = m/V$, en la ecuación anterior tenemos:

$$P = \frac{m}{V}\frac{RT}{M_{N_2}} \qquad P = \rho_{N_2}\frac{RT}{M_{N_2}} \qquad \rho_{N_2} = \frac{PM_{N_2}}{RT}$$

Sustituimos:

$$\rho_{N_2} = \frac{125 \cdot 10^3\ Pa \times 28{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{8{,}31 \text{ J/(k} \cdot \text{mol)} \times 310\ K} = 1{,}36 \text{ kg/m}^3$$

Densidad: 1,36 kg/m^3

13.14. Una botella metálica de 60 L contiene oxígeno a una presión de 50 atm y una temperatura de 20 °C. Cuando se ha consumido una cierta cantidad de oxígeno el manómetro indica 15 atm y la temperatura es 18 °C. ¿Qué masa de oxígeno se ha consumido? Masa molar del oxígeno $M_{O_2} = 32$ g/mol.

Solución

Aplicaremos la ecuación de los gases PV = nRT. (1)

$$T_1 = (273{,}15 + 20)\ K = 293{,}1\ K;\ T_2 = (273{,}15 + 18)\ K = 291{,}1\ K$$

El número de moles de oxígeno que inicialmente hay en la botella será:

$$n_1 = \frac{50 \text{ atm} \times 60\ L}{0{,}082 \text{ atm} \cdot L/(K \cdot \text{mol}) \times 293{,}1\ K} = 124 \text{ mol}$$

Una vez que ha salido el gas, el restante ocupa todo el volumen del recipiente. El número de moles que al final hay en la botella es:

$$n_2 = \frac{15 \text{ atm} \times 60\ L}{0{,}082 \text{ atm} \cdot L/(K \cdot \text{mol}) \times 291{,}1\ K} = 37{,}7 \text{ mol}$$

El número de moles que ha salido es:

$$n_1 - n_2 = 124 \text{ mol} - 37{,}7 \text{ mol} = 86{,}3 \text{ mol}$$

La masa de n moles de gas es $m = n\,M$.
Donde M es la masa molar del gas.
La masa de oxígeno que ha salido será: $m = 86{,}3 \text{ mol} \times 32 \text{ g/mol} = 2761$ g

Han salido 2,8 kg.

13.15. Un recipiente de 20,0 L que está a 10 °C contiene 15,0 g de oxígeno y 25,0 g de nitrógeno. Determinar:

a) La presión parcial de cada gas.

b) La presión total del recipiente. Los dos gases son diatómicos, la masa atómica del oxígeno es 16,0 y la del nitrógeno 14,0.

Solución

a) La presión parcial de cada gas. Aplicaremos la ley de Dalton. Las masas molares de estos gases son:

$$M_{O_2} = 2 \times 16{,}0 \text{ g/ mol} = 32{,}0 \text{ g/mol};\ M_{N_2} = 2 \times 14{,}0 \text{ g/ mol} = 28{,}0 \text{ g/mol}$$

El número de moles de cada gas es:

$$N_{O_2} = \frac{15{,}0 \text{ g}}{32{,}0 \text{ g/mol}} = 0{,}4687 \text{ mol};\ N_{N_2} = \frac{25{,}0 \text{ g}}{28{,}0 \text{ g/mol}} = 0{,}8928 \text{ mol}$$

$$T = (10 + 273{,}15)\,K = 283{,}1\,K$$

La presión parcial de un gas en una mezcla de gas cumple: $P_i\,V = n_i\,RT$

$$P_{O_2} = \frac{0{,}4687 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/}(K \cdot \text{mol}) \times 283{,}1\,K}{20{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 55{,}13 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$P_{N_2} = \frac{0{,}8928 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/}(K \cdot \text{mol}) \times 283{,}1\,K}{20{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 105{,}0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$P_{O_2} = 55{,}1 \text{ kPa};\ P_{N_2} = 105 \text{ kPa}$$

b) Presión total.

En una mezcla de gases la presión total es: $P = \Sigma\,P_i$

$$P = 55{,}13 \cdot 10^3 \text{ Pa} + 105{,}0 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 160{,}1 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$P = 160 \text{ kPa}$$

CALOR

Modos de transferencia de calor

13.16. Una plancha de cobre tiene un sección transversal de área 400 cm^2 y un espesor de 3,0 cm. Una cara tiene una temperatura de 120 °C y la otra está a 180 °C. Calcular la energía que fluye a través de la placa en 5,0 min. Conductividad térmica del cobre 380 W/(m · K).

Solución

Aplicaremos la expresión:

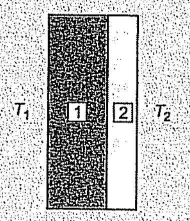
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k\,A\,\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\Delta T = (180 - 120)\,K = 60 \text{ K}$$

$$\Delta Q = 380\,\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot K} \times 400 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \times \frac{60\,K}{3{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \times 300 \text{ s} = 9{,}12 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\Delta Q = 9{,}1 \text{ MJ}$$

13.17. La figura representa una pared compuesta formada por dos placas 1 y 2 de dos materiales diferentes, de la misma área, A, y de espesores L_1 y L_2, respectivamente. Demostrar que la resistencia equivalente es igual a la suma de las resistencias de las placas, $R_{eq} = R_1 + R_2$.



Solución

En estado estacionario, las caras de las placas que están en contacto tienen la misma temperatura, T_x, las corrientes térmicas a través de ellas son iguales. Una placa equivalente a estas dos placas es una placa de la misma área de la sección transversal por la que pasa el mismo flujo de calor que por estas placas cuando la diferencia de temperatura entre sus caras es $T_2 - T_1$.

El flujo de calor será:

Placa 1: $I = \dfrac{(T_x - T_1)}{R_1}$

Placa 2: $I = \dfrac{(T_2 - T_x)}{R_2}$

Placa equivalente: $I = \dfrac{(T_2 - T_1)}{R_{eq}}$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$T_x - T_1 = I\,R_1 \qquad T_2 - T_x = I\,R_2 \qquad T_2 - T_1 = I\,R_{eq}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$T_2 - T_1 = I\,R_2 + I\,R_1 = I\,(R_1 + R_2)$$

Como $T_2 - T_1 = I\,R_{eq}$ resulta $R_{eq} = R_1 + R_2$

13.18. Una barra de acero de 10 cm de longitud y una sección transversal de área de 4,0 cm^2 está en contacto térmico con otra barra de cobre de longitud 20 cm. El extremo libre de la barra de acero está en contacto con vapor de agua a 100 °C y el extremo libre de la barra de cobre está en contacto con hielo fundente a 0,0 °C. Determinar:

a) El flujo de calor a través de estas barras.
b) La temperatura en la unión de las barras. Conductividad térmica del acero 50 W/(m · K), conductividad térmica del cobre 380 W/(m · K).

Solución

a) El flujo de calor a través de estas barras. El flujo de calor a través de una barra es:

$$I = \frac{\Delta T}{R} \qquad (1)$$

Calcularemos la resistencia equivalente de las dos barras:

La resistencia térmica de una barra es: $R = \dfrac{\Delta x}{A\,k}$

Como las barras están en serie: $R_{eq} = R_1 + R_2$

$$R_{eq} = \frac{0{,}10\ \text{m}}{4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \times 50\ \text{W/(m} \cdot \text{K)}} + \frac{0{,}20}{4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \times 380\ \text{W/(m} \cdot K)} = 6{,}31\ \text{K/W}$$

Sustituimos en (1):

$$I = \frac{100\ \text{K}}{6{,}31\ \text{K/W}} = 15{,}8\ \text{W}$$

$$I = 16\ \text{W}$$

b) La temperatura en la unión de las barras. Podemos considerar cualquiera de las dos barras. Aplicamos en (1) a la barra de acero.

$$15{,}8\ \text{W} = 50\ \text{W/(m} \cdot \text{K)}\,\frac{4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\,\Delta T}{0{,}10\ \text{m}} \qquad \Delta T = 79\ \text{K}$$

$$T_x = 100\ °\text{C} - 79\ °\text{C} = 21\ °\text{C}$$

13.19. La puerta de un horno tiene un área de 0,12 m². Cuando la temperatura del horno es 1 800 °C y la temperatura del exterior es 27 °C, se abre la puerta del horno durante 1,0 min. Calcular la energía neta que ha perdido el horno por radiación. Suponer que el horno se comporta como un cuerpo negro e = 1.

Solución

La energía neta ganada o perdida por radiación viene dada por la expresión:

$$\Delta Q = e\sigma A\,(T_1^4 - T_2^4)\,\Delta t$$

$$\Delta Q = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W/(m}^2 \cdot \text{K}^4) \times 0{,}12\ \text{m}^2\ (2073{,}1^4 - 300{,}1^4)\ \text{K}^4 \times 60\ \text{s} = 7{,}5 \cdot 10^6\ \text{W}$$

$$\Delta Q = 7{,}5\ \text{MW}$$

13.20. La estrella Betelguese es una estrella super gigante de la constelación de Orión, su superficie tiene una temperatura de 3 000 K y emite 3,90 · 10³⁰ W. Estimar el radio de esta estrella.

Solución

Supondremos que se trata de un cuerpo negro, la potencia emitida será:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma A\,T^4$$

$$3{,}90 \cdot 10^{30}\ \text{W} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \times 4\pi R^2 \times (3\,000\ \text{K})^4\ ;\ R = 2{,}60 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

$$R = 2{,}60 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Calorimetría

13.21. Para elevar la temperatura de una pieza de hierro de 20 kg desde 10 °C a 90 °C hay que suministrarle una energía de 720 kJ. Calcular el calor específico del hierro.

Solución

Aplicaremos la ecuación de definición de calor específico:

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta T}$$

$$\Delta T = (90 - 10)\ \text{K} = 80\ \text{K}$$

$$c = \frac{720 \cdot 10^3\ \text{J}}{20\ \text{Kg} \times 80\ \text{K}} = 450\ \text{J/(kg} \cdot \text{K)}$$

$$4{,}5 \cdot 10^2\ \text{J/(kg} \cdot \text{K)}$$

13.22. Un calorímetro de capacidad calorífica 60 cal/°C contiene 100 g de agua y su temperatura es 20 °C. Se introduce en el calorímetro una pieza de cobre de 500 g que está a una temperatura de 220 °C. ¿Cuál será la temperatura de equilibrio? Calor específico del cobre 0,093 cal/(g · °C).

Solución

La pieza de cobre que es la que está más caliente cederá energía al agua y al calorímetro, supondremos que el calor cedido por la pieza de cobre es igual al calor absorbido por el calorímetro y el agua contenida en el calorímetro. El calorímetro inicialmente está a la misma temperatura que el agua, representaremos por C su capacidad calorífica. Escribiremos:

$$m_{Cu}\,c_{Cu}\,(T_{cu} - T_{eq}) = m_{agua}\,c_{agua}\,(T_{eq} - T_{agua}) + C\,(T_{eq} - T_{agua})$$

Sustituyendo resulta:

$$500\ \text{g} \times 0{,}093\ \text{cal/(g} \cdot °\text{C)} \times (220\ °\text{C} - T_{eq}) = 100\ \text{g} \times 1{,}00\ \text{cal/(g} \cdot °\text{C)}\ (T_{eq} - 20\ °\text{C}) + 60\ \text{cal/°C} \times (T_{eq} - 20°\text{C})$$

$$T_{eq} = 65\ °\text{C}$$

13.23. Se desea enfriar 30 L de agua que están a 80 °C hasta una temperatura de 20 °C. Para ello se utiliza una corriente de agua que pasa por un serpentín que atraviesa el recipiente que contiene el agua que se desea enfriar. En el serpentín entran 0,50 L por segundo a una temperatura de 5,0 °C y salen a 20 °C. ¿Cuánto tiempo tardarán en enfriarse los 30 L de agua? No considerar la energía que cede el recipiente que contiene el agua.

Solución

La energía que debe perder el agua será:

$$Q_{cedido} = 30 \cdot 10^3 \text{ kg} \times 1{,}00 \text{ cal/(g} \cdot {}^\circ\text{C)} \times (20\ {}^\circ\text{C} - 80\ {}^\circ\text{C}) = -1{,}80 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

La energía que por unidad de tiempo gana el agua del serpentín es:

$$\frac{\Delta Q_{ganado}}{\Delta t} = 0{,}50 \cdot 10^3 \text{ kg/s} \times 1{,}00 \frac{\text{cal}}{(\text{g} \cdot {}^\circ\text{C})} \times (20\ {}^\circ\text{C} - 5{,}0\ {}^\circ\text{C}) = 7{,}50 \cdot 10^3 \text{ cal/s}$$

Como $Q_{ganado} = -Q_{cedido}$, escribimos:

$$7{,}50 \cdot 10^3 \text{ cal/s } \Delta t = -1{,}80 \cdot 10^6 \text{ cal; } \Delta t = 240 \text{ s} = 4{,}0 \text{ min}$$

Tardará 4,0 min.

13.24. En un calorímetro, cuya capacidad calorífica es 150 J/K y que contiene 200 g de agua a 20,2 °C, se coloca 50,0 g de una aleación de plata y cobre que está a 98,0 °C. Una vez se ha alcanzado el equilibrio la temperatura es de 21,4 °C. Calcular el porcentaje de cada uno de los componentes de la aleación. Calor específico de la plata 230 J/ (kg · K), calor específico del cobre 390 J/(kg · K).

Solución

Si m es la masa de plata de la aleación, la masa de cobre será $50{,}0 \cdot 10^{-3}$ kg $- m$.
El calor que ha cedido la aleación es igual al que ha ganado el calorímetro y el agua.

$$m \times 230 \text{ J/ (kg} \cdot \text{K)} \times (98{,}0 - 21{,}4) \text{ K} + (50{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} - m) \times$$
$$\times\ 390 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (98{,}0 - 21{,}4) \text{ K} = 150 \text{ J/K} \times (21{,}4 - 20{,}2) \text{ K} + 200 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times$$
$$\times\ 4180 \text{ j/(kg} \cdot \text{K)} \times (21{,}4 - 20{,}2) \text{ K}$$

$$\text{Porcentaje de plata} = \frac{25{,}33 \cdot 10^{-3}}{50{,}0 \cdot 10^{-3}} \times 100 = 50{,}66\ \%;\ 100 - 50{,}66 = 49{,}34$$

Composición 50,7 % de plata y 49,3 % de cobre

13.25. ¿Qué energía hay que suministrar a un bloque de hielo de 250 g que se encuentra a $-15{,}2$ °C para que funda? Calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K), calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.

Solución

Hay que considerar la energía para elevar la temperatura del hielo desde $-15{,}2$ °C a 0,00 °C y luego para que funda, con lo que se obtiene agua a 0,00 °C.

$$\Delta Q = m\, c\, \Delta T + \text{m}\, L_f;\ \Delta Q = 0{,}250 \text{ kg} \times 2\,090 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (0{,}00 - (-15{,}2)) \text{ K} + 0{,}250 \text{ kg} \times$$
$$\times\ 3{,}34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

$$\Delta Q = 91{,}4 \text{ K}$$

13.26. Calcular la cantidad de vapor de agua a 100,00 °C que hay que introducir en un recipiente que contiene 4,00 kg de hielo a $-20{,}0$ °C para pasarlo a agua a 40,0 °C. Calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K), calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg; calor latente de vaporización del agua $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg. No considerar la energía absorbida por el recipiente.

Solución

El calor cedido por el vapor de agua cuando pasa a agua a 40,0 °C será igual al calor que ha ganado el hielo que pasa a 0,00 °C, funde y el agua aumenta su temperatura a 40,0 °C. Sea m la masa de vapor de agua.

$$m \times 2{,}26 \cdot 10^6 \text{ J/kg} + \text{m} \times 4\,180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (100{,}00 - 40{,}0) \text{ K} = 4{,}00 \text{ kg} \times 2\,090 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times$$
$$\times\ (0{,}00 - (-20{,}0) + 4{,}00 \text{ kg} \times 3{,}34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 4{,}00 \text{ kg} \times 4\,180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (40{,}0 - 0{,}00) \text{ K}$$

$$m = 0{,}865 \text{ kg}$$

13.27. Mezclamos en un recipiente aislado 1,00 kg de agua a 95,0 °C con 1,00 kg de hielo a $-5{,}00$ °C.

a) ¿Fundirá todo el hielo?

b) En caso afirmativo, ¿a qué temperatura quedará la mezcla? No considerar la energía absorbida por el recipiente. Calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K), calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.

Solución

a) La temperatura mínima a que quedará la mezcla, si funde todo el hielo, será 0,00 °C.

El hielo ha de pasar de $-5{,}0$ °C a 0,00 °C y luego fundir; la energía necesaria para ello será:

$$\Delta Q_{ab} = 1{,}00 \text{ kg} \times 2\,090 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (0{,}00 - (-5{,}00)) \text{ K} + 1{,}0 \text{ kg} \times 3{,}34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} = 344{,}4 \text{ kJ}$$

La energía cedida por el agua cuando pasa de 95,0 °C a 0,00 °C será:

$$\Delta Q_{ced} = 1{,}00 \text{ kg} \times 4\,180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (95{,}0 - 0{,}00) \text{ K} = 397{,}1 \cdot 10^3 \text{ J}$$

La energía que cede el agua es suficiente para fundir el hielo.

b) Supongamos que sea T la temperatura final. La energía que ha cedido el agua es igual a la que ha absorbido el hielo.

$$1{,}00 \text{ kg} \times 4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (368{,}15 \text{ K} - T) = 1{,}00 \text{ kg} \times 2\,090 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (273{,}15 \text{ K} - 268{,}15 \text{ K})$$
$$+\ 1{,}0 \text{ kg} \times 3{,}34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 1{,}00 \text{ kg} \times 4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (T - 273{,}15 \text{ K});\ T = 279{,}44$$

$$T_c = 279{,}44 - 273{,}15 = 6{,}29\ {}^\circ\text{C}$$

$$T = 6{,}29\ {}^\circ\text{C}$$

CUESTIONES

13.1. El coeficiente de dilatación lineal de un material representa:

a) La variación de longitud de una varilla de 1,0 m de longitud cuando se calienta.

b) La variación de longitud cuando la temperatura aumenta en una unidad.

c) La variación de longitud por unidad de longitud inicial cuando la temperatura aumenta ur unidad.

d) La variación de longitud de una varilla cuando se calienta.

13.2. Un disco metálico circular, cuyo coeficiente de dilatación lineal es α, tiene en el centro un or ficio circular de área A_0. Si la temperatura del disco se incrementa un valor ΔT, el aumento rel tivo del área del orificio es:

a) $A_0 \alpha \Delta T$ *c)* 2α

b) $2\alpha \Delta T$ *d)* $A_0 \Delta T$

13.3. El coeficiente de dilatación lineal del vidrio ordinario es el triple que el del vidrio pírex. Ten mos dos vasos, uno de vidrio ordinario y otro de pírex, ambos de volumen V_0, y la temperat ra de estos vasos se incrementa en un valor ΔT:

a) El aumento relativo de volumen será el mismo para los dos vasos.

b) El incremento de volumen es el mismo para los dos vasos.

c) El incremento de volumen del vaso de vidrio ordinario es nueve veces el del de vidrio píre

d) El incremento de volumen del vaso de vidrio ordinario es el triple que el del de vidrio píre

13.4. Normalmente la densidad de un sólido:

a) No varía con la temperatura.

b) Aumenta con la temperatura.

c) Disminuye con la temperatura.

d) Para poder afirmar si la densidad del sólido aumenta o disminuye necesitamos conocer volumen inicial del sólido.

13.5. Entre 0 °C y 4 °C, la densidad del agua:

a) No varía con la temperatura.

b) Aumenta con la temperatura.

c) Disminuye con la temperatura.

d) Para poder afirmar si la densidad del sólido aumenta o disminuye necesitamos conoce volumen inicial de la cantidad de agua que consideramos.

13.6. Un cilindro con un émbolo móvil contiene 40 L de nitrógeno a la presión de 2,0 atm. El ém lo se eleva hasta que el volumen del gas es 80 L, mientras que la temperatura permanece cc tante. La presión del gas es:

a) 1,0 atm *c)* 4,0 atm

b) 2,0 atm *d)* 0,50 atm

13.7. La temperatura de un gas ideal se eleva de 30 °C a 100 °C, manteniendo la presión constante, la relación entre el volumen final y el volumen inicial es:

a) 3,3 *c)* 1,3

b) 0,30 *d)* 0,81

13.8. Un tanque contiene argón, cuando la presión es de 4,0 atm la temperatura es 280 K. El tanque tiene una válvula de seguridad que se abre cuando la presión es de 10 atm. Cuando se abre la válvula de seguridad, la temperatura del tanque es:

a) 700 K *c)* $1,1 \cdot 10^2$ K

b) 280 K *d)* 400 K

13.9. Cuando se duplica el volumen y la presión de un gas ideal, la temperatura:

a) Se duplica. *c)* Se cuadruplica.

b) No varía. *d)* Se reduce a la cuarta parte.

13.10. El azufre tiene una propiedad denominada alotropía que consiste en presentarse en más de una forma. Un recipiente A contiene 2,0 g de vapor de azufre diatómico; otro recipiente B contiene 2,0 g de vapor de azufre octoatómico. Podemos afirmar:

a) Los dos recipientes contienen el mismo número de moléculas de azufre.

b) El recipiente A contiene un mayor número de moles de moléculas de azufre que el B.

c) En el recipiente A hay más moléculas de azufre que en el B, pero B contiene un mayor número de moles de moléculas de azufre que A.

d) En B hay más moléculas de azufre que en A.

13.11. Un recinto cerrado contiene un gas A y un gas B, sin modificar la temperatura se introduce en el recipiente una cierta cantidad de gas B. Podemos afirmar:

a) Las presiones parciales de A y B aumentan.

b) Aumenta la presión parcial de B y disminuye la presión parcial de A.

c) No varía la presión total del recinto.

d) La presión parcial de B aumenta y la presión parcial de A no se modifica.

13.12. Normalmente calentamos un recipiente que contiene agua por la parte inferior y aunque el recipiente sea elevado conseguimos que hierva toda el agua. La energía se transfiere a las capas superiores fundamentalmente por:

a) Conducción. *c)* Convección.

b) Radiación. *d)* No hay ninguna explicación razonable.

13.13. El Sol envía a la Tierra grandes cantidades de energía por:

a) Conducción. *c)* Convección.

b) Radiación. *d)* La transportan las nubes.

13.14. Los termos tienen un recipiente plateado en su interior (vaso Dewar). Este vaso está plateado:

a) Para evitar las pérdidas de energía por radiación.

b) Por motivos estéticos.

c) Para evitar la pérdida de energía por convección.

d) Para evitar la pérdida de energía por conducción.

13.15. Un cuerpo A, de masa m, a 20 °C se pone en contacto con otro B, de masa 3 m, a 80 °C. El intercambio de energía ocurre sin pérdidas al exterior y la temperatura de equilibrio es 40 °C. La relación entre los calores específicos de los cuerpos es:

a) $c_A = 6\ c_B$ *c)* $c_A = 2/3\ c_B$

b) $c_A = 1/6\ c_B$ *d)* $c_A = 3/2\ c_B$

13.16. Una pieza de material A tiene una masa el doble que otra de material B; el calor específico de A es el triple que el calor específico de B. Se suministra la misma cantidad de energía térmica a las dos piezas y la pieza A experimenta una variación de temperatura ΔT. La variación de temperatura de B es:

a) ΔT *c)* $2\ \Delta T/3$

b) $3\Delta T/2$ *d)* $6\ \Delta T$

13.17. El aluminio tiene un calor específico mayor que el cobre. Una pieza de aluminio y una pieza de cobre se introducen en un recipiente con agua caliente. La masa de la pieza de aluminio es doble que la masa de la de cobre. Podemos afirmar que en el equilibrio:

a) La temperatura del cobre es igual que la temperatura del aluminio.

b) La temperatura del cobre es mayor que la temperatura del aluminio.

c) La temperatura del cobre es menor que la temperatura del aluminio.

d) La temperatura de la pieza de aluminio es aproximadamente el doble que la temperatura de la pieza de cobre.

13.18. A un cubito de hielo de 100 g de masa, que se encuentra a 0,0 °C, se le suministra una energía de 54 kJ mediante calor. La temperatura final será:

a) 49 °C *c)* 83 °C

b) 129 °C *d)* 16 °C

SOLUCIONES

13.1. *c)*	13.7. *c)*	13.13. *b)*
13.2. *b)*	13.8. *a)*	13.14. *a)*
13.3. *c)*	13.9. *c)*	13.15. *a)*
13.4. *c)*	13.10. *b)*	13.16. *d)*
13.5. *b)*	13.11. *d)*	13.17. *a)*
13.6. *a)*	13.12. *c)*	13.18. *a)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **La temperatura de fusión de la plata es 960,80 °C. ¿Cuál será la temperatura de fusión de la plata expresada en kelvin?**

Sol.: 1 233,95 K

2. **Cuál debe ser la variación de temperatura de una barra de hierro de longitud L_0 para que su longitud se incremente en $L_0/3\,000$. Coeficiente de dilatación lineal del hierro $12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 28 °C

3. **Se ha de introducir un remache de aluminio en un orificio de una plancha de aluminio que tiene un diámetro de 20,00 mm a 20 °C; para que ajuste mejor el remache, se ha construido con un diámetro algo mayor que el del orificio. En el momento de meter el remache se introduce en dióxido de carbono sólido (nieve seca) a una temperatura de −78 °C. ¿Cuál debe ser el diámetro del remache a 20 °C si su diámetro es igual al del orificio cuando su temperatura es −78 °C? Coeficiente de dilatación lineal del aluminio $24 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 20,05 mm

4. **Se desea que una esfera de acero de 8,75 cm diámetro atraviese un aro de aluminio de 8,74 cm de diámetro. ¿Cuánto tiene que incrementarse la temperatura de ambos para que estando los dos a la misma temperatura la esfera atraviese el aro? Coeficiente de dilatación lineal del acero $12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$; coeficiente de dilatación lineal del aluminio $24 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 95 °C

5. **Con una cinta métrica de acero calibrada a 10,00 °C se mide a esta temperatura la longitud de una barra de aluminio y se obtiene un valor de 2,987 cm. ¿Qué valor se obtendrá si se efectúa la medida cuando ambas están a 30,00 °C? Coeficiente de dilatación lineal del acero $12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$; coeficiente de dilatación lineal del aluminio $24 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 2,988 cm

6. **La densidad del acero a 0,0 °C es $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3. ¿Cuál será la densidad a 200 °C? Coeficiente de dilatación lineal del acero $12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: $7{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3

7. **Un recipiente de vidrio de 250 cm^3 se llena totalmente de glicerina a 20 °C. Si se calienta a 35 °C, ¿cuánta glicerina se derramará? Coeficiente de dilatación lineal del vidrio $9{,}0 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$, coeficiente de dilatación de la glicerina $0{,}49 \cdot 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 1,7 cm^3

8. **Se desea construir un termómetro de mercurio con una escala de 20 °C a 60 °C y que la longitud de esta escala sea 20 cm con un tubo capilar de radio 0,20 mm. ¿Qué volumen debe tener el depósito? Coeficiente de dilatación cúbica del mercurio $0{,}18 \cdot 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$, coeficiente de dilatación lineal del vidrio $9{,}0 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.**

Sol.: 4,1 cm^3

9 **Una varilla de latón se calienta desde 20 °C a 320 °C, a continuación se enfría de nuevo a 20 °C sin dejar que se contraiga. ¿Qué esfuerzo soporta la varilla? Coeficiente de dilatación lineal del latón $20 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$, módulo de Young del latón $9{,}0 \cdot 10^{10}$ N/m^2.**

Sol.: $5{,}4 \cdot 10^2$ MN/m^2

GASES IDEALES

10 **Un gas ocupa un volumen de 4,4 L a la presión de 85 atm, a temperatura constante la presión disminuye hasta 15 atm. ¿Cuál será el nuevo volumen?**

Sol.: 25 L

11 **Una vasija abierta que se encuentra a 10 °C se calienta a presión constante hasta 400 °C. ¿Qué fracción de aire queda en la vasija?**

Sol.: 42 %

12 **El neumático de una motocicleta se llena de aire a la presión de $3{,}03 \cdot 10^5$ Pa y a una temperatura de 27 °C. Al cabo de un tiempo de marcha la temperatura de la rueda es 57 °C. Suponiendo despreciable la variación de volumen, ¿cuál será ahora la presión de la rueda?**

Sol.: $3{,}33 \cdot 10^5$ Pa

13 **Un gas ocupa un volumen de 200 L a 95,5 °C y 101, 3 kPa. ¿Cuál será el volumen ocupado por este gas a 65,7 °C y 140,1 kPa?**

Sol.: 133 L

14 **Un recipiente de 23 L contiene hidrógeno a la presión de 0,95 atm y una temperatura de 303 K. ¿Cuál es la masa del hidrógeno contenido en este recipiente?**

Sol.: 1,8 g

15 **¿Qué volumen ocupa un mol de un gas ideal en condiciones normales? Presión atmosférica $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, y temperatura 0 °C (273 K).**

Sol.: 0,0224 m^3 (22,4 L)

16 **Un recipiente de 2,0 L contiene nitrógeno a 300 K y presión atmosférica, 1,0 atm. Se abre el recipiente y se calienta hasta 400 K. Se cierra el recipiente y se enfría a la temperatura inicial. Determinar:**

a) La presión en el recipiente.

b) La masa de nitrógeno que queda en el recipiente. El nitrógeno es un gas diatómico de masa atómica 14.

Sol.: *a)* 0,75 atm; *b)* 1,7 g

17 **Un recipiente contiene 10,0 g de vapor de azufre formado por moléculas diatómicas de azufre, S_2. Determinar:**

a) El número de moles de moléculas de azufre que hay en el recipiente.

b) El número de moléculas de azufre. Masa atómica del azufre 32,07.

Sol.: *a)* 0,156 mol; *b)* $9{,}39 \cdot 10^{22}$ moléculas

18 **Una botella metálica de 0,15 m^3 contiene un gas a la presión de 25 atm y a una temperatura de 285 K. ¿Cuántos moles de gas hay que introducir en la botella para que la presión se duplique a una temperatura de 292 K?**

Sol.: $1{,}5 \cdot 10^2$ mol

19 **Un recipiente cerrado de 2,0 L contiene 0,10 mol de dióxido de carbono, CO_2, y 4,0 g de oxígeno. La presión parcial del dióxido de carbono es de 80,8 kPa. Determinar:**

a) La temperatura de la mezcla.

b) La presión parcial del oxígeno.

c) La presión total. La masa atómica del oxígeno es 16,0.

Sol.: *a)* −79 °C; *b)* $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa; *c)* $1{,}8 \cdot 10^5$ Pa

CALOR

Modos de transferencia de calor

20 **Una placa tiene 2,0 cm de espesor y un área de la sección transversal de 0,25 m^2; cuando una cara está a 150 °C y la otra a 140 °C, el flujo de calor a través de la placa es 10 kJ/s. Determinar:**

a) La conductividad térmica del material de la placa.

b) La resistencia térmica de la placa.

Sol.: *a)* 80 W/(m · K); *b)* $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ K/W

21 **Una ventana tiene un vidrio de 1,20 m × 0,80 m y espesor 3,0 mm. Calcular el flujo de calor a través de la ventana cuando la temperatura de la cara interior es 16 °C y la de la cara exterior 14 °C. Suponer el aire de la calle en calma. Conductividad térmica del vidrio 0,80 W/(m · K).**

Sol.: $5{,}1 \cdot 10^2$ W

22 **Una forma de evitar la pérdida de energía mediante calor por una ventana consiste en colocar dos vidrios separados por una capa de aire. Supongamos una ventana formada por dos vidrios como la ventana del problema anterior separados por una capa de aire de 2,0 mm. ¿Cuál es el flujo de calor a través de esta ventana? Conductividad térmica del aire 0,023 W/(m · K).**

Sol.: 20 W

23 **Una barra de oro de 9,0 cm^2 de área de la sección transversal y longitud 50 cm está en contacto térmico con otra barra de plata de la misma área y longitud 40 cm. El extremo libre de la barra de oro se mantiene a 80 °C y el extremo libre de la barra de plata está a 20 °C. Determinar:**

a) La resistencia térmica de la barra de oro y de la barra de plata.

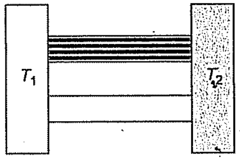
b) La resistencia térmica equivalente.

c) El flujo de calor.

d) La temperatura en la unión de estas barras. Conductividad térmica del oro 312 W/(m · K), conductividad térmica de la plata 420 W/(m · K).

Sol.: a) 1,8 K/W, 1,1 K/W; *b)* 2,8 K/W; *c)* 21 W; *d)* 42 °C

24 **La figura representa dos barras en paralelo, cuyos extremos tienen la misma temperatura. Demostrar que la barra equivalente a estas dos, es decir, una barra que un extremo está a la temperatura T_1 y el otro a la temperatura T_2, y que conduce una corriente térmica igual a la suma de las corrientes de las dos barras tiene una resistencia equivalente R que cumple $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.**



25 **Una de las barras del ejercicio anterior es de aluminio y tiene una longitud de 30 cm y el área de la sección transversal es de 6,0 cm²; la otra barra es de cobre y tiene la misma longitud y el área de la sección transversal es de 4,0 cm². T_1 es igual 140 °C y T_2 es 40 °C. Determinar:**

a) La resistencia térmica de la barra de aluminio y de la barra de cobre.

b) La resistencia térmica equivalente.

c) El flujo de calor. Conductividad térmica del aluminio 240 W/(m · K); conductividad térmica del cobre 380 W/(m · K).

Sol.: a) 2,1 K/W, 2,0 K/W; *b)* 0,99 K/W; *c)* $1{,}0 \cdot 10^2$ W

26 **La estrella Sirio B es una estrella enana blanca cuya superficie tiene una temperatura de 7 800 K y emite una potencia $7{,}28 \cdot 10^{23}$ W. Suponiendo que se comporte como un cuerpo negro, estimar su radio.**

Sol.: $1{,}7 \cdot 10^7$ m

27 **La temperatura del Sol es 6 200 K y su radio $7{,}0 \cdot 10^8$ m. Suponiendo que se comporta como un cuerpo negro, determinar:**

a) La energía que irradia por metro cuadrado y por segundo.

b) La potencia total emitida.

Sol.: a) $8{,}4 \cdot 10^7$ W/m²; *b)* $5{,}2 \cdot 10^{26}$ W

Calorimetría

28 **¿Cuánta energía hay que suministrar a una pieza de aluminio de 650 g que está a 23,0 °C para que su temperatura suba hasta 240 °C? Calor específico del aluminio 900 J/(kg · K).**

Sol.: 127 kJ

29 **¿Qué energía hay que suministrar a 5,5 L de agua contenidos en un recipiente de cobre de 3,0 kg para elevar su temperatura de 22 °C hasta 100 °C? Calor específico del cobre 390 J/(kg · K).**

Sol.: 1,9 MJ

30 **Se desea obtener 110 g de agua a 20 °C mezclando agua a 14 °C con agua a 80 °C. ¿Qué cantidades habrá que poner de cada una?**

Sol.: 100 g de agua a 14 °C y 10 de agua a 80 °C

31 **En un calorímetro, de capacidad calorífica 50 cal/°C, que contiene 350 g de agua a 10 °C, se introduce 100 g de una aleación a 500 °C, la temperatura final de equilibrio es 15 °C. ¿Cuál es el calor específico de esta aleación?**

Sol.: 0,041 cal/(g · °C)

32 **Para determinar el calor específico del cobre, se coloca una pieza de cobre de 79,0 g a 200,5 °C en un calorímetro de cobre de masa 1 940 g que contiene 550 g de agua a 20,1 °C. La temperatura de equilibrio es 21,9 °C. ¿Cuál es el calor específico del cobre?**

Sol.: 390 J/(kg · K)

33 **Un estudiante desea determinar el calor específico de una pieza de plomo de 74 g. En primer lugar ha de averiguar la capacidad calorífica del calorímetro que va a utilizar; para ello coloca en él 300 g de agua y los calienta a 38,1 °C y luego introduce 100 g de agua a 7,6 °C; la temperatura de equilibrio es 30,8 °C. Luego vacía el calorímetro e introduce 200 g de agua que se calientan hasta una temperatura de 23,3 °C. Finalmente, se coloca en el calorímetro la pieza de plomo que se encuentra a una temperatura de 100,0 °C y la temperatura de equilibrio resulta ser 24,1 °C.**

a) ¿Cuál es la capacidad calorífica del calorímetro?

b) ¿Qué valor para el calor específico del plomo encontró el estudiante?

Sol.: a) 74,4 J/K; *b)* 130 J/(kg · K)

34 **Un recipiente contiene 500 g de hielo y 2,00 kg de agua ambos a 0,00 °C. ¿Qué energía se requiere para pasar el conjunto a agua a 70,0 °C? Calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg. No considerar la energía absorbida por el recipiente.**

Sol.: 899 kJ

35 **Se mezcla en un recipiente aislado 1,00 kg de hielo a −20,0 °C con 1,20 kg de agua a 35,8 °C.**

a) ¿Fundirá todo el hielo?

b) En caso afirmativo, ¿cuál será la temperatura final? En caso negativo, ¿qué masa de hielo habrá fundido?

Calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K), calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.

Sol.: a) No; *b)* 478 g

36 **Un vaso de cobre de 1,50 kg contiene 0,500 kg de hielo a −10,0 °C. Se inyecta en el vaso 0,400 kg de vapor de agua a 100,0 °C.**

a) ¿Cuál será la temperatura final de la mezcla?

b) ¿Quedará algo de vapor de agua sin condensar?

Calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K); calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg; calor latente de vaporización del agua $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg; calor específico del cobre 390 J/(kg · K).

Sol.: a) 100,0 °C; *b)* 201 g

37 **Una nevera portátil que mide 50 × 30 × 35 cm está formada por un material plástico de espesor 4,0 cm cuya conductividad térmica es 0,010 W/(m · K). Un día de verano se llena la nevera con hielo y bebidas a 0,0 °C. Si la temperatura exterior es 30,5 °C: ¿Cuánto hielo fundirá en doce horas? Calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.**

Sol.: 0,85 kg

CAPÍTULO 14

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La Termodinámica estudia las transformaciones energéticas de un tipo en otro diferente.

14.1. SISTEMAS TERMODINÁMICOS

Un sistema termodinámico es una porción del universo físico que aislamos real o mentalmente para su estudio. El resto de universo que no forma parte del sistema estudiado es el *medio ambiente o medio exterior.* Un sistema está limitado por una superficie que puede ser real o imaginaria.

Un sistema se dice que es *cerrado* cuando no puede intercambiar materia con otro sistema o con el medio exterior. En caso contrario el sistema es *abierto.* Un sistema *aislado* no intercambia ni materia ni energía.

Las *propiedades* de un sistema son características macroscópicas tales como la presión, temperatura, masa... a las que en un momento determinado puede asignarse un valor numérico sin conocer la historia previa del sistema. El conjunto de propiedades de un sistema define el *estado* del sistema. Cuando el sistema pasa de un estado a otro estado, se dice que el sistema experimenta un *proceso o una transformación.* Cuando el estado de un sistema permanece constante con el tiempo, el sistema está en *equilibrio.*

Un proceso de *cuasiequilibrio* o *cuasiestático* transcurre a través de una serie de estados de equilibrio; para pasar de uno a otro estado de equilibrio el sistema experimenta una desviación infinitesimal. Un proceso de este tipo es ideal; los procesos reales sólo pueden aproximarse a un proceso de cuasiequilibrio

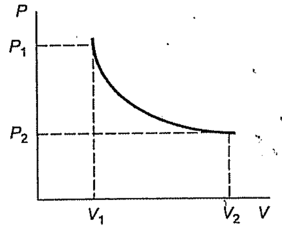
14.2. TRABAJO EN UN CAMBIO DE VOLUMEN

El trabajo, W, realizado cuando un sistema pasa del volumen inicial V_1 al volumen final V_2 en un proceso de cuasiequilibrio o cuasiestático viene dado por la expresión:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

Para integrar esta expresión es necesario conocer como varía la presión con el volumen, lo cual depende del tipo de proceso.

El trabajo efectuado en un cambio de volumen es igual al área comprendida entre la curva en un diagrama PV, el eje de abscisas, la ordenada inicial y la ordenada final.



PROCESO ISOTÉRMICO

Un proceso isotérmico tiene lugar a temperatura constante. Para un gas ideal, el trabajo realizado es:

$$W = n\,R\,T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

n es el número de moles de gas, R es la constante de los gases y T la temperatura.

PROCESO ISOBÁRICO

En un proceso isobárico, la presión permanece constante a lo largo del mismo. El trabajo realizado es:

$$W = P\,\Delta V$$

PROCESO ISÓCORO

En un proceso isócoro, el volumen permanece constante y, por tanto, el trabajo es nulo.

$$W = 0$$

El trabajo realizado cuando un sistema pasa de un estado a otro depende, además del estado inicial y del estado final, del camino seguido para pasar de un estado a otro.

14.3. ENERGÍA INTERNA. PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Además de la energía cinética que depende de la velocidad del sistema y de la energía potencial que depende de su posición en un campo de fuerzas, un sistema tiene una energía interna. La energía interna comprende la energía cinética de las partículas (átomos, moléculas, iones) que lo forman, la energía potencial debida a las interacciones entre estas partículas, la energía potencial y cinética de los electrones... La energía interna de un sistema es una *propiedad extensiva,* es decir, depende de la cantidad de sustancia. La temperatura, por ejemplo, no es una propiedad extensiva.

La energía interna de una determinada masa de gas ideal es independiente de la presión y del volumen que ocupa, depende sólo de la temperatura.

Según la primera ley de la Termodinámica, la variación de energía interna de un sistema cerrado es igual a la energía transferida al sistema mediante calor menos la energía transferida al exterior mediante trabajo:

$$\Delta U = Q - W$$

La primera ley de la Termodinámica es una forma de expresar la ley de la conservación de la energía.

Como para un gas ideal la energía interna no depende de la presión ni del volumen que ocupa, en un proceso isotérmico $\Delta U = 0$, por tanto:

$$Q = W$$

La variación de energía interna al pasar de un estado a otro sólo depende del estado inicial y del estado final y es independiente del camino seguido para pasar de uno a otro estado. En cambio, la energía transferida mediante calor o mediante trabajo depende del camino seguido al pasar del estado inicial al estado final.

CRITERIO DE SIGNOS

La energía transferida por calor a un sistema se considera positiva y la energía transferida por el sistema al exterior se considera negativa.

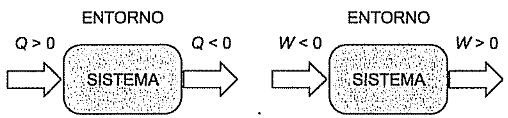
$Q > 0$ Transferido al sistema

$Q < 0$ Transferido desde el sistema

En Termodinámica se estudian muchas veces dispositivos que, como los motores de combustión, se utilizan para realizar trabajo. Por ello, para el trabajo se acostumbra a adoptar el criterio de que el trabajo efectuado por el sistema es positivo y negativo el trabajo hecho sobre el sistema.

$W > 0$ Trabajo hecho por el sistema

$W < 0$ Trabajo hecho sobre el sistema



14.4. CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES. LEY DE MAYER

La capacidad calorífica molar es la energía que hay que transferir a un mol de una sustancia para aumentar su temperatura en una unidad, en el SI se mide en J/(mol K). En los sólidos y líquidos generalmente se determinan a la presión atmosférica. En el caso de los gases se distingue entre las capacidades caloríficas molares a presión constante y las capacidades caloríficas molares a volumen constante:

$$C_V = \frac{Q_V}{n\,\Delta T} \qquad C_P = \frac{Q_P}{n\,\Delta T}$$

C_V representa la capacidad calorífica molar a volumen constante, Q_V es la energía transferida mediante calor en un proceso a volumen constante y n el número de moles de sustancia. C_P representa la capacidad calorífica molar a presión constante, Q_P es la energía transferida mediante calor en un proceso a presión constante.

En un proceso a volumen constante no hay transferencia de energía mediante trabajo, según la primera ley de la Termodinámica $\Delta U = Q_V$. Por tanto:

$$C_V = \frac{\Delta U}{n\,\Delta T}$$

En un proceso a presión constante hay trabajo de expansión, en consecuencia hay que suministrar energía para incrementar la energía interna y para efectuar trabajo, por tanto, la capacidad calorífica molar a presión constante será mayor que la capacidad calorífica molar a volumen constante.

Para un gas monoatómico, $C_V = 3/2\ R$ y para la mayoría de los gases diatómicos a temperatura ambiente, $C_V = 5/2\ R$.

Como para un gas ideal la energía interna es independiente de la presión y del volumen, se cumple que el cambio de energía interna tanto si el proceso ocurre a volumen constante como si no, es:

$$\Delta U = n\,C_V\,\Delta T$$

Según la ley de Mayer, en un gas ideal la diferencia entre la capacidad calorífica molar a presión constante y la capacidad calorífica molar a volumen constante es igual a la constante de los gases:

$$C_P - C_V = R$$

En el SI, $R = 8{,}314$ J/(K · mol), también puede expresarse $R = 0{,}08205$ atm · L/(K · mol).

14.5. EXPANSIÓN ADIABÁTICA DE UN GAS

Un proceso en el que no hay transferencia de energía mediante calor se denomina *adiabático*. En un proceso adiabático cuasiestático de expansión o de compresión de un gas ideal se cumple:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$$

Donde $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$.

En un proceso adiabático $\Delta U = -W$, por tanto:

$$W = -\,C_V\,\Delta T$$

14.6. PROCESOS CÍCLICOS

Un proceso cíclico es aquel en el que un sistema tras una serie de transformaciones recupera el estado final. Es decir, en un proceso cíclico el estado final coincide con el estado inicial.

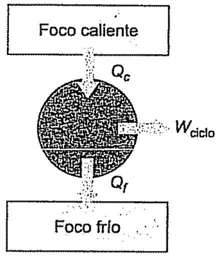
Si aplicamos la primera ley de la Termodinámica a un proceso cíclico, podemos escribir:

$$\Delta U_C = Q_C - W_C$$

Como la variación de energía interna al pasar de un estado a otro sólo depende del estado inicial y del estado final y es independiente del camino seguido para pasar de uno a otro estado, en un proceso cíclico se cumple $\Delta U_C = 0$. En consecuencia: $Q_C = W_C$.

CICLOS DE POTENCIA

En un ciclo de potencia un sistema recibe energía mediante calor de un foco caliente, cede energía al entorno en forma de trabajo y también transfiere calor a un foco frío. Por ejemplo, los motores de combustión interna funcionan a base de ciclos, el calor que reciben procede del combustible (gasolina, gasoil...). En un ciclo de potencia se transforma la energía en trabajo.



El trabajo realizado en cada ciclo es:

$$0 = -\,W_{Ciclo} + Q_c + Q_f \qquad W_{Ciclo} = Q_c + Q_f$$

Q_c representa la energía que el sistema recibe en forma de calor del foco caliente y Q_f representa el calor transferido al foco frío.

Como Q_f es negativo, esta expresión se acostumbra a escribir:

$$W_{Ciclo} = Q_c - |Q_f|$$

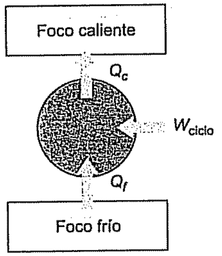
El rendimiento, η, de un ciclo de potencia es el cociente entre el trabajo transferido y la energía que recibe en forma de calor. Representa el trabajo realizado por cada unidad de energía que recibe el sistema del foco caliente; suele expresarse en tantos por ciento.

$$\eta = \frac{W_{Ciclo}}{Q_c} = \frac{Q_c - |Q_f|}{Q_c}$$

CICLOS DE REFRIGERACIÓN Y DE BOMBA DE CALOR

Los ciclos de refrigeración y de bomba de calor funcionan al revés que los ciclos de potencia. El sistema recibe energía mediante calor del foco frío y transfiere calor al foco caliente y esto sólo tiene lugar si el sistema recibe energía en forma de trabajo. Se cumple que la energía que recibe es igual a la energía que cede:

$$|W_{Ciclo}| + |Q_f| = |Q_c| \qquad |W_{Ciclo}| = |Q_c| - |Q_f|$$



Los refrigeradores se utilizan, por ejemplo, en las neveras o para mantener la temperatura de una vivienda por debajo de la del exterior. En las neveras domésticas, el foco caliente es la habitación donde se encuentra la nevera.

La bomba de calor se utiliza, por ejemplo, para mantener la temperatura de una vivienda o una habitación por encima de la del exterior. Cuando una bomba de calor se utiliza para calentar una habitación, el foco caliente es la habitación y Q_C es el calor que recibe la habitación; por acción de la bomba de calor, el calor pasa del foco frío, el exterior, al foco caliente, la habitación, en contra de la tendencia natural. En cambio, cuando un acondicionador de aire se utiliza para refrigerar una habitación, la habitación es el foco frío y Q_f es el calor que cede la habitación; por acción del acondicionador, el calor fluye del foco frío, la habitación, al foco caliente, el exterior. Hay bombas de calor que son reversibles y pueden utilizarse también como acondicionadores de aire.

La eficiencia, ε, de un ciclo de refrigeración es el cociente entre la energía mediante calor que el sistema recibe del foco frío y el trabajo transferido al sistema.

Ciclo de refrigeración: $\varepsilon = \dfrac{|Q_f|}{|W_{Ciclo}|}$

La eficiencia representa la energía en forma de calor que cede el foco frío por cada unidad de trabajo transferida al sistema. Que podemos escribir:

$$\varepsilon = \frac{|Q_f|}{|Q_c| - |Q_f|}$$

La eficiencia, ε, de un ciclo de bomba de calor es el cociente entre la energía mediante calor que el sistema cede al foco caliente y el trabajo transferido al sistema.

Ciclo de refrigeración: $\varepsilon = \dfrac{|Q_c|}{|W_{Ciclo}|}$

La eficiencia representa la energía en forma de calor que recibe el foco caliente por cada unidad de trabajo transferida al sistema. Que podemos escribir:

$$\varepsilon = \frac{|Q_c|}{|Q_c| - |Q_f|}$$

Como $|Q_c| > |Q|_f$, la eficiencia de un ciclo de bomba de calor es superior a la unidad y superior al de un ciclo de refrigeración.

Cuando se apliquen estas expresiones en la resolución de problemas, habrá que tomar los valores absolutos del calor y del trabajo, puesto que ya se han tenido en cuenta los signos cuando se han deducido dichas expresiones.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1. 1,5 mol de un gas ideal se expanden a temperatura constante desde un volumen inicial de 2,5 L hasta un volumen final de 4,0 L, manteniendo la temperatura constante a 300 K. Suponiendo un proceso de cuasiequilibrio, calcular el trabajo de expansión.

Solución

El trabajo realizado proceso isotérmico cuasiestático es: $W = n\,RT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$

Sustituyendo resulta: $W = 1{,}5 \text{ mol} \cdot 8{,}31 \dfrac{J}{\text{K mol}} \cdot 300 \text{ K} \ln \dfrac{4{,}0}{2{,}5} = 1{,}75 \cdot 10^3 \text{ J}$

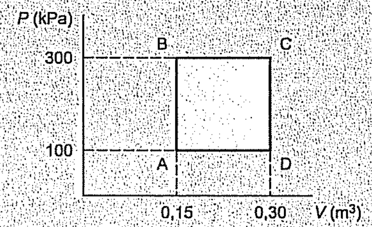
$W = 1{,}8$ kJ

14.2. Calcular el trabajo realizado al pasar de A a C.

a) Siguiendo el camino ABC.

b) Siguiendo el camino ADC.

c) A la vista de los resultados *a)* y *b)* tratar de sacar alguna conclusión.



Solución

a) Siguiendo el camino ABC. Al pasar de A a C podemos distinguir dos etapas: primero de A a B, se trata de un proceso a volumen constante, por tanto, no hay trabajo; segundo de B a C, es un proceso isobárico, el trabajo es:

$$W = 300 \cdot 10^3 \text{ Pa } (0{,}30 \text{ m}^3 - 0{,}15 \text{ m}^3) = 45 \cdot 10^3 \text{ J} \qquad W = 45 \text{ kJ}$$

b) Siguiendo el camino ADC. En este caso la primera etapa AD es un proceso isobárico y la segunda etapa DC es un proceso isocórico, en consecuencia en esta etapa no hay trabajo. El trabajo en la etapa AD es:

$$W = 100 \cdot 10^3 \text{ Pa } (0{,}30 \text{ m}^3 - 0{,}15 \text{ m}^3) = 15 \cdot 10^3 \text{ J} \qquad W = 15 \text{ kJ}$$

c) A la vista de los resultados *a)* y *b)* tratar de sacar alguna conclusión.

El trabajo para pasar de un estado a otro depende del camino seguido.

14.3. Una masa de gas argón que ocupa un volumen de 3,00 dm³ se comprime lentamente hasta ocupar un volumen de 1,00 dm³ a la presión atmosférica (101 kPa), durante el proceso se liberan 20,0 J mediante calor. Suponiendo comportamiento ideal, determinar la variación de energía interna.

Solución

Según la primera ley de la Termodinámica, la variación de energía interna es:

$$\Delta U = Q - W$$

Se trata de un proceso de compresión a presión constante, por tanto $W = P\,\Delta V$.

$$W = 101 \cdot 10^3 \text{ Pa } (1{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 3{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = -202 \text{ J}$$

$$\Delta U = -20{,}0 \text{ J} - (-202 \text{ J}) = 182 \text{ J}$$

$$\Delta U = 182 \text{ J}$$

14.4. Calcular la variación de energía interna de un bloque de hielo de 520 g que se encuentra a 0,00 °C y a presión atmosférica, se funde y luego se calienta a 4,00 °C. Densidad del hielo 0,917 g/cm³, calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg, densidad del agua a 4,00 °C, 1,00 g/cm³.

Solución

Para fundir el hielo y calentar el agua a 4,00 °C hay que transferirle calor.

$$Q = 0{,}520 \text{ kg} \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 0{,}520 \text{ kg} \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 \text{ J/(kg K) } 4{,}00 \text{ K} = 182{,}3 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Al pasar de hielo a agua hay una variación de volumen.

$$V_1 = \frac{520 \text{ g}}{0{,}917 \text{ g/cm}^3} = 567{,}0 \text{ cm}^3 \text{ ; } V_2 = \frac{520 \text{ g}}{1{,}00 \text{ g/cm}^3} = 520 \text{ cm}^3$$

El trabajo de compresión es: $W = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa } (520 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 - 567{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = -4\,747 \text{ J}$
La variación de energía interna será:

$$\Delta U = Q - W;\ \Delta U = 182{,}3 \cdot 10^3 \text{ J} - (-4\,747 \text{ J}) = 187 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta U = 187 \text{ kJ}$$

14.5. Un gas se encuentra en un cilindro provisto de un émbolo en el estado 1. Pasa al estado 2 en un proceso en el que el gas se expande y realiza un trabajo de 820 kJ y recibe del exterior 520 kJ mediante calor. Luego sufre una compresión a una presión constante de 360 kPa y cede calor al exterior por un valor 450 kJ. Si $U_3 - U_1 = 1\,500$ kJ, ¿cuál será la variación de volumen al pasar del estado 2 al estado 3?

Solución

El proceso de compresión al pasar del estado 2 al estado 3 es isobárico, calcularemos el trabajo hecho sobre el sistema, para ello necesitamos conocer $U_3 - U_2$. Antes hallaremos $U_2 - U_1$.
Según el criterio de signos, el calor que recibe el sistema es positivo y como el sistema realiza un trabajo también es positivo. Como $\Delta U = Q - W$, tenemos:

$$U_2 - U_1 = 520 \text{ kJ} - 820 \text{ kJ} = -300 \text{ kJ}$$

$$U_3 - U_2 = (U_3 - U_1) - (U_2 - U_1);\ U_3 - U_2 = 1\,500 \text{ kJ} - (-300 \text{ kJ}) = 1\,800 \text{ kJ}$$

En el proceso de paso del estado 2 al estado 3, el calor es negativo.

$$1\,800 \cdot 10^3 \text{ J} = -450 \cdot 10^3 \text{ J} - W;\ W = 2{,}25 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Como se trata de un proceso a presión 3, constante $W = P\Delta V$, por tanto:

$$2{,}25 \cdot 10^6 \text{ J} = 360 \cdot 10^3 \text{ Pa} \qquad \Delta V = 6{,}25 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = 6{,}25 \text{ m}^3$$

14.6. Un cilindro con pistón contiene 2,0 mol de nitrógeno a 298,2 K. El gas se expande lentamente a temperatura constante hasta triplicar su volumen. Determinar:

a) El trabajo de expansión.

b) La variación de energía interna.

c) El calor transferido al sistema. Suponer comportamiento ideal.

Solución

a) El trabajo de expansión. Como se trata de un proceso isotérmico:

$$W = n\,R\,T \ln \frac{V_2}{V_1};\ W = 2{,}0 \text{ mol} \times 8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \times 298 \text{ K} \times \ln 3 = 5{,}44 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$W = 5{,}4 \text{ kJ}$$

b) La variación de energía interna. En una expansión isotérmica de un gas ideal, la variación de energía interna es cero.

$$\Delta U = 0$$

c) El calor transferido al sistema. Según la primera ley de la Termodinámica $\Delta U = Q - W$. Por tanto:

$$0 = Q - 5{,}4 \text{ kJ} \qquad Q = 5{,}4 \text{ kJ}$$

$$Q = 5{,}4 \text{ kJ}$$

14.7. Se calienta, manteniendo la presión constante, 2,0 mol de dióxido de carbono desde 275 K a 325 K. Determinar:

a) La energía transferida mediante calor.

b) La variación de energía interna.

c) El trabajo de expansión. La capacidad calorífica molar a presión constante del dióxido de carbono es 36,94 J/(mol · K). Suponer que este gas se comporta como un gas ideal.

Solución

a) La energía transferida mediante calor. Como se trata de un proceso a presión constante $Q = n\,C_P\,\Delta T$.

$$Q_P = 2{,}0 \text{ mol} \times 36{,}94 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} \times (325 \text{ K} - 275 \text{ K}) = 3{,}69 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q_P = 3{,}7 \text{ KJ}$$

b) La variación de energía interna. Como se trata de un gas ideal:

$$\Delta U = n\,C_V\,\Delta T \text{ y } C_P - C_V = R$$

$$C_V = 36{,}94 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} - 8{,}31 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} = 28{,}63 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$$

$$\Delta U = 2{,}0 \text{ mol} \times 28{,}63 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} \times (325 \text{ K} - 275 \text{ K}) = 2{,}86 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta U = 2{,}9 \text{ kJ}$$

c) El trabajo de expansión.

$$\Delta U = Q - W \qquad 2{,}86 \cdot 10^3 \text{ J} = 3{,}69 \cdot 10^3 - W \qquad W = 0{,}83 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$W = 0{,}83 \text{ kJ}$$

14.8. La capacidad calorífica molar a volumen constante del helio es 12,47 J/(mol · K). Determinar para este gas:

a) El calor específico a volumen constante.

b) El calor específico a presión constante. El helio es un gas monoatómico de masa atómica 4,003. Suponer que se comporta como un gas ideal.

Solución

a) El calor específico a volumen constante. El calor específico a volumen constante será: $c_V = \dfrac{C_V}{M}$

Como el helio es un gas monoatómico, su masa molar es M = 4,003 g/mol. Por tanto:

$$c_V = \frac{12{,}47 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}}{4{,}003 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 3{,}115 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$$

b) El calor específico a presión constante. Calcularemos primero la capacidad calorífica a presión constante aplicando la ley de Mayer $C_p = C_V + R$.

$$C_P = 12{,}47 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)} + 8{,}31 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)} = 20{,}78 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$$

Ahora:

$$c_P = \frac{C_P}{M} \qquad c_P = \frac{20{,}78 \text{ J /(mol}\cdot\text{K)}}{4{,}003 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 5.191{,}1 \text{ J/(kg}\cdot\text{mol)}$$

14.9. 1,0 mol de nitrógeno, que se encuentra en condiciones normales (273 K y 1,01 · 10⁵ Pa) se comprime isotérmicamente hasta reducir su volumen a la mitad. Luego el gas se expande de forma adiabática hasta recuperar la presión inicial. Determinar:

a) La transferencia de trabajo.

b) La transferencia de calor.

c) La variación de energía interna. El nitrógeno es un gas diatómico que supondremos se comporta idealmente. El proceso ha sido cuasiestático.

Solución

a) La transferencia de trabajo. La primera etapa es un proceso isotérmico y la segunda etapa es adiabática. El trabajo en la primera etapa es:

$$W = n\,R\,T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = 1{,}0 \text{ mol} \times 8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \times 273 \text{ K} \times \ln 0{,}50 = -1{,}57 \cdot 10^3 \text{ J}$$

En la segunda etapa $Q = 0$; y por tanto $\Delta U = -W$ y por tratarse de un gas ideal:

$$\Delta U = n\,C_V\,\Delta T \tag{1}$$

Necesitamos conocer la temperatura final, como se trata de un proceso adiabático: $\dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}\text{; como se trata de un gas diatómico } \gamma = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1{,}4$$

Calcularemos primero la presión al iniciarse el proceso adiabático. La presión al final de este proceso es $101 \cdot 10^3$ Pa.

La primera etapa es isotérmica, se cumple $P\,V$ = Constante.

$$-1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa } V = P_2 \times \frac{V}{2} \qquad P_2 = 2{,}02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La temperatura final será:

$$\frac{T_3}{273} = \left(\frac{1{,}01 \cdot 10^5}{2{,}02 \cdot 10^5}\right)^{\frac{(1{,}4-1)}{1{,}4}} \qquad T = 223{,}9 \text{ K}$$

Ahora tenemos en (1): $\Delta U = 1{,}0 \text{ mol} \times 5/2\ 8{,}31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)} (223{,}9 \text{ K} - 273 \text{ K}) = -1{,}02 \cdot 10^3 \text{ J}$

$$W_{23} = -\Delta U = -(-1{,}02 \cdot 10^3 \text{ J}) = 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ J}$$

El trabajo neto será: $W = -1{,}57 \cdot 10^3 \text{ J} + 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ J} = 0{,}55 \cdot 10^3 \text{ J}$

$$W = 0{,}55 \text{ kJ}$$

b) La transferencia de calor. La primera etapa es isotérmica, por tanto $\Delta U = 0$. La segunda es adiabática, luego $Q = 0$.

En la primera etapa se cumple: $\Delta U = 0$; $0 = Q - W$; $Q = W$

$$Q = -1{,}6 \text{ kJ}$$

c) La variación de energía interna.

En la primera etapa: $\Delta U = 0$. En la segunda etapa: $\Delta U = -1{,}02 \cdot 10^3$ J.

$$\Delta U = -1{,}0 \text{ kJ}$$

14.10. Una máquina térmica en un ciclo recibe una energía de 25 MJ del foco caliente y cede 15 MJ al foco frío. Determinar:

a) El trabajo neto de un ciclo.
b) El rendimiento.

Solución

a) El trabajo neto de un ciclo. El trabajo en un ciclo es $W_{\text{ciclo}} = Q_c - |Q_f|$.

$$W_{\text{ciclo}} = 25 \text{ MJ} - 15 \text{ MJ} = 10 \text{ MJ}$$

$$W_{\text{ciclo}} = 10 \text{ MJ}$$

b) El rendimiento. El rendimiento viene dado por la expresión: $\eta = \dfrac{W_{\text{ciclo}}}{Q_c} = \dfrac{Q_c - |Q_f|}{Q_c}$

$$\eta = \frac{25 \text{ MJ} - 15 \text{ MJ}}{25 \text{ MJ}} = 40\ \%$$

$$\eta = 40\ \%$$

14.11. La eficiencia de una bomba de calor es 3,50 y el trabajo neto que recibe el sistema en un ciclo es 5,00 MJ.

Determinar las transferencias de calor al foco caliente, Q_c, y del foco frío al sistema Q_f. Se invierte la bomba de calor y actúa como refrigerador, ¿cuál será la eficiencia del refrigerador si el trabajo y las transferencias de calor son las mismas?

Solución

a) Transferencias de calor. La expresión que nos da la eficiencia de una bomba de calor es:

$$\varepsilon = \frac{|Q_c|}{|W_{\text{ciclo}}|}$$

Sustituyendo tenemos:

$$3{,}50 = \frac{|Q_c|}{5{,}00 \text{ MJ}} \qquad |Q_c| = 17{,}5 \text{ MJ}$$

En una bomba de calor se cumple: $|W_{\text{ciclo}}| = |Q_c| - |Q_f|$. Por tanto, 5,00 MJ = 17,5 MJ$- |Q_f|$; $|Q_f| = 12{,}5$ MJ.

$$|Q_c| = 17{,}5 \text{ MJ y } |Q_f| = 12{,}5 \text{ MJ}$$

b) La eficiencia, si actúa como refrigerador. La eficiencia de un refrigerador es $\varepsilon = \dfrac{|Q_f|}{|W_{\text{ciclo}}|}$.

$$\varepsilon = \frac{12{,}5}{5{,}00} = 2{,}50$$

$$\varepsilon = 2{,}50$$

CUESTIONES

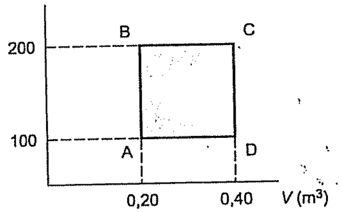
14.1. La figura representa un diagrama PV para un gas ideal podemos afirmar:

a) El trabajo en el proceso ABC es el mismo que en el proceso ADC.

b) Al pasar de C a D no hay trabajo de expansión.

c) El trabajo en el proceso AB es 40 kJ.

d) El trabajo en el proceso ADC es 40 kJ.



14.2. Un gas contenido en un cilindro que tiene un émbolo móvil recibe energía mediante calor a un ritmo de 120 W y el gas se expande realizando un trabajo de 80 J cada segundo. En 5,0 s la energía interna de este gas ha variado en:

a) 0,60 kJ *c)* 0

b) 0,20 KJ *d)* −0,40 kJ

14.3. En un proceso termodinámico se transfiere 418 J a un sistema mediante calor, el sistema se expansiona, a una presión constante de $2{,}00 \cdot 10^5$ Pa, y pasa de un volumen inicial de $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ m³ a un volumen final de $4{,}00 \cdot 10^{-3}$ m³. La variación de energía interna del sistema ha sido de:

a) 818 J *c)* 418 J

b) 18 J *d)* 600 J

14.4.1. La presión de un gas ideal, que se encuentra en un recipiente de paredes rígidas, se reduce lentamente hasta la mitad. El gas cede 150 kJ al exterior mediante calor.

El trabajo de expansión es:

a) 0 *c)* 300 KJ

b) 150 kJ *d)* 200 kJ

14.4.2. La variación de energía interna ha sido:

a) 0 *c)* 300 KJ

b) −150 kJ *d)* −200 kJ

14.5. Un gas experimenta un proceso a una presión constante de $1{,}4 \cdot 10^5$ Pa en el que transfiere 70 kJ al exterior mediante calor. La variación de energía interna ha sido nula. La variación de volumen ha sido:

a) 0 *c)* 1,0 m³

b) 0,50 m³ *d)* −0,50 m³

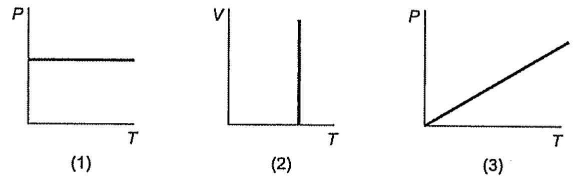
14.6. Los gráficos se refieren a transformaciones de una masa determinada de un gas. Se trata de procesos:

a) (1) isotérmico, (2) isobárico, (3) isócoro.

b) (1) isobárico, (2) isotérmico, (3) isócoro.

c) (1) isócoro, (2) isotérmico, (3) isobárico.

d) (1) isobárico, (2) isócoro, (3) isotérmico.



14.7. En una expansión isotérmica de un gas ideal:

a) No hay trabajo de expansión y la energía interna permanece constante.

b) No se intercambia energía mediante calor ni mediante trabajo.

c) La variación de energía interna es igual a la energía intercambiada mediante trabajo.

d) No hay variación de energía interna y la energía intercambiada mediante calor es igual a la energía intercambiada mediante trabajo, pero de signo contrario.

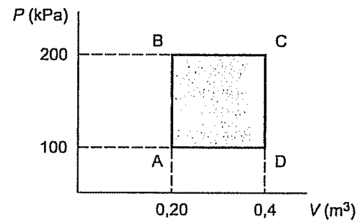
14.8. La figura representa un diagrama PV para un gas ideal, podemos afirmar:

a) Al pasar de A a B el sistema no recibe energía mediante calor.

b) Al pasar de A a B el sistema no realiza ningún trabajo, pero recibe energía mediante calor.

c) La energía mediante calor que recibe el sistema en el proceso ABC es la misma que en el proceso ADC.

d) La energía mediante calor transferida del sistema al exterior o del exterior al sistema cuando el sistema efectúa el proceso ABC y luego vuelve a A por el camino CDA es cero.



14.9. El trabajo neto realizado por un gas en un proceso cíclico ha sido $W = -640$ J. La transferencia de calor entre el sistema y el exterior ha sido:

a) 640 J *c)* −640 J

b) 0 *d)* 320 J

14.10. Un gas ideal que se encuentra dentro de un recipiente de paredes rígidas se calienta y recibe una energía Q mediante calor, la variación de energía interna es:

a) Cero. *c)* Menor que Q.

b) Mayor que Q. *d)* $+Q$

14.11. Se calienta, a presión constante, 1,00 mol de nitrógeno desde 0,00 °C hasta que se duplica su volumen. El nitrógeno es un gas diatómico, que supondremos ideal, de capacidad calorífica molar a presión constante igual 7/2 R. La energía transferida al nitrógeno es:

a) 5,67 kJ *c)* 7,94 kJ

b) 6,89 kJ *d)* 60,10 kJ

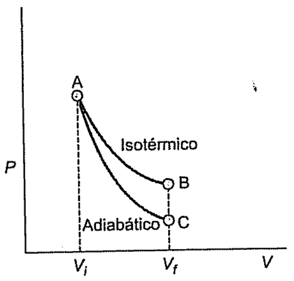
14.12. La figura representa un diagrama PV para un proceso adiabático y para un proceso isotérmico. Un gas experimenta una expansión y pasa de una presión P_1 a una presión inferior P_2. De la figura podemos decir que el trabajo de expansión:

a) Es mayor en el proceso isotérmico.

b) Es mayor en el proceso adiabático.

c) Es igual en ambos procesos.

d) No podemos comparar los trabajos en estos procesos si no conocemos los datos numéricos.



14.13. En un proceso cíclico se cumple:

a) La variación de energía interna del sistema es nula.

b) El trabajo neto en el proceso es cero.

c) La calor neto transferido al sistema es cero.

d) Las tres afirmaciones anteriores son falsas.

14.14. El rendimiento de un ciclo de potencia viene dado por la expresión:

a) $\varepsilon = \dfrac{W_{\text{ciclo}}}{Q_c}$ *c)* $\varepsilon = \dfrac{|Q_f|}{W_{\text{ciclo}}}$

b) $\varepsilon = \dfrac{Q_c}{W_{\text{ciclo}}}$ *d)* $\varepsilon = \dfrac{W_{\text{ciclo}}}{|Q_f|}$

14.15. La eficiencia de un ciclo de refrigeración viene dado por la expresión:

a) $\varepsilon = \dfrac{W_{\text{ciclo}}}{|Q_c|}$ *c)* $\varepsilon = \dfrac{|Q_f|}{|W_{\text{ciclo}}|}$

b) $\varepsilon = \dfrac{|Q_c|}{|W_{\text{ciclo}}|}$ *d)* $\varepsilon = \dfrac{|W_{\text{ciclo}}|}{|Q_f|}$

14.16. La eficiencia de un ciclo de bomba de calor viene dado por la expresión:

a) $\varepsilon = \dfrac{W_{\text{ciclo}}}{|Q_c|}$ *c)* $\varepsilon = \dfrac{|Q_f|}{|W_{\text{ciclo}}|}$

b) $\varepsilon = \dfrac{|Q_c|}{|W_{\text{ciclo}}|}$ *d)* $\varepsilon = \dfrac{|W_{\text{ciclo}}|}{|Q_f|}$

SOLUCIONES

14.1. *b)*
14.2. *b)*
14.3. *b)*
14.4.1. *a)*
14.4.2. *b)*
14.5. *d)*
14.6. *b)*
14.7. *d)*
14.8. *b)*
14.9. *c)*
14.10. *d)*
14.11. *c)*
14.12. *a)*
14.13. *a)*
14.14. *a)*
14.15. *c)*
14.16. *b)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Un gas ideal se expande a presión constante de 500 kPa de 0,400 L a 0,710 L. ¿Cuál es el trabajo de expansión?**

   Sol.: 0,155 kJ

2. **Un gas ideal que tiene una presión de 9,0 atm se expande de forma cuasiestática desde un volumen de 4,0 dm^3 a 8,0 dm^3. ¿Qué energía mediante calor hay que suministrarle para que su energía interna se mantenga constante?**

   Sol.: 3,6 kJ

3. **Un cubo de cobre de 10 cm de lado se calienta desde 16,0 °C a 300 °C a la presión atmosférica. Determinar el trabajo de expansión. Coeficiente de dilatación lineal del cobre $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$.**

   Sol.: 1,5 J

4. **Para cargar una batería se conecta a un generador eléctrico que suministra una potencia de 4,5 kW. La batería transfiere al exterior 0,60 kW mediante calor. Determinar la energía almacenada en la batería al cabo de 3,0 h.**

   Sol.: 42 MJ

5. **¿Cuál es la variación de energía interna de 5,00 g de agua a una temperatura de 100 °C y a una presión de 101 kPa cuando pasan a vapor de agua a 100,0 °C y a presión constante? Calor de vaporización del agua $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, densidad del vapor de agua $5{,}98 \cdot 10^{-4}$ g/cm^3, densidad del agua a 100 °C, 0,958 g/cm^3.**

   Sol.: 10,5 kJ

6. **0,50 mol de un gas ideal ocupan un volumen de 15 dm^3 a la temperatura de 352 K. Se comprime el gas hasta un volumen de 7,9 dm^3 y una temperatura de 291 K. Calcular el trabajo desarrollado según el proceso tenga lugar por uno de los caminos que se indican a continuación:**

   Camino 1: Primero se calienta el gas a volumen constante hasta que alcance la presión final y luego se enfría a presión constante hasta la temperatura final.

   Camino 2: Primero se enfría el gas a presión constante hasta la temperatura final y a continuación experimenta una compresión isotérmica hasta el volumen final.

   Suponer que el proceso es cuasiestático, tanto por el camino 1 como por el camino 2.

   Sol.: Camino 1, −1,1 kJ; camino 2, −0,80 kJ

7. **Un gas ideal que ocupa un volumen de 400 dm^3 se expande a presión constante de $450 \cdot 10^3$ Pa hasta ocupar un volumen de 720 dm^3. En una segunda etapa el gas se enfría a volumen constante hasta que alcanza la temperatura inicial. Determinar:**

   a) El trabajo de expansión.

   b) El calor transferido desde el entorno al gas.

   Sol.: a) 144 kJ; *b)* 144 kJ

8. **Un cilindro provisto de un émbolo móvil contiene 0,50 mol de un gas ideal monoatómico a una presión de 280 kPa, el gas ocupa un volumen de 4,5 L. Se suministra al gas una energía de 405 J mediante calor y el gas se expande manteniendo la presión constante. Determinar:**

   a) La temperatura inicial.

   b) La temperatura final.

   c) El trabajo de expansión.

   d) La variación de energía interna.

   Sol.: a) 30 °C; *b)* 68 °C; *c)* 0,16 kJ; *d)* 0,25 kJ

9. **Cuánto calor hay que transferir a 0,25 mol de argón para elevar su temperatura a volumen constante desde 25 °C a 80 °C. El argón es un gas monoatómico que supondremos que se comporta como un gas ideal.**

   Sol.: 0,17 kJ

10. **Cuánto calor hay que transferir a 3,00 dm^3 de hidrógeno que está a 21,0 °C y $202 \cdot 10^3$ Pa para duplicar su volumen manteniendo la presión constante. El hidrógeno es un gas diatómico de masa atómica 1,01 que supondremos presenta comportamiento ideal.**

    Sol.: 2,11 kJ

11. **Una cierta masa de neón que se encuentra en condiciones normales (273 K y $101 \cdot 10^3$ Pa) experimenta una compresión adiabática cuasiestática y su volumen se reduce a la mitad. Determinar la presión final y la temperatura final. El neón es un gas monoatómico que supondremos presenta comportamiento ideal.**

    Sol.: 321 kPa, 433 K

12. **Un cilindro de volumen contiene aire a la presión de 101 kPa y a la temperatura de 289 K. Mediante un émbolo acoplado al cilindro se comprime el aire hasta que el volumen se reduce a V/15. Determinar la presión y la temperatura final. Suponer que el aire se comporta como un gas ideal, $\gamma = 1{,}40$, y que el proceso es adiabático y cuasiestático.**

    Sol.: 4,48 Mp; 854 K

13. **El calor específico a volumen constante del neón es $c_V = 617{,}9$ J/(kg · K). Determinar para este gas:**

    a) La capacidad calorífica a volumen constante.

    b) La capacidad calorífica a presión constante. El neón es un gas monoatómico de masa atómica 20,18.

    Suponer comportamiento ideal.

    Sol.: a) 12,47 J/(mol · K); *b)* 20,78 J/(mol · K)

14 **Calcular el trabajo de expansión de 1,0 mol de hidrógeno a 25,0 °C cuando su presión varía de 101 kPa a 505 kP. El hidrógeno es un gas diatómico que supondremos se comporta idealmente y que se trata de un proceso adiabático cuasiestático.**

Sol.: 3,6 kJ

15 **El trabajo neto en un ciclo de potencia es 150 MJ y el rendimiento es del 30 %. Determinar:**

a) El calor transferido al sistema.

b) El calor que el sistema cede al foco frío.

Sol.: *a)* 500 MJ; *b)* 350 MJ

16 **Un ciclo de potencia recibe calor a un ritmo de 70 kW. Si el rendimiento es del 40 %, ¿cuánto trabajo se efectúa en 5,0 horas?**

Sol.: 504 MJ

17 **Un acondicionador de aire extrae 750 kJ en cada ciclo con una eficiencia del 2,00. Determinar el trabajo que recibe el sistema y el calor que cede al exterior. Si se invierte y se utiliza como bomba de calor que funciona en las mismas condiciones de transferencias de calor Q_C y Q_f, y de trabajo recibido W_{ciclo}, ¿cuál será la eficiencia?**

Sol.: 375 kJ, 1,13 MJ; 3,00

CAPÍTULO

15 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Consideremos dos objetos en contacto que formen un sistema aislado, el calor fluye espontáneamente del objeto caliente al objeto frío. Jamás se produce espontáneamente el proceso inverso. La primera ley de la Termodinámica no pone ninguna limitación a que, una vez se ha alcanzado el equilibrio, uno de los objetos se enfríe espontáneamente y el otro se caliente y se restablezcan las temperaturas iniciales; únicamente exige que se conserve la energía. En un frigorífico el calor pasa del foco frío al foco caliente, pero este proceso no es espontáneo requiere el aporte de energía mediante trabajo. La segunda ley de la Termodinámica nos dice en qué sentido se producen los procesos espontáneos.

15.1. ENUNCIADOS DE LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Formulación de *Clausius.* No es posible que un proceso tenga como único resultado la transferencia de calor de un objeto frío a otro objeto caliente. El que pase energía mediante calor de un objeto frío a uno caliente es posible, pero requiere algún otro efecto.

Formulación de *Kelvin-Planck.* Es imposible que tenga lugar un proceso cíclico cuyo resultado único sea la extracción de energía mediante calor de una fuente y la cesión al exterior de una cantidad equivalente de energía mediante trabajo.

Los dos enunciados son equivalentes, si se contradice uno se contradice el otro.

15.2. PROCESOS IRREVERSIBLES Y PROCESOS REVERSIBLES

Un proceso *irreversible* es aquel que una vez ha tenido lugar no es posible que el sistema y el entorno vuelvan a sus estados iniciales. Cuando se transfiere calor entre dos objetos que están a distinta temperatura, para que la energía vuelva al que estaba más caliente, requiere la aportación de una cierta cantidad de trabajo de un agente exterior. Por tanto, para que el sistema vuelva al estado inicial, el entorno debe modificarse. Los procesos espontáneos, esto es aquellos procesos que tienden a llevar al sistema a un estado de equilibrio, son irreversibles.

Un proceso es *reversible,* si una vez que ha tenido lugar, el sistema y su entorno pueden volver a sus estados iniciales. Para que un proceso sea reversible no debe haber rozamientos u otros efectos en los que se disipe energía. No hay ningún proceso natural conocido que sea reversible. Los procesos reversibles son idealizaciones que ayudan a comprender los procesos reales. La expansión isotérmica de un gas puede aproximarse a un proceso reversible, si colocamos el gas en un cilindro con un émbolo en un baño a temperatura constante (un termostato) y hacemos que la presión externa sobre el émbolo sea más pequeña en una cantidad infinitesimal, al expansionarse el gas la temperatura se mantiene constante y el proceso tiene lugar de forma muy lenta, a través de una serie de estados de equilibrio. Para que un proceso sea reversible debe ser *cuasiestático.* La transferencia de energía mediante calor entre dos objetos que están en contacto térmico se acerca a un proceso reversible si tienen una diferencia de temperatura diferencial, esto es que tiende a cero. Si la diferencia de temperatura es finita, el proceso es espontáneo y, por tanto, irreversible.

15.3 RENDIMIENTO DE UNA MÁQUINA REVERSIBLE

De la segunda ley de la Termodinámica se deduce:

a) Ningún ciclo de potencia irreversible que opera entre dos focos de temperaturas constantes puede tener un rendimiento mayor que un ciclo de potencia reversible que opera entre los mismos focos térmicos.
b) Todos los ciclos de potencia que operen entre los mismos focos térmicos de temperaturas constantes tienen el mismo rendimiento.

Basándose en que el rendimiento de los ciclos de potencia reversibles que operan entre los mismos focos térmicos (las mismas temperaturas) son los mismos, independientemente de la sustancia que interviene en el ciclo y del conjunto de procesos que constituyen el ciclo. Kelvin propuso definir una escala de *temperaturas absolutas.* En esta escala la razón entre dos temperaturas es igual a la razón entre los calores absorbido y cedido respectivamente por una máquina térmica que desarrolla un ciclo reversible.

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$$

La unidad de temperatura en la escala absoluta o escala Kelvin es el *kelvin,* símbolo K. Esta definición se completa asignando el valor 273,16 K al punto triple del agua, con lo cual tenemos:

$$T = 273{,}16\ \mathrm{K}\left(\frac{Q}{Q_{pt}}\right)$$

Q y Q_{pt} son los calores transferidos entre la máquina y las fuentes térmicas que están a una temperatura T y 273,16 K, respectivamente.

El rendimiento de un ciclo de potencia es:

$$\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Qc} = \frac{Q_c - |Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{Qc}$$

El rendimiento de un *ciclo de potencia reversible* que es el máximo rendimiento que puede alcanzar un ciclo es:

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Donde T_f representa la temperatura absoluta del foco frío y T_c la temperatura absoluta del foco caliente.

La eficiencia de un ciclo de refrigeración es:

$$\varepsilon = \frac{|Q_f|}{|Q_c| - |Q_f|}$$

La eficiencia de un *ciclo de refrigeración reversible* que es la máxima eficiencia es:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

La eficiencia de un ciclo de bomba de calor es:

$$\varepsilon = \frac{|Q_c|}{|Q_c| - |Q_f|}$$

La eficiencia de un *ciclo de bomba de calor reversible* o eficiencia máxima es:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

15.4. ENTROPÍA

El incremento de entropía ΔS de un sistema se define como el calor recibido o cedido por el sistema en una proceso reversible e isotérmico dividido por la temperatura a que se absorbe o se cede.

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{rev}}}{T}$$

Si es el sistema el que cede calor, entonces Q_{rev} es negativo y ΔS también es negativo, por tanto, hay una disminución de entropía.

La unidad de entropía del SI es el J/K.

Si un sistema experimenta un conjunto de procesos reversibles e isotérmicos, el incremento neto de entropía será la suma de los incrementos de entropía de cada uno de estos procesos:

$$\Delta S = \sum_i \frac{Q_{\text{rev}}}{T_i}$$

Un proceso que no sea isotérmico puede considerarse como la suma de un número infinito de procesos diferenciales isotérmicos, entonces el incremento de entropía será:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \qquad (1)$$

En algunos textos dQ_{rev} se representa δQ_{rev} para indicar que no se refiere al diferencial de una función (diferencial exacta), sino que se refiere a una cantidad infinitesimal. El calor es energía en tránsito, cuyo valor depende del camino, no representa, por tanto, una propiedad del sistema y para calcular la integral $\int \delta Q$ hay que conocer los detalles del proceso. Se dice que δQ es una diferencial inexacta.

La variación de entropía en un ciclo es cero. Esto significa que la entropía es una propiedad del sistema que depende únicamente de su estado y es independiente del camino como se ha llegado a este estado.

La variación de entropía al pasar de un estado a otro es independiente del camino seguido, bien sea reversible o irreversible. Pero hay que tener presente que la expresión (1) únicamente puede aplicarse si el proceso es reversible. Para hallar la variación de entropía en un proceso irreversible, puede idearse un proceso reversible entre los mismos estados y calcular la correspondiente variación de entropía. El valor obtenido es el mismo tanto si el proceso es reversible como si es irreversible, ya que este valor sólo depende del estado inicial y del estado final.

La entropía de un sistema al igual que la energía es una *propiedad extensiva,* es decir, depende de la cantidad de sustancia.

En un sistema *aislado* esto es un sistema que no intercambia ni materia ni energía, la entropía nunca disminuye. La variación de entropía en un proceso reversible es nula y en un proceso irreversible la entropía aumenta.

Una forma general de enunciar la segunda ley de la Termodinámica es:

No es posible ningún proceso que implique una disminución de entropía del sistema más el entorno.

$$\Delta S \geq 0$$

Como todos los procesos naturales son irreversibles, en un sistema aislado, la entropía aumenta como consecuencia de los procesos espontáneos. Puede suceder que en un proceso la entropía de un sistema no aislado disminuya, pero la entropía del entorno debe aumentar, los aumentos deben ser superiores que las disminuciones.

En la Termodinámica estadística, la entropía es una medida del desorden. Por ejemplo, cuando dos gases se ponen en contacto, sus moléculas se entremezclan, con lo cual el desorden del sistema aumenta. Otro ejemplo es la fusión de un sólido; al pasar del estado sólido al estado líquido hay un aumento de desorden y la entropía en la fusión se incrementa.

Los procesos naturales tienden a un estado de mayor desorden.

15.5. CAMBIOS DE ENTROPÍA

EN SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

Cambios de estado

Los cambios de estado a presión constante tienen lugar también a temperatura constante para un proceso reversible. Si L es el calor latente y T es la temperatura a que ocurre el cambio de estado, la variación de entropía será:

$$\Delta S = \frac{mL}{T}$$

Este cambio de estado se puede efectuar reversiblemente a una temperatura definida, que sea ligeramente diferente que la temperatura de fusión, y a la presión dada. El proceso se produce tan lentamente que puede suponerse que tiene lugar a través de una serie de estados de equilibrio.

Procesos a presión constante

Muchos procesos en los que intervienen sólidos y líquidos tienen lugar a presión constante. Sea C_p la capacidad calorífica molar a presión constante de un sólido o un líquido, supongamos una variación de temperatura diferencial dT, el calor absorbido, dQ, será:

$$dQ = n\, C_p\, dt$$

n representa el número de moles.

La variación de entropía será:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n\, C_p\, dT}{T} = n\, C_p\, [\ln T]_{T_1}^{T_2} = n\, C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Podemos escribir también esta expresión en función del calor específico:

$$\Delta S = m\, c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Normalmente, los calores específicos y las capacidades caloríficas molares de los sólidos y líquidos que aparecen tabulados son a presión constante.

Para realizar este proceso de forma reversible, podemos poner en contacto el sólido o el líquido con un número infinito de fuentes térmicas que vayan de una temperatura T_1 a una temperatura T_2.

EN UN GAS IDEAL

Proceso *isotérmico:*

Para un gas ideal, en un proceso isotérmico se cumple $\Delta U = 0$. Por tanto:

$$Q = W = n\, T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Para un proceso isotérmico reversible:

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T}\, ;\ \Delta S = \frac{n\, T \ln \dfrac{V_2}{V_1}}{T} = n\, R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En un proceso isotérmico se cumple: $P_1\, V_1 = P_2\, V_2$, podemos escribir:

$$\Delta S = n\, R \ln \frac{V_2}{V_1} = n\, R \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Proceso a *volumen constante (isócoro):*

Supongamos una variación de temperatura elemental, dT, entonces:

$$dQ = n\, C_v\, dT$$

Para un proceso reversible:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_r}{T}\, ;\ \Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n\, C_v\, dT}{T} = n\, C_v\, [\ln T]_{T_1}^{T_2} = n\, C_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S = n\, C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

MÁQUINAS TÉRMICAS

15.1. Una máquina térmica que desarrolla un ciclo reversible recibe 1 500 kJ desde un foco caliente a 500 K y cede calor a un foco frío a 220 K. Determinar:

a) El rendimiento del ciclo.

b) El trabajo desarrollado.

c) El calor transferido al foco frío.

Solución

a) El rendimiento del ciclo. Como se trata de un ciclo reversible, el rendimiento será:

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Sustituyendo resulta: $\eta_{\text{máx}} = 1 - \dfrac{200\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0{,}600$

Rendimiento: 60,0 %

b) El trabajo desarrollado. Utilizaremos le expresión del rendimiento:

$$\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_c}$$

De donde: $W_{\text{ciclo}} = 0{,}600 \times 1\,500\ \text{kJ} = 900\ \text{kJ}$

$W_{\text{ciclo}} = 900\ \text{kJ}$

c) El calor transferido al foco frío. Según la primera ley de la Termodinámica:

$$W = Q_C - Q_f$$

Tenemos, por tanto:

$$900\ \text{kJ} = 1\,500\ \text{kJ} - Q_f \qquad Q_f = 600\ \text{kJ}$$

15.2. Una nevera desarrolla un ciclo de refrigeración que absorbe calor del congelador a un ritmo de $192 \cdot 10^3$ kJ por día, cuando la temperatura del congelador es de −5,0 °C y la temperatura del aire de alrededor de la nevera es 22,0 °C. Determinar la potencia mínima para accionar esta nevera.

Solución

La eficiencia máxima del ciclo de refrigeración es $\varepsilon_{\text{máx}} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f}$.

Pasamos las temperaturas Celsius a Kelvin.

$$T_f = (-5{,}0 + 273{,}15)\ \text{K} = 268{,}15 \qquad T_c = (22{,}0 + 273{,}15) = 295{,}15\ \text{K}$$

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{268{,}15\ \text{K}}{295{,}15\ \text{K} - 268{,}15\ \text{K}} = 9{,}931$$

Por otra parte la eficacia de un ciclo de refrigeración es:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{|Q_f|}{|W_{\text{ciclo}}|}$$

Cuando la eficiencia es máxima la potencia que se requiere para accionar la nevera es mínima.

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{|Q_f|}{|W_{\text{ciclo (mín)}}|}$$

Sustituyendo resulta:

$$9{,}931 = \frac{192 \cdot 10^3\ \text{kJ}}{|W_{\text{ciclo (mín)}}|} \qquad |W_{\text{ciclo (mín)}}| = 19{,}33 \cdot 10^3\ \text{kJ}$$

Es el trabajo aportado durante un día. La potencia será:

$$P = \frac{19{,}33 \cdot 10^3\ \text{kJ}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}} = 0{,}2237\ \text{kW}$$

Como el ciclo de refrigeración es irreversible, se requerirá una potencia superior a la mínima. Se requiere una potencia superior a 224 W.

15.3. Para mantener una vivienda a una temperatura de 20 °C, una bomba de calor debe transferir $4{,}8 \cdot 10^5$ kJ por día cuando la temperatura exterior es de 10 °C. La potencia requerida para accionar la bomba de calor es de 250 W.

a) Determinar la eficiencia del ciclo de la bomba de calor.

b) ¿Se trata de un ciclo reversible?

Solución

a) La eficiencia del ciclo de la bomba de calor. Utilizaremos la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{|Q_c|}{|W_{\text{ciclo}}|}$$

El trabajo aportado durante un día será:

$$W = 200\ W \times 24 \times 60 \times 60\ \text{s} = 1{,}728 \cdot 10^4\ \text{kJ}$$

La eficiencia será:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{4{,}8 \cdot 10^5}{1{,}728 \cdot 10^4} = 27{,}7$$

Eficiencia $\varepsilon = 28$

b) ¿Se trata de un ciclo reversible? Calcularemos la eficiencia de este ciclo, si fuese reversible. Para ello utilizaremos la expresión:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{T_c}{Tc - T_f}$$

Las temperaturas en le escala Kelvin son:

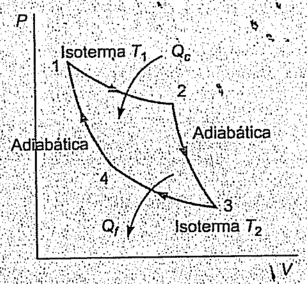
$$T_c = (20 + 273)\ k = 293 \text{ K} \qquad T_f = (10 + 273) \text{ K} = 283 \text{ K}$$

Calcularemos ahora la eficiencia máxima:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{293 \text{ K}}{293 \text{ K} - 283 \text{ K}} = 29{,}3$$

La eficiencia del ciclo de la bomba de calor es inferior a la de un ciclo reversible de una bomba de calor. Por tanto, se trata de un ciclo irreversible.

15.4. El científico francés Sadi Carnot (1796-1832) ideó una máquina ideal que desarrolla un ciclo de potencia reversible, el ciclo de Carnot. En este ciclo un gas encerrado en un cilindro con un pistón experimenta los siguientes procesos reversibles:



1-2. Expansión isotérmica a T_1 y el gas recibe una energía, Q_c, mediante calor del foco caliente.

2-3. Expansión adiabática y el gas alcanza la temperatura T_2.

3-4. Compresión isotérmica a T_2 y el gas cede una cantidad de calor, Q_f, al foco frío.

4-4. Compresión adiabática y el gas alcanza una temperatura T_1.

Si el gas es un gas ideal, determinar:

a) La energía intercambiada mediante calor y mediante trabajo en cada uno de los cuatro procesos del ciclo.

b) El rendimiento del ciclo.

Realizar los cálculos para un gas ideal diatómico, $\gamma = 1{,}40$, que ocupa un volumen de 0,670 dm^3 a una presión de 400 kPa y a la temperatura del foco caliente $T_c = 317$ K. Este gas experimenta una expansión isotérmica hasta alcanzar una presión de 210 kPa y luego una expansión adiabática hasta que la presión es de 100 kPa.

Solución

a) La energía intercambiada mediante calor y mediante trabajo en cada uno de los cuatro procesos del ciclo.

Proceso 1-2. Expansión isotérmica y reversible a la temperatura T_1, el volumen pasa de V_1 a V_2. La variación de energía interna es nula, por tanto, el trabajo de expansión, W_{12}, es igual al calor, Q_{12}, que recibe del foco caliente.

$$W_{12} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \qquad Q_{12} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Proceso 2-3. Expansión adiabática y reversible, la temperatura desciende de T_1 a T_2. Como se trata de un proceso adiabático no hay transferencia de calor, $\Delta U = -W$, por tanto:

$$Q_{23} = 0 \qquad W_{23} = -\,n\,C_v\,(T_2 - T_1)$$

Proceso 3-4. Compresión isotérmica y reversible a la temperatura T_2, el volumen pasa de V_3 a V_4. El calor, Q_{34}, que el gas cede al foco frío es igual al trabajo de compresión.

$$W_{34} = n\,R\,T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} \qquad Q_{34} = n\,R\,T_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

Proceso 4-1. Compresión adiabática y reversible, la temperatura pasa de T_2 a T_1.

$$Q_{41} = 0 \qquad W_{41} = -\,n\,C_v\,(T_1 - T_2)$$

b) El rendimiento del ciclo. El rendimiento de un ciclo de potencia es:

$$\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_c} \tag{1}$$

$$W_{\text{ciclo}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + n\,R\,T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} \tag{2}$$

Observar que: $W_{23} + W_{41} = 0$

Como el paso 4-1 es un proceso adiabático, lo mismo que el paso de 2-3, podemos escribir:

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$$

Por consiguiente:

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$$

Sustituimos en (2):

$$W_{\text{ciclo}} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + n\,R\,T_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = n\,R\,(T_1 - T_2) \ln\frac{V_2}{V_1}$$

El calor recibido del foco caliente es:

$$Q_c = Q_{12} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

En (1) tenemos:

$$\eta = \frac{n\,R\,(T_1 - T_2)\ln\dfrac{V_2}{V_1}}{n\,R\,T_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Como T_1 es la temperatura del foco caliente, T_c, y T_2 es la temperatura del foco frío, T_f, escribiremos:

$$\eta = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Como corresponde a un ciclo de potencia reversible que opera entre dos focos de temperaturas constantes.

Cálculos

Proceso 1-2. Expansión isotérmica y reversible.

$$W_{12} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \qquad Q_{12} = n\,R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Calcularemos V_2. Como se trata de un proceso isotérmico:

$$P_1\,V_1 = P_2\,V_2 \qquad 400\text{ kPa} \times 0{,}670\text{ dm}^3 = 210\text{ kPa}\,V_2 \qquad V_2 = 1{,}276\text{ dm}^3$$

Calcularemos el número de moles a partir de la ley de los gases ideales, $PV = nR\,T$.

$$400 \cdot 10^3\text{ Pa} \times 0{,}670 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 = n \times 8{,}31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times 317\text{ K};\ n = 0{,}1017\text{ mol}$$

El trabajo de expansión será:

$$W_{12} = 0{,}1017\text{ mol} \times 8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \times 317\text{ K} \ln\frac{1{,}276}{0{,}670} = 172{,}5\text{ J}$$

$$Q_{12} = Q_c = 172{,}5\text{ J}$$

$$W_{12} = 173\text{ J} \qquad Q_c = 173\text{ J}$$

Proceso 2-3. Expansión adiabática y reversible.

$$Q_{23} = 0 \qquad W_{23} = -n\,C_v\,(T_2 - T_1)$$

Como se trata de un proceso adiabático: $\dfrac{T_3}{T_2} = \left(\dfrac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$

$$\frac{T_3}{317\text{ K}} = \left(\frac{100\text{ kPa}}{210\text{ kPa}}\right)^{\frac{1{,}40-1}{1{,}40}} \qquad T_3 = 256{,}4\text{ K}$$

$$W_{23} = -0{,}1017\text{ mol} \times \frac{5}{2} \times 8{,}31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times (256{,}4\text{ K} - 317\text{ K}) = 128{,}0\text{ J}$$

$$W_{23} = 128\text{ J}$$

Proceso 3-4. Compresión isotérmica y reversible.

$$W_{34} = n\,R\,T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} \qquad Q_{34} = n\,R\,T_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

Necesitamos conocer V_3 y V_4. Para calcular V_3, como conocemos el resto de las condiciones podemos aplicar la ley de los gases ideales:

$$100 \cdot 10^3\text{ Pa} \times V_3 = 0{,}1017\text{ mol} \times 8{,}31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times 256{,}4\text{ K};\ V_3 = 2{,}166 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$$

Del punto 4 sólo conocemos la temperatura. Pero sabemos que el paso 3-4 es un proceso isotérmico reversible y que el paso 4-1 es un proceso adiabático reversible.

Proceso isotérmico: $P_3\,V_3 = P_4\,V_4 \qquad P_4\,V_4 = 100\text{ kPa} \times 2{,}166\text{ dm}^3$

Proceso adiabático y reversible: $P_4\,V_4^{\gamma} = P_1\,V_1^{\gamma} \qquad P_4\,V_4^{1{,}40} = 400\text{ k Pa} \times (0{,}670\text{ dm}^3)^{1{,}40}$

Dividiendo miembro a miembro estas dos igualdades resulta:

$$V_4^{0{,}40} = 1{,}054\ (\text{dm}^3)^{0{,}40} \qquad V_4 = 1{,}140\text{ dm}^3$$

$$W_{34} = 0{,}1017\text{ mol} \times 8{,}31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times 256{,}4\text{ K} \times \ln\frac{1{,}140}{2{,}166} = -139{,}0\text{ J}$$

$$Q_{34} = Q_f = -139{,}0\text{ J}$$

$$W_{34} = -139\text{ J} \qquad Q_f = -139\text{ J}$$

Proceso 4-1. Compresión adiabática y reversible.

$$Q_{41} = 0 \qquad W_{41} = -\,n\,C_v\,(T_1 - T_2) = -\,n\,C_v\,(T_c - T_f)$$

$$W_{41} = -0{,}1017\text{ mol} \times \frac{5}{2} \times 8{,}31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times (317\text{ K} - 256{,}4\text{ K}) = -128{,}0\text{ J}$$

$$W_{41} = -128\text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = 172{,}5\text{ J} + 128{,}0\text{ J} - 139{,}0\text{ J} - 128{,}0\text{ J} = 33{,}5\text{ J}$$

Rendimiento: $\eta = \dfrac{33{,}5}{172{,}5} = 0{,}194$

Podíamos calcular el rendimiento de otra forma: $\eta = \dfrac{T_c - T_f}{T_c}$

$$\eta = \frac{317\text{ K} - 256{,}3\text{ K}}{317\text{ K}} = 0{,}191$$

Prácticamente coinciden. Podemos dar un rendimiento: $\eta = 0{,}19$ %

15.5. Como el ciclo de Carnot es reversible, puede actuar en sentido inverso, es decir, recibir calor del foco frío y cederlo al foco caliente, todo ello con un aporte de energía mediante trabajo. Calcular la eficiencia del ciclo de Carnot del problema anterior cuando actúa en sentido inverso.

Solución

La eficiencia de un ciclo de refrigeración reversible viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = \frac{|Q_c|}{|W|} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

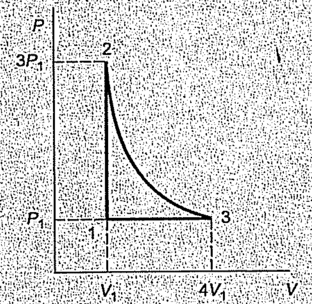
Sustituimos:

$$\varepsilon = \frac{139{,}0 \text{ J}}{33{,}5 \text{ J}} = 4{,}15 \qquad \varepsilon = \frac{256{,}3 \text{ K}}{317 \text{ K} - 256{,}3 \text{ K}} = 4{,}22$$

Valores que, si tenemos en cuenta que hemos ido eliminando cifras en los cálculos anteriores, podemos considerar como iguales. Tomaremos 4,2.

$$\varepsilon = 4{,}2$$

15.6. El ciclo de la figura consiste en un calentamiento a volumen constante, proceso 1-2; una expansión isotérmica, proceso 2-3; y un enfriamiento a presión constante, proceso 3-1. Suponiendo que el gas que experimenta el ciclo es monoatómico y que se comporta como un gas ideal y que los procesos son reversibles, determinar el rendimiento de este ciclo y una vez hallado efectuar los cálculos para $T_1 = 300$ K y $T_2 = 900$ K.



Solución

El rendimiento de un ciclo de potencia viene dado por la expresión:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_c}$$

El sistema recibe calor en los procesos 1-2 y 2-3 y transfiere trabajo en los procesos 2-3 y 3-1.

Proceso 1-2.

$$W_{12} = 0 \qquad Q_{12} = n\,C_v\,(T_2 - T_1) = n\,\frac{3}{2}\,R\,(T_2 - T_1)$$

Proceso 2-3.

En un proceso isotérmico se cumple: $W = Q = n\,R\,T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$$W_{2-3} = Q_{23} = n\,R\,T_2 \ln\left(\frac{4V_1}{V_1}\right) = n\,R\,T_2 \ln 4$$

Proceso 3-1.

$$W_{31} = P_1\,(V_1 - 4V_1) = -\,3P_1\,V_1$$

$$W_{ciclo} = W_{2-3} + W_{31} \qquad W_{ciclo} = n\,R\,T_2 \ln 4 - 3\,P_1\,V_1$$

$$Q_c = Q_{12} + Q_{23} \qquad Q_c = n\,3/2\,R\,(T_2 - T_1) + n\,R\,T_2 \ln 4$$

El rendimiento será:

$$\eta = \frac{n\,R\,T_2 \ln 4 - 3\,P_1\,V_1}{n\,3/2\,R\,(T_2 - T_1) + n\,R\,T_2 \ln 4}$$

Como $P_1 V_1 = n\,R\,T_1$, podemos escribir:

$$\eta = \frac{n\,R\,T_2 \ln 4 - 3\,n\,R\,T_1}{n\,3/2\,R\,(T_2 - T_1) + n\,R\,T_2 \ln 4} = \frac{T_2 \ln 4 - 3\,T_1}{3/2\,(T_2 - T_1) + T_2 \ln 4}$$

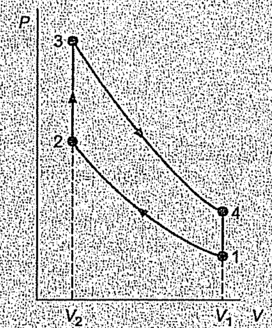
$$\eta = \frac{T_2 \ln 4 - 3\,T_1}{3/2\,(T_2 - T_1) + T_2 \ln 4}$$

Sustituyendo:

$$\eta = \frac{900 \ln 4 - 3 \times 300 \text{ K}}{3/2\,(900 \text{ K} - 300 \text{ K}) + 900 \ln 4} = 0{,}1618$$

Rendimiento: 16,2 %

15.7. La figura representa el ciclo ideado en 1876 por el ingeniero alemán Otto. El ciclo consta de cuatro procesos reversibles. En el proceso 1-2 el gas (aire) es comprimido adiabáticamente hasta el punto 2. En el proceso 2-3 el gas recibe calor a volumen constante de una fuente externa. En el proceso 3-4 el gas experimenta una expansión adiabática. Por último, el proceso 4-1 es isobárico y el gas cede calor. Hallar el rendimiento del ciclo de Otto suponiendo que es reversible y que el aire se comporta como un gas ideal.



Solución

El rendimiento de un ciclo de potencia es: $\eta = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_c}$

En los procesos 2-3 y 4-1 hay transferencia de calor a volumen constante.

$$Q_c = Q_{23} = n\,C_v\,(T_3 - T_2) \qquad Q_f = Q_{41} = n\,C_v\,(T_1 - T_4)$$

La diferencia $(T_1 - T_4)$ es negativa, por tanto, Q_f es también negativo, como tenemos que tomar los valores absolutos, escribiremos: $|Q_f| = n\,C_v\,(T_4 - T_1)$

Sustituimos en la expresión que nos da el rendimiento:

$$\eta = 1 - \frac{n\,C_v\,(T_4 - T_1)}{n\,C_v\,(T_4 - T_1)} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

Esta expresión la podemos escribir de otra forma.

Como los procesos 3-4 y 1-2 son adiabáticos, tenemos:

$$T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_2\,V_2^{\gamma-1} \qquad T_3\,V_3^{\gamma-1} = T_4\,V_4^{\gamma-1}$$

De donde: $T_1 = T_2\left(\dfrac{V_2}{V_2}\right)^{\gamma-1}$ y $T_4 = T_3\left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

Sustituimos en la expresión que nos da el rendimiento:

$$\eta = 1 - \left[\frac{T_3\,(V_3/V_4)^{\gamma-1} - T_2\,(V_2/V_1)^{\gamma-1}}{T_3 - T_2}\right]$$

Como $V_3 = V_2$ y $V_4 = V_1$, resulta:

$$\eta = 1 - \left[\frac{T_3\,(V_2/V_1)^{\gamma-1} - T_2\,(V_2/V_1)^{\gamma-1}}{T_3 - T_2}\right] = 1 - \left[\frac{(T_3 - T_2)\,(V_2/V_1)^{\gamma-1}}{T_3 - T_2}\right] = 1 - (V_2/V_1)^{\gamma-1}$$

Que podemos escribir:

$$\eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

La relación V_1/V_2 recibe el nombre de relación de compresión: $r = V_1/V_2$. Con lo que podemos expresar el rendimiento como:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

De esta expresión se deduce que cuanto mayor sea la relación de compresión, mayor es el rendimiento.

El rendimiento de un ciclo Otto es inferior al de un ciclo de Carnot, ya que las temperaturas de entrada y de salida no son constantes.

El ciclo de Otto es el que sigue aproximadamente el motor de un automóvil de gasolina de cuatro tiempos, como lo son, prácticamente, la mayoría de los automóviles. El gas, mezcla de aire y gasolina, entra en el cilindro en el punto 1. En el punto 2 la bujía produce una chispa y tiene lugar la combustión de la mezcla, con lo cual el sistema recibe calor y se eleva la temperatura y la presión. De 2 a 3 se efectúa trabajo. De 3 a 4 el gas es expulsado.

15.8. Calcular el rendimiento de un ciclo de Otto ideal si la relación de compresión es 0,80 y opera con un gas ideal para el que $\gamma = 1{,}4$.

Solución

Aplicaremos la expresión $\eta = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}$ que nos da el rendimiento de un ciclo Otto.

$$\eta = 1 - \frac{1}{8{,}0^{1{,}4-1}} = 0{,}56\ \%$$

$$\eta = 56\ \%$$

VARIACIÓN DE ENTROPÍA

15.9. Calcular la variación de entropía de 0,500 kg de hielo a 0,00 °C cuando se convierte en agua a 0,00 °C y a la presión atmosférica. Calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.

Solución

Como se ha indicado, este cambio de estado se puede efectuar reversiblemente a la presión dada y a una temperatura definida que sea ligeramente diferente que la temperatura de fusión y tan lentamente que puede suponerse que tiene lugar a través de una serie de estados de equilibrio. Como se trata de un proceso isotérmico, la variación de entropía viene dada por:

$$\Delta S = \frac{m\,L_f}{T}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\Delta S = \frac{0{,}500\ \text{kg} \times 3{,}34 \cdot 10^5\ \text{J/kg}}{273{,}15\ \text{K}}$$

$$\Delta S = 611\ \text{J/K}$$

15.10. Una pieza de cobre de 2,60 kg que está a una temperatura de 650 K se arroja a un lago cuya temperatura es 290 K. Determinar:

a) La variación de entropía de la pieza de cobre.

b) La variación de entropía del lago.

c) La variación de entropía del universo. Calor específico del cobre 390 J/(kg · K). Suponer que la masa del agua del lago es tal que prácticamente su temperatura no varía.

Solución

a) La variación de entropía de la pieza de cobre.

Suponiendo que este cambio tiene lugar a través de un conjunto de procesos elementales, la variación de entropía será:

$$\Delta S = m\,c\,\ln\frac{T_2}{T_1}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\Delta S_{\text{cobre}} = 2{,}60 \text{ kg} \times 390 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \times \ln \frac{290}{650} = -818{,}3 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{cobre}} = -818 \text{ J/K}$$

b) La variación de entropía del lago.

La energía mediante calor que recibe el lago es la que cede la pieza de cobre:

$$Q = m\,c\,\Delta T;\ Q = 2{,}60 \text{ kg} \times 390 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \times (290 \text{ K} - 650 \text{ K}) = -365{,}0 \text{ kJ}$$

Como el lago recibe esta energía, será positiva. Como la temperatura del lago prácticamente no varía, podemos suponer que el proceso es isotérmico.

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{rev}}}{T} \qquad \Delta S_{\text{lago}} = \frac{365{,}0 \text{ kJ}}{290 \text{ K}} = 1{,}258 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{\text{lago}} = 1{,}26 \text{ kJ/K}$$

c) La variación de entropía del universo.

La variación de entropía del universo será la suma de la variación de entropía del cobre y la variación de entropía del lago.

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{cobre}} + \Delta S_{\text{lago}};\ \Delta S_{\text{universo}} = -0{,}8183 \text{ kJ/K} + 1{,}258 \text{ kJ/K} = 0{,}439 \text{ kJ/K}$$

$\Delta S_{\text{universo}} > 0$, como corresponde a un proceso irreversible.

$$\Delta S_{\text{universo}} = 440 \text{ J/K}$$

15.11. En un recipiente térmicamente aislado se mezclan 50,0 g de agua a 20,0 °C y 40,0 g de agua a 80,0 °C. Determinar:
a) La temperatura de equilibrio.
b) La variación de entropía.

Solución

a) La temperatura de equilibrio. Como al efectuar esta mezcla se conserva la energía, podemos utilizar la expresión:

$$m_1\,c_1\,(T_1 - T_f) = m_2\,c_2\,(T_f - T_2)$$

Que sustituyendo se obtiene:

$$40{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 4{,}18 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}\ (353{,}15 \text{ K} - T_f) = 50{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 4{,}18 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}\ (T_f - 293{,}15 \text{ K})$$

$$T_f = 319{,}8 \text{ K}$$

$$T_f = 320 \text{ K}$$

b) La variación de entropía. Este proceso es, evidentemente, irreversible. Podemos imaginar un proceso reversible de enfriamiento de 40,0 g de agua desde 353,15 K a 319,8 K y un proceso reversible en el que 50,0 g de agua se calientan desde 293,15 K hasta 319,8 K.

La variación de entropía correspondiente a un proceso de calentamiento o de enfriamiento a presión constante viene dada por la expresión:

$$\Delta S = m\,c \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Sustituyendo resulta:

$$\Delta S_1 = 40{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 4{,}18 \text{ kJ/kg} \times \ln \frac{319{,}8}{353{,}15} = -16{,}58 \text{ J/Kg}$$

$$\Delta S_2 = 50{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 4{,}18 \text{ kJ/kg} \times \ln \frac{319{,}8}{293{,}15} = 18{,}18 \text{ J/Kg}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \qquad \Delta S = -16{,}58 \text{ J/K} + 18{,}18 \text{ J/K} = 1{,}60 \text{ J/K}$$

La entropía aumenta como corresponde a un proceso irreversible.

$$\Delta S = 1{,}6 \text{ J/K}$$

15.12. Supongamos que en el sistema del ejercicio anterior deseamos restablecer la situación original; es decir, que 50,0 g de agua vuelvan a 40,0 °C y que 40,0 g de agua vuelvan a 80,0 °C.

Solución

El proceso en el que se mezcla agua caliente con agua fría y se alcanza una temperatura de equilibrio es irreversible desde el punto de vista termodinámico, pero esto no quiere decir que no se pueda volver a la situación original, para ello, según la segunda ley el entorno debe modificarse.

Para volver a la situación inicial siguiendo un proceso reversible habría que poner 50,0 g de agua en contacto con un número infinito de fuentes térmicas entre 319,8 K y 293,15 K. La entropía del agua habrá disminuido en 18,18 J/K, mientras que la entropía de las fuentes habrá aumentado en 18,18 J/K. Luego habrá que poner 40,0 g de agua con un número infinito de fuentes térmicas entre 319,8 K y 353,15 K. La entropía del agua habrá aumentado en 16,58 J/K y la de las fuentes habrá disminuido en 16,58 J/K. Por tanto:

La entropía del agua habrá variado en:

$$\Delta S_{\text{agua}} = -18{,}8 \text{ J/K} + 16{,}58 \text{ J/K} = -1{,}60 \text{ J/K}$$

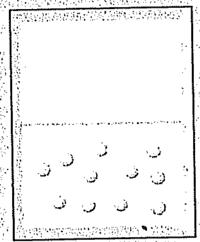
Esta cantidad es la misma que la que ha aumentado en el proceso de mezcla, con lo cual el agua tiene la misma entropía que tenía originalmente.

La entropía de las fuentes habrá variado en:

$$\Delta S_{\text{fuentes}} = 18{,}8 \text{ J/K} - 16{,}58 \text{ J/K} = 1{,}60 \text{ J/K}$$

La entropía de las fuentes ha aumentado en 1,60 J/K, que coincide con el aumento de entropía del agua en el proceso de mezcla.

15.13. Un recipiente térmicamente aislado está dividido en dos compartimentos del mismo volumen separados por una lámina. Uno de los compartimentos contiene un gas ideal y en el otro se ha hecho el vacío.



Cuando se rompe la lámina, el gas ocupa todo el recipiente. Como el recipiente está térmicamente aislado no hay intercambio de calor, por tanto, el proceso es adiabático. Tampoco hay trabajo de expansión, puesto que, al tratarse de un gas ideal, no hay interacción entre las moléculas del gas y el gas se expande en el vacío. Este proceso se denomina expansión libre. Determinar para este proceso:

a) La variación de energía interna.

b) La variación de entropía. Efectuar los cálculos para un número de moles de gas ideal $n = 0{,}500$.

Solución

a) La variación de energía interna. Como no hay transferencia de energía mediante calor ni mediante trabajo, la variación de energía interna es cero y, por tratarse de un gas ideal, la temperatura no varía $\Delta T = 0$.

$$\Delta U = 0$$

b) La variación de entropía. El proceso es, obviamente, irreversible, por lo que para calcular la variación de entropía debemos idear un proceso isotérmico y reversible entre estos estados, inicial y final. Éste puede ser un proceso isotérmico en el que el gas pase del volumen V al volumen $2V$. Utilizaremos la expresión:

$$\Delta S = n\,R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Sustituimos:

$$\Delta S = 0{,}500 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times \ln\frac{2V}{V} = 2{,}88 \text{ J/K}$$

Obsérvese que, como $Q = 0$, no se cumple $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$, lo que quiere decir que, como hemos indicado, no se trata de un proceso reversible.

$$\Delta S = 2{,}88 \text{ J/K}$$

15.14. Un recipiente térmicamente aislado está dividido en dos compartimentos del mismo volumen separados por una lámina. Uno de los compartimentos contiene 0,020 mol de helio y el otro contiene 0,020 mol de neón. Ambos están a la misma temperatura. Cuando se rompe la lámina, los gases se mezclan. Suponiendo que estos gases presentan comportamiento ideal, determinar la variación de entropía del sistema.

Solución

La presión y la temperatura al final del proceso son las mismas que al principio. Podemos suponer que el helio experimenta una expansión isotérmica y reversible desde un volumen V a un volumen $2V$. Lo mismo el neón. La variación de entropía del proceso será igual a la suma de las variaciones de entropía de cada gas. La variación de entropía de un proceso isotérmico y reversible es:

$$\Delta S = n\,R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = 0{,}020 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times \ln\frac{2V}{V} = 0{,}115 \text{ J/K}$$

La variación de entropía del neón será la misma: $\Delta S_2 = 0{,}115$ J/K

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \qquad \Delta S = 0{,}115 \text{ J/K} + 0{,}115 \text{ J/K} = 0{,}230 \text{ J/K}$$

Podemos enfocar la solución desde otro punto de vista.
Cuando el helio ocupa todo el volumen, su presión es:

$$P_{2(He)} = \frac{P_{1(He)}\,V_1}{V_2} = \frac{P_{1(He)}\,V_1}{2V_1} = \frac{P_{1(He)}}{2}$$

Como se trata de un proceso isotérmico podemos expresar la entropía:

$$\Delta S = n\,R\ln\frac{P_1}{P_2}$$

Que sustituyendo resulta:

$$\Delta S_1 = 0{,}020 \text{ mol} \times 8{,}31 \text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \times \ln\frac{P_{1(He)}}{P_{1(He)}/2} = 0{,}115 \text{ J/K}$$

El cambio de presión del neón es el mismo. Por tanto:

$$\Delta S_2 = 0{,}115 \text{ J/K} \qquad \Delta S = 0{,}115 \text{ J/K} + 0{,}115 \text{ J/K} = 0{,}230 \text{ J/K}$$

$$\Delta S = 0{,}23 \text{ J/K}$$

15.15. Determinar la variación de entropía de 1,00 mol de hidrógeno (H_2) cuyo volumen es 1,00 L a la temperatura de 273 K cuando se expansiona y ocupa un volumen de 5,65 L y su temperatura aumenta a 373 K. Suponer comportamiento ideal.

Solución

Podemos suponer primero que ponemos el gas en contacto con un número infinito de fuentes térmicas desde 273 K a 373 K manteniendo el volumen constante. Se trata de un proceso isotérmico reversible en el que el cambio es:

$$V_1 = 1{,}00\ \text{L}, \quad T_1 = 273\ \text{K} \rightarrow V_1 = 1{,}00\ \text{L}, P_2, \quad T_2 = 373\ \text{K}$$

Suponemos que a continuación tiene lugar una expansión isotérmica y reversible, en la que el cambio es: $V_1 = 1{,}00\ \text{L}$, $T_2 = 373\ \text{K} \rightarrow V_2 = 5{,}65\ \text{L}$, $T_2 = 373\ \text{K}$.

En un proceso a volumen constante se cumple:

$$\Delta S_V = n\, C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Como el hidrógeno es un gas diatómico: $C_v = 3/2\ \text{R}$

$$\Delta S_1 = 1{,}00\ \text{mol} \times 3/2 \times 8{,}31\ \text{J/(K} \cdot \text{mol)} \times \ln \frac{373}{273} = 3{,}890\ \text{J/K}$$

La variación de entropía en un proceso isotérmico es:

$$\Delta S = n\, R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Sustituimos: $\Delta S_2 = 1{,}00\ \text{mol} \times 8{,}31\ \text{J/(K} \cdot \text{mol)} \times \ln \dfrac{5{,}65}{1{,}00} = 14{,}39\ \text{J/K}$

$$\Delta S = 3{,}890\ \text{J/K} + 14{,}39\ \text{J/K} = 18{,}28\ \text{J/K}$$

$$\Delta S = 18{,}3\ \text{J/K}$$

CUESTIONES

15.1. Respecto a los procesos reversibles podemos afirmar:

a) Todos los procesos de la naturaleza son reversibles.

b) Para que un proceso sea reversible debe ser cuasiestático.

c) Un proceso en el que hay pérdidas de energía debido a rozamientos puede ser reversible con tal que se recupere la energía perdida.

d) Los procesos reversibles son siempre isotérmicos.

15.2. Una máquina térmica desarrolla un ciclo reversible que opera entre un foco caliente a la temperatura T_c y un foco frío a la temperatura T_f. Para aumentar el rendimiento habrá que:

a) Disminuir T_c manteniendo T_f constante.

b) Aumentar T_f manteniendo T_c constante.

c) Disminuir T_f manteniendo T_c constante.

d) No es posible modificar el rendimiento de un ciclo reversible.

15.3. Si leemos que cuatro máquinas térmicas que operan entre 800 K y 200 K cumplen: 1. $Q_c = 800$ kJ, $Q_f = 200$ kJ; 2. $Q_c = 1600$ kJ, $Q_f = 300$ kJ; 3. $Q_c = 600$ kJ, $Q_f = 200$ kJ; 4. $Q_c = 900$ kJ, $W_{\text{ciclo}} = 400$ kJ, respectivamente, es cierto que:

a) Todas las máquinas son posibles.

b) La 1 es irreversible.

c) Todas las máquinas son imposibles.

d) La 2 es imposible.

15.4. Un ciclo de potencia reversible y otro irreversible operan entre los mismos focos de temperatura. Ambos reciben la misma cantidad de calor del foco caliente, podemos afirmar:

a) Ambos ceden la misma cantidad de calor al foco frío.

b) El ciclo reversible cede más calor al foco frío.

c) El ciclo irreversible cede más calor al foco frío.

d) Para poder afirmar qué ciclo cede más calor al foco frío es necesario disponer de datos numéricos y realizar los cálculos.

15.5. En una expansión isotérmica y reversible de un gas ideal la variación de entropía:

a) Es nula.

b) Es positiva.

c) Es negativa.

d) Es independiente de la masa de gas.

15.6. En un sistema aislado se cumple:

a) En cualquier proceso la entropía del sistema siempre disminuye.

b) La entropía del sistema únicamente disminuye en un proceso reversible.

c) En un proceso irreversible la entropía del sistema siempre aumenta.

d) Puede suceder que en un proceso irreversible disminuya la energía del sistema.

15.7. Un mol de un gas ideal experimenta un cambio desde el estado 1 al estado 2 siguiendo un proceso reversible. Otro mol del mismo gas pasa del estado 1 al estado 2, pero siguiendo un proceso irreversible. La variación de entolpía:

a) Será mayor en el caso del proceso reversible.

b) Será igual en los dos procesos.

c) Será mayor en el caso del proceso irreversible.

d) No se puede comparar la variación de entropía entre estos procesos si no se conocen más datos.

15.8. En un proceso adiabático reversible siempre se cumple:

a) $Q = 0$; $W = 0$

b) $\Delta U = 0$; $Q \neq 0$

c) $\Delta S = 0$, $\Delta T = 0$

d) $\Delta S = 0$, $Q = 0$

15.9. Cuando 0,500 kg de agua pasan a vapor a la presión normal su entropía se incrementa en 3 029 J/K. El calor latente de vaporización del agua es:

a) 4,18 kJ/kg

b) 546 kJ/kg

c) $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg

d) $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg

15.10. En la compresión isotérmica de un gas ideal:

a) Disminuye el desorden y aumenta la entropía.

b) La entropía no varía.

c) Aumenta el desorden y disminuye la entropía.

d) Disminuye el desorden y disminuye la entropía.

15.11. En un sistema aislado:

a) Se conserva la energía y la entropía.

b) Se conserva la energía, pero la entropía tiende a disminuir.

c) Siempre aumenta la energía y la entropía.

d) Se conserva la energía y la entropía no puede disminuir.

15.12. Un ciclo de Carnot recibe una cantidad de calor Q_c de un foco que se encuentra a la temperatura T_c y cede una cantidad Q_f al foco frío que se encuentra a una temperatura T_f. La variación de entropía del universo, ΔS, cumple:

a) $\Delta S > 0$

b) $\Delta S < 0$

c) $\Delta S = 0$

d) $\Delta S > 0$ o $\Delta S < 0$, según sea la relación entre T_c y T_f

15.13. Un ciclo de potencia irreversible recibe una cantidad de calor Q_c de un foco que se encuentra a la temperatura T_c y cede una cantidad Q_f al foco frío que se encuentra a una temperatura T_f. La variación de entropía del universo, ΔS, cumple:

a) $\Delta S > 0$

b) $\Delta S < 0$

c) $\Delta S = 0$

d) $\Delta S > 0$ o $\Delta S < 0$, según sea la relación entre T_c y T_f

15.14. Para calentar 1,00 kg desde 273 K hasta 373 K se pone en contacto con un número infinito de fuentes entre 273 K y 373 K. Podemos afirmar:

a) La variación de entropía del agua es nula.

b) La variación de entropía de las fuentes es nula.

c) La variación de entropía del universo es nula.

d) La variación de entropía del universo es 1,30 kJ/K.

SOLUCIONES

15.1. *b)*
15.2. *c)*
15.3. *d)*
15.4. *c)*
15.5. *b)*

15.6. *c)*
15.7. *b)*
15.8. *d)*
15.9. *c)*
15.10. *d)*

15.11. *d)*
15.12. *c)*
15.13. *a)*
15.14. *c)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

MÁQUINAS TÉRMICAS

1 **Una máquina térmica que desarrolla un ciclo de potencia reversible opera entre una temperatura de 500 K y una temperatura de 300 K. El trabajo en un ciclo es de 480 kJ. Determinar:**

a) El rendimiento del ciclo.

b) La energía mediante calor que recibe del foco caliente.

c) El calor transferido al foco frío.

Sol.: a) 40,0 %; *b)* 1 200 kJ; *c)* 720 kJ

2 **Se desea convertir 1,20 kg de agua a 21,0 °C en hielo a −5,0 °C, para ello se utiliza un refrigerador que tiene una eficiencia igual a 3,40.**

a) Determinar la energía mediante calor que debe extraerse del agua.

b) Calcular el trabajo que necesita el congelador para efectuar esta operación.

c) Resolver la cuestión *b)* suponiendo que el ciclo de refrigeración es reversible y que la temperatura exterior es de 26,0 °C. Calor latente de fusión del hielo $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg, calor específico del hielo 2 090 J/(kg · K).

Sol.: a) 519 kJ; *b)* 153 kJ; *c)* 45,9 kJ

3 **El folleto de instrucciones de una bomba de calor dice que, con una potencia de 2,20 kW, la bomba puede mantener una temperatura de 20 °C, cuando la temperatura exterior es de −10 °C, para ello suministra $3{,}5 \cdot 10^6$ kJ de calor por día. ¿Es aceptable la información de este folleto o se trata de un error?**

Sol.: Se trata de un error, tendría una eficiencia superior a un ciclo reversible.

4 **Un sistema de refrigeración, que opera según un ciclo de Carnot invertido, debe mantener un congelador a una temperatura de −20 °C, situado en una habitación cuya temperatura es de 25 °C. Cada minuto extrae 10 kJ del refrigerante, con una eficiencia del 50 % de su eficiencia máxima. ¿Qué potencia se necesita para que funcione este sistema?**

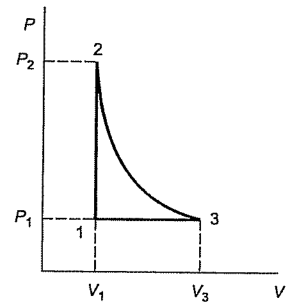
Sol.: 59 W

5 **Si 0,200 mol de un gas ideal diatómico, $\gamma = 1{,}40$, que ocupan un volumen de 4,50 dm³ a una temperatura de 300 K, experimentan el ciclo de la figura que consta de los siguientes procesos:**

Proceso 1-2. Calentamiento del gas a volumen constante hasta alcanzar una temperatura de 600 K.

Proceso 2-3. Compresión adiabática hasta que la temperatura desciende a 456 K.

Proceso 3-1. Enfriamiento isobárico, en el que se recuperan las condiciones iniciales.



Determinar:

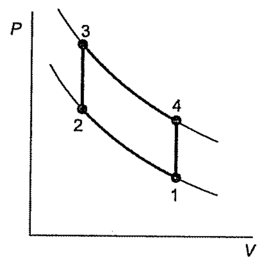
a) La transferencia de energía mediante calor y mediante trabajo en cada uno de los procesos.

b) La variación de energía interna en cada proceso.

c) El rendimiento del ciclo.

Sol.: a) $Q_{12} = 1{,}25 \cdot 10^3$ J, $W_{12} = 0$, $Q_{23} = 0$, $W_{23} = 598$ J, $Q_{31} = -907$ J, $W_{31} = -259$ J;
b) $\Delta U_1 = 1{,}25 \cdot 10^3$ J, $\Delta U_2 = -598$ J, $\Delta U_3 = -648$ J; *c)* 27,2 %

6 **La figura representa un ciclo de Stirling. Este ciclo consta de cuatro procesos reversibles: los procesos 1-2 y 3-4 son isotérmicos a las temperaturas T_f y T_c, respectivamente, y los procesos 2-3 y 4-1 son isocóricos. Un dispositivo, denominado regenerador, almacena todo el calor cedido en el proceso 4-1 y es absorbido en el proceso 2-3. Suponiendo que opera con un gas ideal, demostrar que el rendimiento de este ciclo es igual que el de un ciclo de Carnot.**



7 **1,20 mol de aire realizan un ciclo de Stirling. Al comienzo de la compresión el volumen es V_1 = 30,0 dm³ y la presión es P_1 = 101 kPa. Una vez comprimido el gas el volumen es V_2 = 5,00 dm³. La expansión isotérmica tiene lugar a 1 000 K. Determinar:**

a) El trabajo del ciclo.

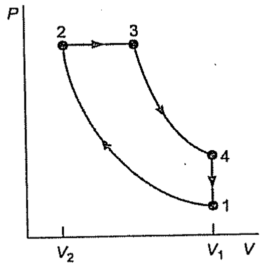
b) El rendimiento.

Sol.: a) 12,4 kJ; *b)* 69,6 %

8 **La figura representa el ciclo Diesel. Este ciclo consiste en una expansión adiabática, proceso 1-2; un calentamiento a presión constante, proceso 2-3; una expansión adiabática, proceso 3-4; y un enfriamiento a volumen constante, proceso 4-1. Suponiendo que el proceso es reversible y que el gas, aire, se comporta de forma ideal, demostrar que el rendimiento es:**

$$\eta = 1 - \frac{(V_3/V_1)^{\gamma} - (V_2/V_1)^{\gamma}}{\gamma\,[(V_3/V_1) - (V_2/V_1)]}$$

En los motores Diesel reales, el aire es comprimido hasta que alcanza una presión y una temperatura tales que al inyectar el combustible tiene lugar espontáneamente la combustión.



9 **Al iniciar la compresión de un ciclo Diesel de aire, se cumple $P_1 = 100$ kPa, $V_1 = 16{,}0$ dm^3 y $T_1 = 300$ K, al final de la compresión adiabática $V_2 = 0{,}800$ dm^3. Después del calentamiento a presión constante, alcanza la temperatura máxima $T_3 = 1\,900$ K. Suponiendo que el aire tiene un comportamiento ideal y que $\gamma = 1{,}40$, $C_v = 5/2\,R$ y $C_p = 7/2\,R$. Determinar:**

a) La presión, el volumen y la temperatura al final de cada proceso.

b) La energía intercambiada mediante calor y mediante trabajo en cada proceso.

c) El rendimiento.

Sol.: *a)* $P_2 = 6{,}63$ MPa, $T_2 = 994$ K, $P_3 = 6{,}63$ MPa, $V_3 = 1{,}53$ dm^3, $P_4 = 248$ kPa, $T_4 = 743$ K;
b) $W_{12} = -9{,}26$ kJ, $Q_{12} = 0$, $W_{23} = 4{,}83$ kJ, $Q_{23} = 16{,}9$ kJ, $W_{34} = 15{,}4$ kJ, $Q_{34} = 0$, $W_{41} = 0$, $Q_{41} = -5{,}90$ kJ;
c) 65,1 %

VARIACIÓN DE ENTROPÍA

10 **Calcular la variación de entropía de 0,600 kg de agua a 100 °C y a la presión atmosférica que se transforman en vapor a la misma temperatura. Calor latente de vaporización del agua $2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg.**

Sol.: 3,63 kJ/K

11 **Se calienta, mediante una gran fuente térmica que está a 100,0 °C, 1,00 kg de agua que se encuentra a 20,0 °C hasta 100,0 °C. Determinar la variación de entropía:**

a) Del agua.

b) De la fuente.

c) Del universo. Suponer que la temperatura de la fuente permanece constante.

Sol.: *a)* 1,01 kJ/K; *b)* −0,896 kJ/K; *c)* 0,112 kJ/K

12 **Se introducen 100 mol de hielo a 260,0 K en un recipiente térmicamente aislado que contiene 200 mol de agua a 350,0 K a la presión atmosférica. Determinar:**

a) La temperatura de equilibrio.

b) La variación de entropía del hielo, la variación de entropía del agua y la del conjunto.

Capacidad calorífica molar del hielo 37,62 J/(K · mol); calor latente fusión del hielo 6 012 J/mol, capacidad calorífica molar del agua 75,24 J/(K · mol).

Sol.: *a)* 296 K; *b)* $\Delta S_{\text{hielo}} = 2{,}98$ kJ/K, $\Delta S_{\text{agua}} = 2{,}55$ kJ/K, $\Delta S_{\text{total}} = 430$ J/K

13 **0,450 mol de un gas ideal que se encuentran a 300 K experimentan una expansión isotérmica y reversible de forma que su volumen se quintuplica. Determinar:**

a) El trabajo de expansión.

b) El calor que ha recibido.

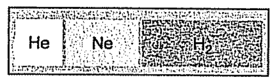
c) La variación de energía interna.

d) La variación de entropía.

Sol.: *a)* 1,81 kJ; *b)* 1,81 kJ; *c)* 0; *d)* 6,02 J/K

14 **Tres recipientes están separados por unas membranas, el primero contiene 200 cm^3 de helio, el segundo 300 cm^3 de neón y el tercero 500 cm^3 de hidrógeno; todos ellos se encuentran en condiciones normales, presión $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, y temperatura 273 K. Se rompen las membranas que separan los recipientes y, al ponerse en comunicación se mezclan los gases. La temperatura y la presión permanecen constantes en el proceso. Suponiendo comportamiento ideal, determinar la variación de entropía.**

Sol.: 0,382 J/K



15 **Un cilindro provisto de un émbolo contiene 0,175 mol de hidrógeno (H_2) a una temperatura 278 K y se calienta manteniendo la presión constante hasta una temperatura de 528 K. Determinar:**

a) El calor que ha recibido el gas.

b) La variación de energía interna.

c) El trabajo de expansión.

d) La variación de entropía. Suponer que el hidrógeno se comporta de forma ideal.

Sol.: *a)* 1,27 kJ; *b)* 909 J; *c)* 363 J; *d)* 3,27 J/K

16 **Un cilindro provisto de un émbolo contiene 0,536 mol de un gas ideal que ocupan un volumen V. El gas se comprime lentamente a temperatura constante hasta que el volumen se reduce a $V/3$. Calcular la variación de entropía. ¿El desorden del gas aumenta o disminuye como consecuencia de la compresión?**

Sol.: −4,89 J/K; disminuye

17 **Calcular la variación de entropía de 1,00 mol de helio que se encuentra a una presión de 101 kPa y una temperatura de 273 K cuando pasa a una temperatura 300 K y una presión de 303 kPa.**

Sol.: −7,17 J/K

18 **Se calientan 0,200 mol de un gas ideal monoatómico que inicialmente ocupa un volumen de 25,0 dm³ a una presión 101 kPa hasta que alcanza un volumen de 40,0 dm³ a una presión 202 kPa. ¿Cuál será la variación de entropía de este gas?**

Sol.: 3,68 J/K

19 **1,00 mol de hidrógeno, H_2, que se encuentra a una temperatura de 300 K y una presión de 1010 kPa, experimenta dos procesos reversibles, el primero es un proceso isocórico en el que la presión se reduce a 101 kPa, el segundo es un proceso isobárico en el que el hidrógeno recupera la temperatura inicial. ¿Cuál es la variación de entropía del hidrógeno?**

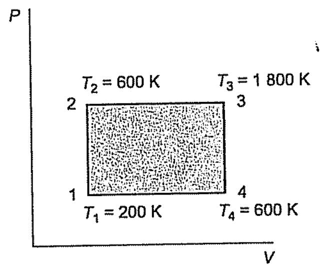
Sol.: 19,1 J/K

20 **0,200 mol de un gas ideal monoatómico experimentan el ciclo de la figura. Determinar:**

a) La variación de entropía de cada proceso.

b) La variación de entropía total del ciclo.

Sol.: *a)* $\Delta S_{12} = 2{,}74$ J/K, $\Delta S_{23} = 4{,}56$ J/K, $\Delta S_{34} = -2{,}74$ J/K, $\Delta S_{41} = -4{,}56$ J/K; *b)* $\Delta S = 0$



PARTE III

ELECTROMAGNETISMO

CAPÍTULO

16

ELECTROSTÁTICA. CAMPO ELÉCTRICO

16.1. INTRODUCCIÓN

La electrostática es la rama de la Física que estudia el comportamiento y los fenómenos originados por las cargas en reposo. En la naturaleza hay dos tipos de cargas: las *cargas positivas* y las *cargas negativas*.

La materia está formada por partículas con cargas positivas (protones), negativas (electrones) además de otras partículas cuya carga neta es nula (neutrones).

En el sistema internacional la unidad de carga es el Coulomb (C).

La carga eléctrica elemental, e, tiene un valor:

$$e = 1{,}67 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

En valor absoluto, la carga de un protón y un electrón es idéntica. Así los cuerpos que no tienen carga, en realidad lo que tienen es igual número de electrones que de protones.

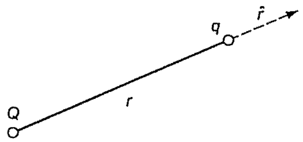
La carga de un protón es precisamente la carga eléctrica elemental e.

La carga de cualquier cuerpo es un múltiplo (entero) de la carga eléctrica elemental:

$$Q = z \cdot e \qquad (z \in Z)$$

La fuerza que una carga puntual ejerce sobre otra carga se puede determinar mediante la *Ley de Coulomb*. La fuerza que una carga Q ejerce sobre una carga q es:

$$\vec{F} = k\frac{Q \cdot q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q \cdot q}{r^2}\hat{r}$$



k es la constante de Coulomb y su valor es $8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$. Para realizar cálculos, se tomará el valor con dos cifras significativas: $9{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$.
ε_0 es la permitividad eléctrica en el vacío. Su valor es $8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$.
Q y q son los valores de las cargas expresado en culombios.
r es la distancia de separación entre las cargas. Se expresa en metros.
$\hat{r}$ es el vector unitario que especifica la dirección de Q a q.

La ley de Coulomb cumple el principio de *superposición*: si se desea determinar la fuerza que varias cargas ejercen sobre una única carga testigo, hay que calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la carga testigo como si no estuvieran las restantes, la fuerza neta o fuerza resultante se obtiene al sumar vectorialmente las fuerzas que se han calculado por separado.

16.2. CAMPO ELÉCTRICO Y ACCIÓN A DISTANCIA

Una forma de interpretar la acción a distancia entre cargas, donde la fuerza se aplica sin necesidad de que exista un medio material para transmitirla, es mediante el concepto de campo eléctrico E.

$$\vec{F} = k\frac{Q \cdot q}{r^2}\hat{r} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} \cdot q = \vec{E} \cdot q \qquad \text{donde} \qquad \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Esta expresión permite calcular el campo eléctrico creado por una carga puntual.
Se considera que cualquier carga crea un campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Si una carga se sitúa en un punto de un campo eléctrico determinado, la fuerza que se ejerce sobre esta carga testigo se obtiene multiplicando el campo eléctrico en ese punto por el valor de la carga afectado por su signo.
En el sistema internacional, la unidad de campo eléctrico es N/C.
Conviene tener presente que el campo eléctrico es un vector y que cumple el principio de superposición, es decir, para calcular el campo eléctrico debido a un sistema de cargas, hay que sumar los campos que crearían cada una de las cargas independientemente de la presencia de las otras.

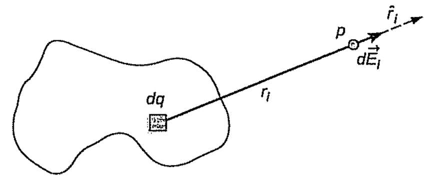
CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Las expresiones anteriores son válidas en el caso de cargas puntuales. Si se tiene un objeto cargado que no se puede reducir a una carga puntual, hay que descomponer este objeto en elementos infinitesimales. Cada uno de estos elementos infinitesimales contiene un diferencial de carga que se comporta

como si fuese una carga puntual. Cada uno de estos diferenciales de carga creará en cualquier punto del espacio un campo eléctrico. Aplicando el principio de superposición al conjunto de los elementos en los que hemos supuesto descompuesto el objeto, el campo eléctrico total creado en un punto del espacio por este objeto, se obtiene al sumar vectorialmente todos los campos eléctricos creados por cada uno de los diferenciales de carga.

$$d\vec{E}_i = k\frac{dq_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

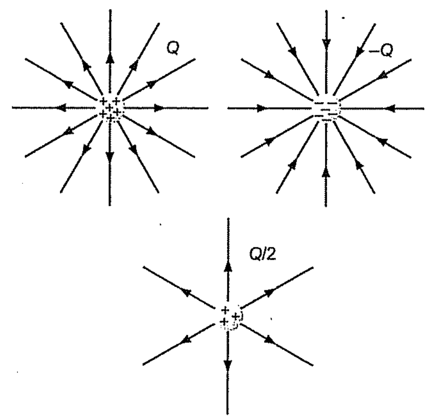
$$\vec{E} = \int d\vec{E}_i = \int k\frac{dq_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$



Líneas de campo eléctrico

Las líneas de campo eléctrico son una herramienta adecuada para representar los campos eléctricos. De una forma gráfica permiten representar o visualizar campos eléctricos creados por cargas o sistemas de cargas.
Por la propia definición del campo eléctrico, las líneas de campo tienen las siguientes propiedades:

1) Las líneas de campo eléctrico tienen su origen en las cargas positivas y su final en las cargas negativas, o el infinito.
2) El número de líneas de campo que salen (o entran) de un objeto cargado, es proporcional a la carga del objeto.
3) Las líneas de campo eléctrico salen (o entran) perpendiculares a la superficie del objeto cargado.
4) La densidad de líneas de campo eléctrico en un punto es proporcional a la intensidad del campo eléctrico en ese punto.
5) No puede haber dos líneas de campo eléctrico que se crucen entre sí.



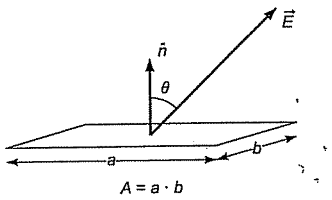
ELÉCTRICO

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie plana es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie. Se define como el producto escalar del campo eléctrico y la superficie:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot A = E \cdot A \cdot \cos\theta$$

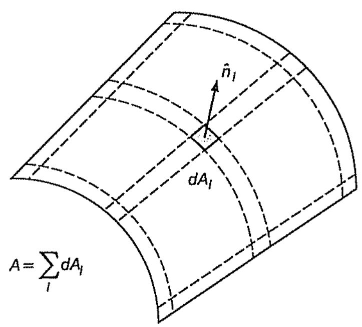
Donde θ es el ángulo formado entre los vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$.

En el sistema internacional, la unidad del flujo de campo eléctrico es $N \cdot m^2/C$.



Para determinar el flujo de campo eléctrico a través de una superficie que no es plana, hay que dividir la superficie en pequeños elementos que se puedan considerar perfectamente planos, calcular el pequeño flujo ($d\Phi$) en cada uno de estos pequeños elementos y a continuación sumar todos los flujos.

$$\Phi_E = \int d\Phi = \int \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA$$



16.4. LEY DE GAUSS

La ley de Gauss relaciona el flujo de campo eléctrico a través de una superficie que encierra un volumen con la carga neta que hay confinada en dicho volumen. Matemáticamente se expresa como:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = \frac{Q_{Neta}}{\varepsilon_0}$$

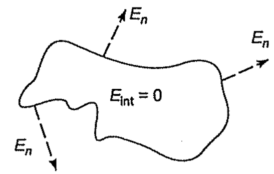
16.5. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Los materiales se clasifican en conductores o aislantes. Los conductores tienen la propiedad de permitir el movimiento de cargas en su seno. A pesar de que esta clasificación depende fuertemente de la temperatura, supondremos que se realiza para temperaturas próximas a la que hay en condiciones normales (20 °C).

Las características que definen un conductor en equilibrio electrostático son:

1.° El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático, cargado o no, es nulo.

2.° El campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es perpendicular a la superficie punto a punto y su valor es $\vec{E}_n = \frac{\sigma_{local}}{\varepsilon_0}\hat{n}$, donde σ_{local} es la densidad superficial de carga en el punto del conductor próximo a la posición donde se mide el campo eléctrico.

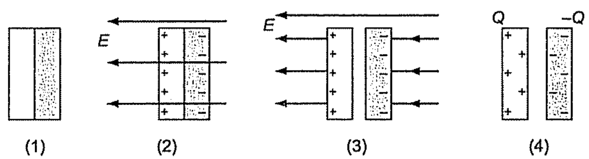


16.6. CARGA POR INDUCCIÓN

Si un conductor se encuentra inmerso en un campo eléctrico, las cargas móviles del conductor se redistribuirán rápidamente para alcanzar de nuevo el equilibrio electrostático ($E_{int} = 0$).

Esta cualidad permite cargar conductores por inducción:

Sean dos bloques conductores descargados iguales (1). Si se sitúan en un campo eléctrico, sus cargas se redistribuirán de forma que el campo eléctrico en su interior sea nulo (2). Con el campo aplicado se separan los conductores entre sí (3). Si se suprime el campo eléctrico externo, los dos bloques quedan con cargas idénticas pero diferente signo (4):

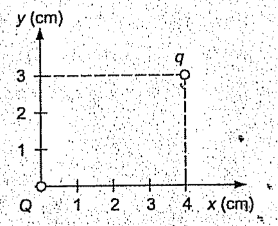


PROBLEMAS RESUELTOS

16.1. Un sistema de cargas puntuales está formado por dos cargas Q y q. La posición de las cargas puntuales se muestra en la figura adjunta. Sus valores son: $Q = 4{,}0\ \mu C$ y $q = 2{,}0\ \mu C$. Determinar:

a) La fuerza electrostática ejercida por Q sobre q.

b) La fuerza electrostática ejercida por q sobre Q.

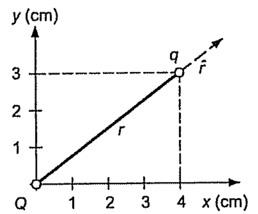


Solución

a) La ley de Coulomb permite determinar la fuerza que la carga Q ejerce sobre la carga q. Para ello es necesario identificar los términos que aparecen en la fórmula:

$$\vec{F} = k\frac{Q \cdot q}{r^2}\hat{r} \qquad (1)$$

- r es la distancia entre las dos cargas. En la figura se puede comprobar que en este caso es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de 3,0 cm y 4,0 cm. Por tanto, $r = 5{,}0$ cm.
- $\hat{r}$ es el vector unitario que especifica la dirección y sentido entre las posiciones (0,0) y (4,0 cm, 3,0 cm).



Determinación del vector unitario:

Sea:

$$\vec{r} = (4{,}0\text{ cm} - 0{,}0)\,\hat{\imath} + (3{,}0\text{ cm} - 0{,}0)\,\hat{\jmath} = 4{,}0\text{ cm}\,\hat{\imath} + 3{,}0\text{ cm}\,\hat{\jmath}$$

Y su módulo:

$$r = \sqrt{(4{,}0\text{ cm})^2 + (3{,}0\text{ cm})^2} = \sqrt{25\text{ cm}^2} = 5{,}0\text{ cm}$$

Como por definición el vector unitario es:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{entonces} \quad \hat{r} = \frac{4{,}0\text{ cm}\,\hat{\imath} + 3{,}0\text{ cm}\,\hat{\jmath}}{5{,}0\text{ cm}} = \frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}$$

Cálculo de la fuerza electrostática:

Sustituimos en (1):

$$\vec{F} = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ C} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{(5{,}0 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2}\left(\frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}\right) = \frac{720}{25}\text{ N}\left(\frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{F} = 23\text{ N}\,\hat{\imath} + 17\text{ N}\,\hat{\jmath}$$

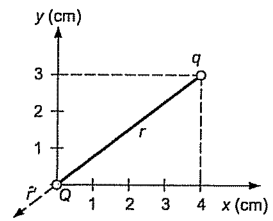
b) Hay dos caminos para resolver este apartado:

*b*1) La forma más rápida es aplicando la tercera ley de Newton. Si en el apartado *a)* se calculó la fuerza que la carga Q ejerce sobre la carga q, la fuerza, F', que q ejerce sobre Q será:

$$\vec{F}' = -23\text{ N}\,\hat{\imath} - 17\text{ N}\,\hat{\jmath}$$

*b*2) Se aborda de igual forma que en el apartado *a)*. Se identifican los términos que aparecen en la ley de Coulomb:

- r es la distancia entre las dos cargas. Ya se calculó en el apartado *a)* obteniéndose el resultado $r = 5{,}0$ cm.
- $\hat{r}'$ es el vector unitario que especifica la dirección entre las posiciones (4,0 cm, 3,0 cm) y (0,0).



El valor de este vector unitario es:

$$\hat{r}' = -\frac{4}{5}\hat{\imath} - \frac{3}{5}\hat{\jmath}$$

Sustituimos en (1):

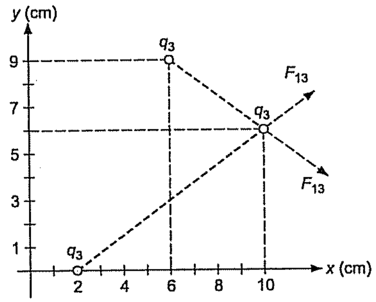
$$\vec{F} = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ C} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{(5{,}0 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2}\left(-\frac{4}{5}\hat{\imath} - \frac{3}{5}\hat{\jmath}\right) = -\frac{720}{25}\text{ N}\left(\frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{F} = -23\text{ N}\,\hat{\imath} - 17\text{ N}\,\hat{\jmath}$$

16.2. Un sistema está formado por tres cargas puntuales $q_1 = -40\ \mu C$, $q_2 = 20\ \mu C$ y $q_3 = 20\ \mu C$ que se encuentran en las posiciones (2,0 cm, 0,0), (6,0 cm, 9,0 cm) y (10 cm, 6,0 cm) respectivamente. Determinar la fuerza que q_1 y q_2 ejercen sobre la carga q_3.

Solución

En este ejercicio se aplicará el principio de superposición. Se determina la fuerza que q_1 ejerce sobre q_3 como si no estuviera presente q_2. Seguidamente se determina la fuerza que q_2 ejerce sobre q_3 como si no estuviera presente q_1. La fuerza total sobre la carga q_3 es la suma vectorial de las dos fuerzas calculadas.



1.°) Fuerza que la carga q_1 ejerce sobre la carga q_3, F_{13}.

Se identifican los términos que aparecen en la ley de Coulomb:

- r_{13} es la distancia entre las cargas q_1 y q_3. Su valor es $r_{13} = 10$ cm.
- $\hat{r}_{13}$ es el vector unitario que especifica la dirección entre las posiciones de las cargas q_1 (2,0 cm, 0,0) y q_3 (10 cm, 6,0 cm). El valor de este vector unitario es:

$$\hat{r}_{13} = \frac{8}{10}\,\hat{i} + \frac{6}{10}\,\hat{j}$$

El valor de la fuerza F_{13} es:

$$\vec{F}_{13} = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-40 \cdot 10^{-6}\,\text{C}) \cdot (20 \cdot 10^{-6}\,\text{C})}{(10 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}\left(\frac{8}{10}\,\hat{i} + \frac{6}{10}\,\hat{j}\right) = -720\,\text{N}\left(\frac{8}{10}\,\hat{i} + \frac{6}{10}\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_{13} = -0{,}576 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{i} - 0{,}432 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{j}$$

2.°) Fuerza que la carga q_2 ejerce sobre la carga q_3, F_{23}.

Se identifican los términos que aparecen en la ley de Coulomb:

- r_{23} es la distancia entre las cargas q_2 y q_3. Su valor es $r_{23} = 5{,}0$ cm.
- $\hat{r}_{23}$ es el vector unitario que especifica la dirección entre las posiciones de las cargas q_2 (6,0 cm, 9,0 cm) y q_3 (10 cm, 6,0 cm). El valor de este vector unitario es:

$$\hat{r}_{23} = \frac{4}{5}\,\hat{i} - \frac{3}{5}\,\hat{j}$$

El valor de la fuerza F_{23} es:

$$\vec{F}_{23} = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(20 \cdot 10^{-6}\,\text{C}) \cdot (20 \cdot 10^{-6}\,\text{C})}{(5{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}\left(\frac{4}{5}\,\hat{i} - \frac{3}{5}\,\hat{j}\right) = 1{,}44 \cdot 10^3\,\text{N}\left(\frac{4}{5}\,\hat{i} - \frac{3}{5}\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_{23} = 1{,}15 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{i} - 0{,}864 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{j}$$

La fuerza total es la suma de las dos fuerzas:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (-0{,}576 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{i} - 0{,}432 \cdot 10^3\,n\,\hat{j}) + (1{,}15 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{i} - 0{,}864 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{j})$$

$$\vec{F}_T = (0{,}576 \cdot 10^3\,\text{N}\,\hat{i} - 1{,}30 \cdot 10^3\,N\,\hat{j})$$

El módulo de la fuerza resultante es:

$$F_T = \sqrt{(0{,}576 \cdot 10^3\,\text{N})^2 + (1{,}30 \cdot 10^3\,\text{N})^2} = \sqrt{2{,}02 \cdot 10^6\,\text{N}^2} = 1{,}4 \cdot 10^3\,\text{N}$$

16.3. Dos cargas q_1 y q_2 se encuentran separadas una distancia d. Se aproximan las cargas hasta quedar separadas una distancia $d/10$. Determinar en cuánto aumenta el valor de la fuerza entre cargas.

Solución

Sea F_0 la fuerza que se ejercen las cargas cuando están separadas una distancia d:

$$F_0 = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

Sea F la fuerza que se ejercen las cargas cuando se aproximan hasta una distancia $d/10$:

$$F = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{(d/10)^2} = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2/10} = 100 \cdot k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = 100\,F_0$$

Al reducir la distancia en un factor 10, la fuerza aumenta en un factor 100.

16.4. Dos cargas idénticas, Q, se encuentran separadas una distancia vertical $2d$. En la mediatriz de la línea que une las dos cargas, pero alejada una distancia x de esta línea, se coloca una carga, q, de signo contrario al de Q.

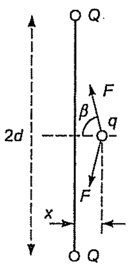
a) Determinar la fuerza aplicada sobre la carga q.

b) Demostrar que si la carga q se desplaza una distancia $x << d$, y se la deja evolucionar libremente, describe un movimiento armónico simple (MAS).

c) Determinar la frecuencia de oscilación del movimiento resultante. Efectuar el cálculo numérico con los datos: $d = 10$ cm, $Q = 20\,\mu$C y $q = -10\,\mu$C.

Solución

a) Conviene en este caso hacer un dibujo orientativo.



En la figura puede observarse que las dos cargas Q realizan sendas fuerzas atractivas. Aplicando la ley de Coulomb se determina la fuerza que las cargas Q ejercen sobre q.

La fuerza que la carga Q del extremo superior ejerce sobre la carga q es:

$$\vec{F} = -k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2}\,\hat{r}$$

$|Q|$ y $|q|$ representan respectivamente los módulos de las cargas Q y q.

Las componentes verticales y horizontales de la fuerza F_Q son:

Componente horizontal:

$$F_x = -k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \cos\beta = -k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \frac{x}{(d^2 + x^2)^{1/2}}$$

Componente vertical:

$$F_y = k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \text{sen}\,\beta = k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \frac{d}{(d^2 + x^2)^{1/2}}$$

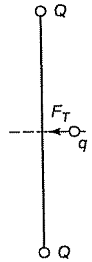
Realizando el mismo proceso con la carga inferior se obtiene:

Componente horizontal:

$$F_x = -k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \cos\beta = -k\,\frac{|Q| \cdot |q|}{d^2 + x^2} \cdot \frac{x}{(d^2 + x^2)^{1/2}}$$

Componente vertical:

$$F_y = k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^2+x^2}\cdot \operatorname{sen}\beta = k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^2+x^2}\cdot\frac{d}{(d^2+x^2)^{1/2}}$$



Dada la simetría del problema, se puede comprobar que las componentes verticales de las fuerzas se cancelan mientras que las componentes horizontales se suman. La fuerza resultante tiene sólo dirección paralela al eje horizontal y su valor es:

$$F_T = 2\cdot F_x = 2\cdot k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^2+x^2}\cdot\frac{x}{(d^2+x^2)^{1/2}}$$

b) Si se tiene en cuenta el dato del enunciado que indica que $x<<d$, entonces $(x^2+d^2)\approx d^2$ y la fuerza resultante se reduce a:

$$F_T = 2\cdot F_x = -2\cdot k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^3}\cdot x = -\,C^2\cdot x \qquad \text{donde}\qquad C^2 = 2\cdot k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^3}$$

Se comprueba que la fuerza es proporcional al desplazamiento desde la posición de equilibrio, con una constante de proporcionalidad negativa. Por tanto, el movimiento subsiguiente de la carga q será un movimiento armónico simple.

c) Si se compara con la expresión de la fuerza de un MAS, $F = -\,\omega^2 x$, donde ω es la frecuencia natural de oscilación del MAS, se obtiene:

$$\omega^2 = 2\cdot k\,\frac{|Q|\cdot|q|}{d^3}$$

Sustituyendo los valores numéricos: $\omega = 60$ rad/s

16.5. Un electrón ($e^- = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C) que se mueve con velocidad $v = 2{,}0$ m · s^{-1} $\hat{\imath}$, entra en una región en la que hay un campo electrostático uniforme $E = -2{,}0\cdot10^4$ N/C $\hat{\jmath}$. Calcular:

a) La fuerza electrostática que experimentará el electrón.

b) La aceleración del electrón, si su masa es $m_{e^-} = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg.

Solución

a) La fuerza que experimenta una carga que se halla en un campo eléctrico es $\vec{F} = \vec{E}\cdot q$.

Por tanto, la fuerza que experimentará el electrón será:

$$\vec{F} = -2{,}0\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{\jmath}\cdot(-1{,}6\cdot10^{-19}\text{ C}) = 3{,}20\cdot10^{-15}\text{ N}\,\hat{\jmath}$$

b) A pesar de que la fuerza ejercida sobre el electrón es muy pequeña, debido a su pequeñísima masa, el electrón sufrirá una aceleración muy elevada:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3{,}20\cdot10^{-15}\,N\,\hat{\jmath}}{9{,}1\cdot10^{-31}\text{ kg}} = 3{,}5\cdot10^{15}\text{ m/s}^2\,\hat{\jmath}$$

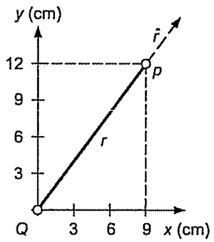
Para comprender lo extremadamente elevada que es esta aceleración, valga tener en cuenta que si la aceleración de la gravedad tuviera este valor, un objeto que se dejara caer desde lo alto de un edificio de 400 m de altura, partiendo del reposo, tardaría unos 0,48 μs en llegar a tierra, cuando en realidad tarda algo más de 9,0 segundos (un tiempo 18 millones de veces superior).

16.6. Una carga de 40 μC se halla en el origen de coordenadas. Determinar el campo eléctrico en el punto p (9,0 cm, 12 cm).

Solución

Aplicamos la expresión de campo eléctrico creado por una carga puntual:

$$\vec{E}_p = k\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}$$



Donde $r = 15$ cm y

$$\hat{r} = \frac{9}{15}\,\hat{\imath} + \frac{12}{15}\,\hat{\jmath} = \frac{3}{5}\,\hat{\imath} + \frac{4}{5}\,\hat{\jmath}$$

El valor del campo eléctrico en el punto p, E_P, es:

$$\vec{E}_p = 9{,}0\cdot10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{40\cdot10^{-6}\text{ C}}{(15\cdot10^{-2}\text{ m})^2}\left(\frac{3}{5}\,\hat{\imath}+\frac{4}{5}\,\hat{\jmath}\right) = 1{,}6\cdot10^7\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\left(\frac{3}{5}\,\hat{\imath}+\frac{4}{5}\,\hat{\jmath}\right)$$

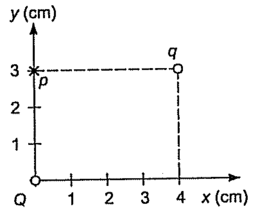
$$\vec{E}_p = 9{,}6\cdot10^6\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{\imath} + 13\cdot10^6\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{\jmath}$$

$$E_p = 16\cdot10^6\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

16.7. Dado el sistema de cargas del Problema 16.1, calcular el campo eléctrico que dicho sistema de cargas genera en el punto p (0,0, 3,0 cm).

Solución

Para determinar el campo eléctrico en el punto p se debe calcular el campo eléctrico que cada carga crea por separado en dicho punto. Recordemos que el sistema de cargas está compuesto por dos cargas Q y q de 4,0 μC y 2,0 μC respectivamente.



1.°) El campo que crea una carga puntual viene dado por:

$$\vec{E}_p = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Por tanto, el campo creado por q en p es:

$$\vec{E}_q = -\,9{,}0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2}\,\hat{i} = -1{,}1 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\hat{i}$$

2.°) Campo creado por Q en P:

$$\vec{E}_Q = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{4{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{(3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2}\,\hat{j} = 4{,}0 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\hat{j}$$

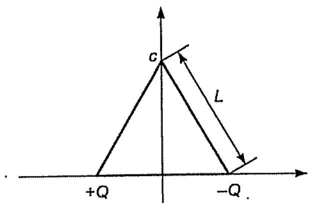
3.°) Campo resultante:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_q + \vec{E}_Q = -1{,}1 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\hat{i} + 4{,}0 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,\hat{j}$$

16.8. Dos cargas puntuales $+Q$ y $-Q$, de igual valor y distinto signo, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. Determinar el campo eléctrico en el vértice libre del triángulo.

Solución

Para resolver este problema, se va a colocar el triángulo sobre un sistema de ejes de coordenadas de forma que el lado del triángulo que une las dos cargas coincida con el eje horizontal y que el eje vertical pase por el vértice libre del triángulo (ver figura adjunta):

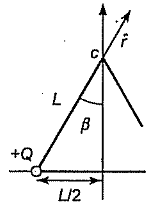


Como en el ejercicio anterior, se procede a calcular el campo aplicando el principio de superposición:

1.°) Campo creado por la carga positiva en el vértice c:

La mayor dificultad en determinar el campo creado por Q radica en hallar el vector unitario $\hat{r}$. Como el módulo de $\hat{r}$ es la unidad, podemos expresarlo en función de sus componentes de la siguiente forma:

$$\hat{r} = \operatorname{sen}\beta\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j}$$



Donde es preciso expresar sen β y cos β en función de L, que es el dato del problema:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2}$$

De igual forma, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo resultante al dividir en dos el triángulo equilátero con el eje vertical, se obtiene que:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}\,L/2}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Resultado al que se podría haber llegado antes teniendo en cuenta que un triángulo equilátero tiene tres ángulos iguales de 60° y por tanto $\beta = 30°$).

Así el vector unitario es:

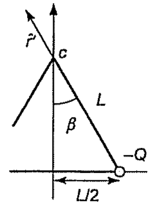
$$\hat{r} = \frac{1}{2}\,\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{j}$$

Y el campo eléctrico en el punto c es:

$$\vec{E}_c = k\frac{Q}{L^2}\,\hat{r} = k\frac{Q}{L^2}\left(\frac{1}{2}\,\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{j}\right)$$

2.°) Campo creado por la carga negativa en el vértice c:

De nuevo hay que hallar el vector unitario $\hat{r}'$. Viendo la figura, se puede comprobar que el vector unitario tiene las siguientes componentes:



$$\hat{r}' = -\operatorname{sen}\beta\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j}$$

Como ya conocemos los valores de sen β y cos β en función de L, el vector unitario $\hat{r}'$ es:

$$\hat{r} = -\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

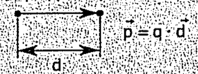
El campo eléctrico creado por la carga $-Q$ en el punto c es:

$$\vec{E}'_c = k\frac{-Q}{L^2}\hat{r}' = k\frac{-Q}{L^2}\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right) = k\frac{Q}{L^2}\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$$

Y el campo resultante total es:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_c + \vec{E}'_c = k\frac{Q}{L^2}\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right) + k\frac{Q}{L^2}\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right) = 2\cdot k\frac{Q}{L^2}\frac{1}{2}\hat{\imath}$$

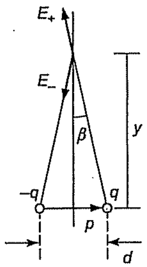
16.9. Un dipolo es un sistema compuesto por dos cargas puntuales de igual valor pero diferente signo separadas una pequeña distancia d. El dipolo se define por un vector p que se obtiene multiplicando el módulo de cualquiera de las cargas del dipolo por el vector d, que es un vector cuyo módulo es la distancia de separación entre cargas, su dirección la de la recta que une las cargas y su sentido de la carga negativa a la positiva.



Determinar el campo eléctrico que un dipolo crea en un punto de su mediatriz.

Solución

En la figura adjunta se muestra la dirección de los campos eléctricos creados por cada carga del dipolo en un punto arbitrario de su bisectriz. En el ejercicio anterior (16.8) se explicó cómo calcular el vector unitario de un campo eléctrico si se conoce el ángulo que forma con uno de los ejes de coordenadas. En este ejercicio se repite ese cálculo.



Determinemos el campo eléctrico que originan la carga positiva y la carga negativa en la posición (0, y):

$$\vec{E}_+ = k\frac{q}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)}\cdot(-\text{sen}\,\beta\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{E}_- = k\frac{q}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)}\cdot(-\text{sen}\,\beta\,\hat{\imath} - \cos\beta\,\hat{\jmath})$$

Donde:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}$$

El campo total E_T es la suma de los dos campos eléctricos:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -2k\frac{q}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\hat{\imath} = -k\frac{q\cdot d}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath}$$

Dado que $\vec{p} = q\cdot\vec{d}$, podemos escribir:

$$\vec{E}_T = -k\frac{\vec{p}}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si la distancia y es mucho mayor que la separación entre cargas, d, el campo eléctrico total es:

$$\vec{E}_T = -k\frac{\vec{p}}{y^3}$$

16.10. Una varilla unidimensional tiene una carga Q uniformemente distribuida a lo largo de toda su longitud, L. Determinar:

a) El campo eléctrico creado por la varilla en un punto p alineado con la varilla y separado una distancia D del extremo más próximo de la misma.

b) Resolver el apartado *a)* suponiendo que $D >> L$.

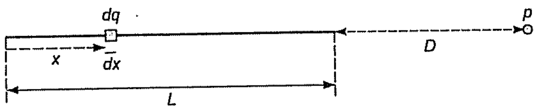
Solución

a) La varilla del ejercicio no es una carga puntual. Será necesario descomponer esta varilla en elementos infinitesimales. Cada uno de estos elementos infinitesimales contiene un diferencial de carga (dq) que se comporta como una carga puntual. El campo eléctrico total creado en un punto del espacio por este objeto se obtiene al sumar vectorialmente todos los campos eléctricos creados por cada uno de los diferenciales de carga.

Se selecciona un diferencial de carga arbitrario, y se determina el campo eléctrico que genera. A continuación se suma para el resto de elementos que componen el objeto.

En la resolución del problema se toma la dirección del eje x coincidente con dirección de la varilla. El origen del eje x coincide con el extremo izquierdo de la varilla.

1.º) En la figura se muestra un diferencial de carga (dq) que se encuentra alejado una distancia x del extremo izquierdo.



El campo eléctrico que este diferencial de carga crea en el punto p es:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{(L+D-x)^2}\cdot\hat{i}$$

Los restantes diferenciales de carga que componen la varilla generarán en el punto p diferenciales de campo con la misma dirección y sentido. Por tanto, sólo es preciso tener en cuenta el módulo del campo eléctrico. La dirección del campo resultante será la del eje x.

$$dE = k\frac{dq}{(L+D-x)^2}$$

El campo total es la suma de todos los campos eléctricos generados por cada uno de los pequeños elementos de carga (diferenciales) en los que se supone descompuesta la varilla:

$$E_T = \int dE = \int k\frac{dq}{(L+D-x)^2} \qquad (1)$$

2.°) Para resolver la suma de campos eléctricos hay que tener presente que en la integral hay dos variables: la posición, x, de cada diferencial de carga y la variable respecto a la que se diferencia, la carga q.

Por tanto hay que relacionar x con q. Para ello se tiene en cuenta la información dada en el enunciado que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la varilla:

$$\frac{Q}{L} = \frac{dq}{dx} = \lambda = \text{constante},$$

donde λ es la densidad lineal de carga, entonces $dq = \lambda\cdot dx$ y sustituyendo en la ecuación (1):

$$E_T = \int dE = \int k\,\frac{\lambda\cdot dx}{(L+D-x)^2} = k\cdot\lambda\int_0^L\frac{dx}{(L+D-x)^2} = k\cdot\lambda\left[\frac{dx}{L+D-x}\right]_0^L = k\cdot\lambda\left[\frac{1}{D}-\frac{1}{L+D}\right]$$

$$E_T = k\cdot\lambda\cdot\frac{L}{D\cdot(L+D)}$$

Como $\lambda = \dfrac{Q}{L}$:

$$E_T = k\cdot\frac{Q}{D}\cdot\frac{1}{L+D}$$

b) Si el punto p está muy alejado del extremo de la varilla ($D>>L$), $L+D\approx D$, en la expresión del campo eléctrico del apartado anterior, se cumple:

$$D\,(L+D)\approx D^2$$

Y

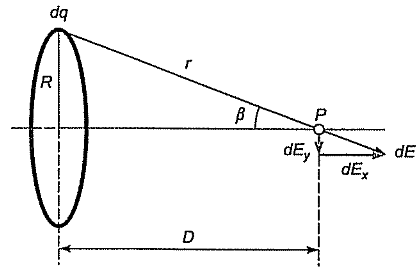
$$E_T = k\cdot\frac{Q}{D^2}$$

Que nos indica que a grandes distancias, la varilla se comporta como una carga puntual.

16.11. Un anillo de radio R tiene una carga Q uniformemente distribuida. Determinar el campo eléctrico creado por el anillo en un punto p de su eje situado a una distancia D del centro del anillo.

Solución

Se selecciona un pequeño elemento de carga arbitrario del anillo y se determina el campo eléctrico que genera en el punto p.



El campo que crea el diferencial de carga es:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\cdot\hat{r} = k\frac{dq}{R^2+D^2}\cdot\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ es el vector unitario que especifica la dirección entre el dq y el punto p.

Observando la figura se puede hacer un ejercicio mental que consiste en el desplazamiento del dq a lo largo del anillo y observar la figura que describe el $d\vec{E}$ en el espacio. Esta figura es una superficie cónica. De esta forma, es fácil comprobar que cada $d\vec{E}$ tiene su simétrico. Las componentes del campo eléctrico perpendicular al eje se anulan.

Como la resultante final va a ser paralela al eje, sólo es preciso tener en cuenta el módulo del campo eléctrico.

$$E_T = \int dE_x = \int k\frac{dq}{R^2+D^2}\cdot\cos\beta \qquad (1)$$

Observando el dibujo se comprueba que:

$$\cos\beta = \frac{D}{\sqrt{R^2+D^2}}$$

Para resolver la suma de campos eléctricos (la integral) al igual que en el ejercicio 16.10, se tiene en cuenta la información dada en el enunciado que la carga está uniformemente distribuida a lo largo del anillo:

$$\frac{Q}{2\pi R} = \text{constante}$$

Así:

$$dq = \frac{Q}{2\pi R}\cdot ds$$

ds es la longitud del dq

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$E_T = \int dE_x = \int_0^{2\pi R} k \frac{D}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot ds = k \frac{D}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot \int_0^{2\pi R} ds$$

$$E_T = k \frac{D}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot 2\pi R = k \frac{QD}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si $D >> R$, entonces $R^2 + D^2 \approx D^2$ y:

$$E_T = k\frac{QD}{D^3} = k\frac{Q}{D^2}$$

16.12. Determinar el flujo del campo eléctrico $E = -4{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\imath} + 6{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\jmath} - 2{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{k}$ a través de las siguientes superficies:

a) Superficie cuadrada definida por las posiciones de sus cuatro vértices en centímetros: (0, 0, 0), (20, 0, 0), (0, 20, 0) y (20, 20, 0).

b) Superficie circular de 20 cm de radio, contenida en el plano xz y con centro en el origen de coordenadas.

Solución

a) La superficie definida es un cuadrado de 20 cm de lado contenido en el plano xy. El vector unitario que orienta esta superficie es $\hat{k}$.

El flujo a través de esta superficie es:

$$\Phi_E = \left(-4{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{\imath} + 6{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{\jmath} - 2{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{k}\right) \cdot (400 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\ \hat{k})$$

$$\Phi_E = -2{,}0 \cdot 10^4 \cdot 400 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N m}^2}{\text{C}} = -8{,}0 \cdot 10^2 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}}$$

b) El vector unitario que orienta esta superficie circular es $\hat{\jmath}$, y su área es de 0,126 m^2.

El flujo a través de esta superficie es:

$$\Phi_E = \left(-4{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{\imath} + 6{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{\jmath} - 2{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}\hat{k}\right) \cdot (0{,}126\ \text{m}^2\ \hat{\jmath})$$

$$\Phi_E = 6{,}0 \cdot 10^4 \cdot 0{,}126 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}} = 7{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}}$$

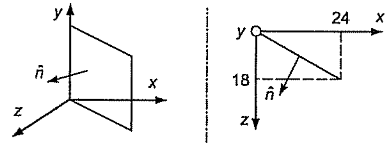
16.13. Determinar el flujo a través de una superficie rectangular definida por las posiciones de sus cuatro vértices en centímetros: (0, 0, 0), (24, 0, 18), (0, 20, 0) y (24, 20, 18) originado por los siguientes campos eléctricos:

a) $E = -4{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\imath}$

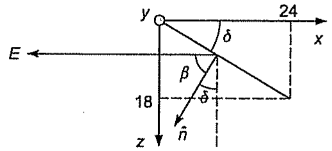
b) $E = 6{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\jmath}$

Solución

a) En la figura puede comprobarse que la superficie del problema es un rectángulo de 20 cm de altura y una base de 30 cm. Por tanto el área del rectángulo es de 600 cm^2.



El ángulo que forma el vector unitario $\hat{n}$ con el campo eléctrico es β según se observa en la figura adjunta. Se puede comprobar además que $\beta + \delta = \frac{\pi}{2}$ rad.



El flujo a través de esta superficie es:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot A = E \cdot A \cdot \cos\beta$$

Donde: $\beta = \frac{\pi}{2} - \delta$. Como $\delta = \text{arctg}\left(\frac{18}{24}\right) = 37°$, entonces $\beta = 53°$.

Por lo que:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot A = E \cdot A \cdot \cos\beta = 4{,}0 \cdot 10^4 \cdot 600 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 53 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

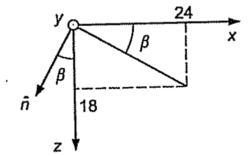
$$\Phi_E = 1{,}4 \cdot 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

Este apartado se podría haber calculado de igual forma que el ejercicio 16.12; determinando el vector unitario y, a continuación, realizando el producto escalar entre los vectores E y $\hat{n}$:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA$$

Para determinar la dirección del vector $\hat{n}$ nos serviremos de la figura en la que se observa el perfil del rectángulo y el vector $\hat{n}$:

$$\hat{n} = -\text{sen}\,\beta\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{k} = -\frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{k}$$



El flujo a través de esta superficie de $6{,}0 \cdot 10^{-2}$ m² de área es:

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot A = \left(-4{,}0\cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{\imath}\right)\cdot(6{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2)\left(-\frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{k}\right) = 1{,}4\cdot 10^3\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

Que es exactamente el mismo resultado que el obtenido anteriormente.

b) El ángulo que forma en esta ocasión el campo eléctrico, $E = 6{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\jmath}$, con el vector $\hat{n}$, es de $\pi/2$ rad (o 90°).

El flujo cuando los dos vectores son perpendiculares entre sí es nulo ya que no hay ninguna línea de campo eléctrico que atraviese la superficie.

$$\Phi_E = 0$$

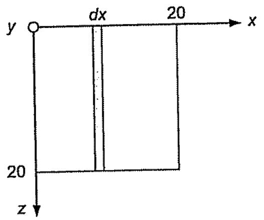
16.14. Determinar el flujo a través de una superficie cuadrada definida por las posiciones de sus cuatro vértices en centímetros: (0, 0, 0), (20, 0, 0), (0, 0, 20) y (20, 0, 20) originado por el campo eléctrico $E(x) = 2{,}5 \cdot 10^2\,(x + 1)$ N/(C · cm) $\hat{\jmath}$ (x expresada en cm).

Solución

En esta ocasión, a diferencia de los ejercicios anteriores, el campo eléctrico no es uniforme. Para calcular el flujo, habrá que dividir la superficie en elementos infinitesimales en los cuales se pueda considerar que el campo eléctrico es constante y aplicar:

$$\Phi_E = \int d\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dA = \int_S E\cdot\cos\beta\cdot dA$$

El rectángulo marcado en la figura tiene una anchura dx. Considerar que el campo eléctrico es constante en el diferencial de superficie seleccionado.



El área de este elemento de superficie es $dA = L\,dx$.

Antes de calcular el flujo se puede apreciar que el campo eléctrico y el vector unitario $\hat{n}$ que identifica la superficie cuadrada son dos vectores paralelos y su producto escalar se reduce al producto de módulos:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dA = \int_S E\cdot dA = \int_0^{20} E\cdot L\,dx = \int_0^{20} 2{,}5\cdot 10^2\cdot(x+1)\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot dx$$

$$\Phi_E = 2{,}5\cdot 10^2\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{20} = 2{,}5\cdot 10^2\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot 220 = 1{,}1\cdot 10^4\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

16.15. Calcular, mediante la ley de Gauss el campo eléctrico creado por una esfera de radio R que tiene una carga Q uniformemente distribuida por todo su volumen.

a) Para puntos que cumplen $r \geq R$.

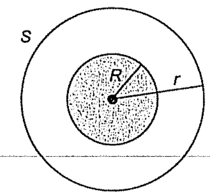
b) Para puntos que cumplen $r \leq R$.

Solución

a) $r \geq R$

Según la ley de Gauss, el flujo a través de una superficie cerrada es:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{Neta}}}{\varepsilon_0}$$



Para resolver el problema, hay que considerar una superficie gaussiana S. Siempre es aconsejable que la superficie tenga una simetría similar a la distribución de carga del problema. En este caso es preceptivo tomar una superficie esférica de radio r ($r \geq R$) concéntrica con la esfera.

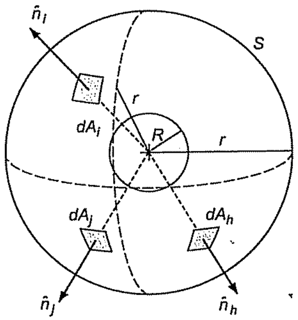
La carga neta dentro de esta superficie esférica es Q (la carga de la esfera de radio R). Por tanto:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{Neta}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Por otro lado, según la definición de flujo:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dA$$

1) Las líneas de campo eléctrico que crea la esfera son radiales. En la figura adjunta puede observarse que cualquier diferencial de área de la superficie gaussiana S tiene un vector unitario perpendicular a la propia superficie esférica, y por tanto una *dirección radial.*



En cada punto de la superficie gaussiana, los vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$ son paralelos y $\vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = E \cdot dA$.

2) Si el módulo del campo eléctrico tiene un cierto valor en un punto de la superficie gaussiana, dada la simetría del sistema, cualquier otro punto de la superficie presentará un valor del módulo del campo eléctrico idéntico. Por tanto, el módulo de $\vec{E}$ no depende del lugar en la superficie gaussiana que seleccionemos, o de otra forma; el módulo de $\vec{E}$ es independiente del elemento dA escogido.

3) La suma de todos los dA que configuran una superficie esférica de radio r es igual al área de esta superficie: $A_{\text{superficie gaussiana}} = 4\pi r^2$.

Por tanto:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA \underset{(1)}{=} \oint_S E \cdot dA \underset{(2)}{=} E \oint_S dA \underset{(3)}{=} E \cdot 4\pi r^2$$

Teniendo en cuenta (1), podemos escribir:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

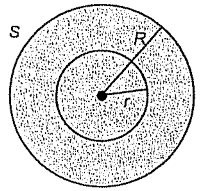
Esta expresión nos da el módulo del campo eléctrico. Como se indicó anteriormente, la dirección del campo es radial. Si se quiere indicar el vector eléctrico, escribiremos:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Esta última expresión demuestra que, para un punto exterior, la esfera cargada se comporta como una carga puntual colocada en el centro del sistema.

b) $r \leq R$

Para calcular el campo eléctrico en el interior de la esfera, hay que volver a elegir una superficie gaussiana S con una simetría similar a la del problema. De nuevo es preceptivo elegir una superficie esférica de radio r ($r \leq R$) concéntrica con la esfera.



Al estar la carga uniformemente distribuida por la esfera, la densidad volumínica de carga, ρ, será constante. Esto es, en volúmenes iguales habrá cargas iguales.

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

La carga neta, Q_{Neta}, interior a la superficie gaussiana será:

$$Q_{\text{Neta}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Según la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{Neta}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

Calcularemos ahora el flujo a través de la superficie gaussiana:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA$$

El flujo de campo eléctrico que crea la carga externa (la delimitada entre la superficie gaussiana y la superficie de la esfera) en la propia superficie gaussiana es nulo, por tanto sólo hay la contribución de la carga encerrada en S.

1) Por simetría, el módulo de campo eléctrico ha de tener el mismo valor en cualquier punto de la superficie S, además tendrá dirección radial.

2) Cualquier diferencial de área tomado de la superficie gaussiana S tiene un vector unitario perpendicular a la propia superficie esférica, y por tanto una *dirección radial*. En cada punto de la superficie gaussiana, los vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$ son paralelos y $\vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = E \cdot dA$ —al igual que en el apartado *a).*

3) La suma de todos los dA que configuran una superficie esférica de radio r es igual al área de esta superficie: $A_{\text{superficie gaussiana}} = 4\pi r^2$.

Por tanto:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA \underset{(1)}{=} \oint_S E \cdot dA \underset{(2)}{=} E \oint_S dA \underset{(3)}{=} E \cdot 4\pi r^2$$

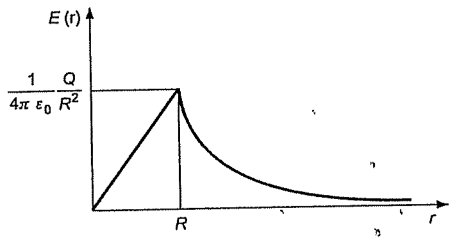
Igualando este valor de flujo con el obtenido anteriormente, tenemos:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \cdot \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \cdot r$$

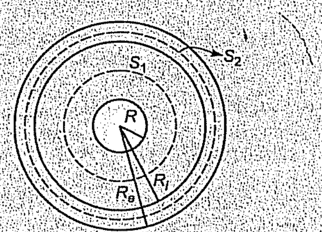
Esta expresión indica el módulo del campo eléctrico. Como se indicó anteriormente, la dirección del campo es radial. Si se quiere indicar el vector eléctrico:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\cdot r\cdot\hat{r}$$

Si se representa el campo eléctrico en función de r, se obtiene la siguiente gráfica:



16.16. Una distribución esférica de carga $Q = 20\ \mu C$ y radio $R = 5{,}0$ cm, se encuentra en el interior de una corteza conductora esférica de radio interior $R_i = 8{,}0$ cm y radio exterior $R_e = 8{,}4$ cm. La corteza conductora tiene una carga neta $q = -12\ \mu C$. Calcular:



a) La carga en la superficie interior y exterior de la corteza conductora.
b) La densidad superficial de carga en la superficie interior y exterior de la corteza conductora.
c) El flujo del campo eléctrico a través de las superficies gaussianas S_1 y S_2.

Solución

a) En el enunciado nos indican que la corteza es conductora, por tanto si se encuentra en equilibrio electrostático, el campo eléctrico en su interior es nulo. Consideremos una superficie cerrada S_2 en el interior de la corteza. Como el campo eléctrico en todos sus puntos es cero, el flujo a través de esta superficie S_2 también es cero. Según la ley de Gauss, la carga neta en el interior de la superficie S_2 ha de ser nula. Por tanto:

$$Q + q_{\text{sup. int.}} = 0$$

Donde $q_{\text{sup. int}}$ representa la carga de la superficie interior de la corteza. Así:

$$q_{\text{sup. int.}} = -Q = -20\ \mu C$$

Como en un conductor en equilibrio electrostático la carga se sitúa en la superficie, la carga de la corteza estará localizada en su superficie interior y en su superficie exterior:

$$q = q_{\text{sup. int.}} + q_{\text{sup. ext.}}$$

Si la corteza tiene en total una carga q de $-12\ \mu C$ y sólo en su superficie interior presenta una carga de $-20\ \mu C$, para que se cumpla la igualdad, en la superficie exterior de la corteza, debe haber una carga:

$$q_{\text{sup. ext.}} = 8{,}0\ \mu C$$

Vemos pues que, a pesar de que la corteza tenga una carga neta negativa, en una de sus superficies puede haber una carga neta positiva.

b) La densidad superficial de carga es la carga por unidad de superficie. Las densidades superficiales de las superficies interior y exterior serán:

$$\sigma_{\text{sup. int.}} = \frac{q_{\text{sup. int.}}}{4\,\pi R_i^2} = \frac{-20\ \mu C}{4\,\pi\,(8{,}0\cdot 10^{-2})^2\ m^2} = -2{,}5\cdot 10^{-4}\,\frac{C}{m^2} = -2{,}5\cdot 10^{2}\,\frac{\mu C}{m^2}$$

$$\sigma_{\text{sup. ext.}} = \frac{q_{\text{sup. ext.}}}{4\,\pi R_e^2} = \frac{8{,}0\ \mu C}{4\,\pi\,(8{,}4\cdot 10^{-2})^2\ m^2} = 9{,}0\cdot 10^{-5}\,\frac{C}{m^2} = 90\,\frac{\mu C}{m^2}$$

c) Se podría pensar que no es posible determinar el flujo a través de la superficie S_1 ya que no se indica en el enunciado su posición respecto al origen. Sólo que está comprendida entre R y R_i.

Esta suposición no es correcta ya que el flujo es proporcional al número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie y ese valor es el mismo independientemente de la posición de la superficie en la zona seleccionada.

S_1 es una superficie cerrada y el flujo a su través es:

$$\Phi_E = \frac{Q_{Neta}}{\varepsilon_0} = \frac{20\ \mu C}{\varepsilon_0} = \frac{20\cdot 10^{-6}\ C}{8{,}9\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}} = 2{,}3\cdot 10^{6}\,\frac{N\,m^2}{C}$$

Flujo a través de la superficie S_2: esta superficie se encuentra en la corteza conductora. Al ser el campo eléctrico nulo, pues se trata de un conductor, el flujo será nulo ya que no hay líneas de campo que atraviesen esta superficie. En S_2: $\Phi_E = 0$

CUESTIONES

16.1. Si abandonamos un electrón en el interior de un campo eléctrico uniforme, el electrón:

a) Se moverá con velocidad constante en la dirección y sentido del campo.

b) Se moverá con velocidad constante en la dirección del campo y en sentido contrario.

c) Se moverá con aceleración constante en la dirección del campo y en sentido contrario.

d) Se moverá con aceleración variable.

16.2. Considerar un dipolo eléctrico situado en el interior de un campo eléctrico uniforme.

a) El dipolo tenderá a acelerar en la misma dirección y sentido que el campo eléctrico.

b) El dipolo acelerará en dirección perpendicular al campo eléctrico.

c) El dipolo no notará influencia alguna del campo eléctrico.

d) El dipolo girará y tenderá a orientarse en la dirección del campo eléctrico.

16.3. Dos cargas puntuales del mismo módulo y signo se encuentran a una cierta distancia. Sólo hay un punto en las proximidades de las cargas en el que el campo eléctrico es nulo. Este punto:

a) No puede estar en la línea que une las cargas.

b) Debe estar en la línea que une las cargas y entre las cargas.

c) Debe estar en la línea que une las cargas pero no entre las cargas.

d) Su posición estará entre las cargas o no en función del valor de las cargas.

16.4. Dos cargas puntuales $q_1 = 2{,}0\ \mu C$ y $q_2 = 3{,}0\ \mu C$ están separadas una distancia de 1,0 mm. ¿En qué punto será cero el campo eléctrico creado por las dos cargas?

a) El campo eléctrico será cero en un punto situado entre las cargas sobre la línea que las une y a 0,45 mm de la carga q_1.

b) El campo eléctrico será cero en un punto situado sobre la línea que une las cargas, a 0,55 mm de la carga q_1 y en el lado opuesto de donde se encuentra q_2.

c) El campo eléctrico será cero en un punto situado sobre la mediatriz del segmento que une las dos cargas.

d) El campo eléctrico creado por las cargas no puede ser cero en ningún punto del espacio.

16.5. El número de líneas de campo que atraviesa una superficie que encierra un volumen:

a) Es proporcional a la carga neta que hay en su interior.

b) Es inversamente proporcional a la carga que hay en su interior.

c) Es proporcional a la carga positiva que hay en su interior e inversamente proporcional a la carga negativa.

d) Depende tanto de la carga que hay en su interior como de las cargas exteriores.

16.6. Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie que encierra un volumen es nulo:

a) El campo eléctrico es nulo en todos los puntos de la superficie.

b) No podemos decir si el campo eléctrico será nulo o no, ya que no conocemos las cargas que hay en el interior de la superficie ni cómo están distribuidas.

c) El campo eléctrico será nulo en los puntos de la superficie, si se dan unas condiciones de simetría que hacen que el campo en todos los puntos sea constante y perpendicular a la superficie.

d) Las otras afirmaciones son falsas.

16.7. Una superficie que encierra un volumen tiene un flujo de campo eléctrico a su través de valor $\Phi = 20 \cdot 10^5\ N \cdot m^2/C$. Se puede afirmar que:

a) La superficie encierra una carga puntual positiva.

b) La superficie encierra en su interior únicamente una carga puntual positiva de valor $Q = 18\ \mu C$.

c) Se desconoce cuánta carga positiva o negativa encierra la superficie, pero sí que la carga neta en su interior es $Q = 18\ \mu C$.

d) Para saber el flujo a través de una superficie es necesario conocer la expresión del campo eléctrico.

16.8. En todos los puntos de una superficie que encierra un volumen, el vector $\vec{E}$ apunta hacia fuera. Es correcto afirmar que:

a) La carga neta encerrada por la superficie es negativa.

b) La carga neta encerrada por la superficie es cero.

c) La carga neta encerrada por la superficie es positiva.

d) El vector unitario $\hat{n}$ que orienta a la superficie es perpendicular al campo en todos los puntos.

16.9. Sea una superficie gaussiana esférica en las proximidades de una carga eléctrica puntual. La carga puntual está fuera de la superficie esférica. Es correcto afirmar que:

a) El campo eléctrico en los puntos de la superficie esférica y el flujo que la atraviesa son nulos.

b) El campo eléctrico en los puntos de la superficie esférica no es nulo.

c) El campo eléctrico en los puntos de la superficie esférica es nulo pero el flujo de campo eléctrico es no nulo.

d) El flujo a través de la superficie esférica depende de la carga.

16.10. Sea un dipolo formado por dos cargas puntuales (q y $-q$) separadas una distancia d. Es cierto que:

a) Podemos utilizar el teorema de Gauss para buscar el campo creado por las dos cargas en cualquier punto.

b) El flujo del campo a través de cualquier superficie que encierra un volumen que incluya las dos cargas será cero.

c) El flujo del campo a través de cualquier superficie que encierra un volumen que incluya las dos cargas será $2q/\varepsilon_0$.

d) El campo creado por un dipolo es cero en todos los puntos del espacio.

16.11. Si se utiliza la ley de Gauss para hallar el campo que crea un dipolo:

a) Como la carga neta de un dipolo es cero, el campo será cero.

b) El campo será radial, idéntico al de una carga puntual.

c) No se puede aplicar la ley de Gauss ya que no hay la simetría necesaria.

d) El flujo a través de la superficie gaussiana que encierra al dipolo será q/ε_0, donde q es el valor de la carga positiva del dipolo.

16.12. Es correcto afirmar que si se aplica la ley de Gauss en el vacío:

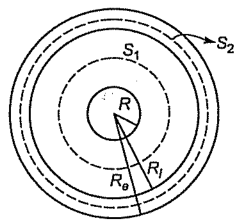
a) El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie es igual a la carga que contiene la superficie dividida por ε_0.

b) El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie que encierra un volumen es igual a la carga que contiene la superficie dividida por ε_0.

c) El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie que encierra un volumen es igual a la carga que contiene la superficie dividida por ε_0. Siempre y cuando la superficie tenga suficiente simetría.

d) El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie simétrica es igual a la carga que contiene la superficie dividida por ε_0.

16.13.1. Una distribución esférica de carga $q = -4{,}0\ \mu$C y radio R se encuentra en el interior de una corteza conductora esférica de radio interior R_i y radio exterior R_e. La corteza conductora tiene una carga neta $Q = 6{,}0\ \mu$C.



El flujo del campo eléctrico a través de la superficie gaussiana S_1 es:

a) $\Phi = -4{,}5 \cdot 10^5$ N · m²/C
b) $\Phi = 6{,}8 \cdot 10^5$ N · m²/C
c) $\Phi = 2{,}3 \cdot 10^5$ N · m²/C
d) $\Phi = 0$

16.13.2. El flujo del campo eléctrico a través de la superficie gaussiana S_2 es:

a) $\Phi = -4{,}5 \cdot 10^5$ N · m²/C
b) $\Phi = 6{,}8 \cdot 10^5$ N · m²/C
c) $\Phi = 2{,}3 \cdot 10^5$ N · m²/C
d) $\Phi = 0$

16.14. Si en el interior de una superficie que encierra un volumen, de forma arbitraria, no hay cargas, es correcto afirmar que:

a) De la ley de Gauss se deduce que el campo electrostático en los puntos de esta superficie es nulo.

b) $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = \oint_S E_n \cdot dA = 0$

c) La componente normal del campo electrostático es igual en todos los puntos de la superficie.

d) No es posible decir nada acerca del flujo del campo electrostático a través de esta superficie si no se conoce su forma.

16.15. Los flujos de campo eléctrico a través de tres superficies, que encierran un volumen A, B y C son $1{,}0 \cdot 10^6$ N · m²/C, $1{,}0 \cdot 10^6$ N · m²/C y 0. Estos valores de flujo de campo eléctrico *únicamente* son posibles si se cumple que:

a) En el interior de C no hay carga alguna.

b) Las superficies A y B tienen la misma carga neta interna y C tiene una carga neta interna cero.

c) Las tres superficies están dispuestas de forma que C ⊂ B ⊂ A.

d) La carga en el interior de B es puntual y de 8,9 μC de valor.

16.16. Una esfera conductora de radio a está cargada con una carga Q. Envolviendo esta esfera hay una superficie esférica, concéntrica con la anterior, también conductora de radio b ($b > a$) que tiene carga neta cero. El campo eléctrico en un punto situado a una distancia $r > b$ será:

a) $\vec{E} = k\dfrac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}$
b) $\vec{E} = k\dfrac{Q}{r} \cdot \hat{r}$
c) Cero.
d) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

16.17. El radio de una esfera conductora aislada, en equilibrio electrostático, que tiene una carga de 1,0 mC, y cuyo campo eléctrico en su superficie tiene un valor de $3{,}0 \cdot 10^8$ N/C es:

a) 30 m
b) 0,17 m
c) 5,5 mm
d) 9,0 cm

16.18. En una zona del espacio hay dos superficies que encierran un volumen, S_1 y S_2. S_2 envuelve completamente a S_1. El flujo a través de ambas superficies es positivo, pero es mayor el flujo a través de S_1 que de S_2. Es correcto afirmar que:

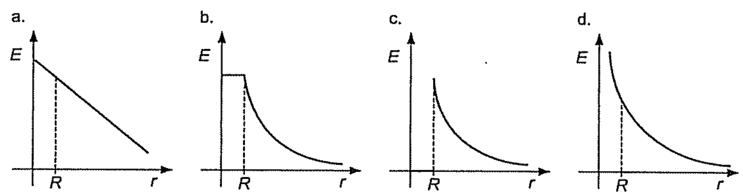
a) La carga neta en el interior de ambas superficies es positiva, y entre S_1 y S_2 hay carga neta positiva.

b) Entre S_1 y S_2 hay una carga neta positiva, y esta carga hace mayor el flujo a través de S_1.

c) Esta situación es imposible que se produzca.

d) Entre S_1 y S_2 hay una carga neta negativa, y esta carga hace menor el flujo a través de S_2.

16.19. Una esfera conductora de radio R tiene una carga Q. El gráfico que mejor indica la variación del módulo del campo electrostático creado por la esfera es:



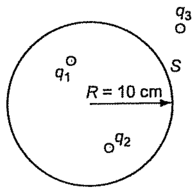
16.20.1. Considerar el sistema de cargas puntuales $q_1 = 10\ n$C, $q_2 = -10\ n$C y $q_3 = 6{,}0\ n$C y la superficie esférica imaginaria S que muestra la figura. Es correcto afirmar que:

a) El flujo de campo eléctrico a través de la superficie de la figura es $6{,}8 \cdot 10^2$ N · m²/C.

b) No hay simetría para calcular el flujo de campo eléctrico a través de la superficie S.

c) El flujo de campo eléctrico a través de la superficie de la figura es $2{,}3 \cdot 10^3$ N · m²/C.

d) El flujo de campo eléctrico a través de la superficie de la figura es cero.



16.20.2. Teniendo en cuenta la figura anterior, es correcto afirmar que:

a) El campo eléctrico en los puntos de la superficie S tiene un valor de $5{,}4 \cdot 10^3$ N/C.

b) El campo eléctrico en los puntos de la superficie S tiene un valor de $1{,}8 \cdot 10^4$ N/C.

c) No hay la simetría necesaria para calcular el campo eléctrico en los puntos de la superficie S aplicando la ley de Gauss.

d) El campo eléctrico en los puntos de la superficie S es cero.

16.21. El campo en el interior de una distribución esférica de carga es nulo:

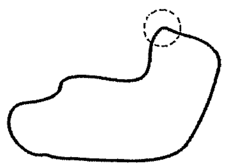
a) Siempre.

b) Si la densidad de carga volúmica es constante.

c) No puede ser nunca nulo.

d) Si la carga está situada en la superficie.

16.22. Un conductor de forma irregular tal como el de la figura tiene una carga total Q. La circunferencia punteada señala una zona concreta del conductor.



a) La carga Q del conductor se distribuirá preferentemente por los contornos más suaves del conductor.

b) En la zona señalada se cumplirá que el campo electrostático es perpendicular a la superficie del conductor y de módulo $E = \sigma/\varepsilon_0$ donde $\sigma = Q/A$ y A es el área total del conductor.

c) En la zona señalada, se cumplirá que el campo electrostático es perpendicular a la superficie del conductor y de módulo $E = \sigma/\varepsilon_0$ donde σ es la densidad superficial de carga en esa zona.

d) Si se aplica la ley Gauss, en una zona exterior próxima al conductor, se obtiene que el campo electrostático tendrá un valor $E = k \cdot Q/r^2$.

16.23. Si se acerca una varilla no conductora con carga positiva, tal y como indica la figura, a dos esferas metálicas descargadas que están en contacto y a continuación se separan las esferas, la esfera de la izquierda tendrá:

a) Carga neta cero.

b) Carga positiva.

c) Carga negativa.

d) Puede ser positiva o negativa.

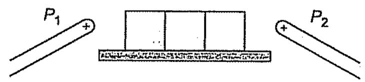
16.24. Tres bloques metálicos A, B y C, originariamente descargados, se encuentran en contacto, apoyados sobre una mesa de material aislante. Dos barras, P_1 y P_2, electrizadas positivamente, se colocan cerca de los extremos de los bloques A y C, como muestra la figura. Una persona (con guantes aislantes) separa los bloques entre sí, y en seguida, aleja las barras electrizadas. La carga de los bloques será:

a) Nula.

b) La de los bloques A y C será positiva, la del bloque B será nula.

c) La de los bloques A y C será positiva, la del bloque B será negativa.

d) La de los bloques A y C será negativa, la del bloque B será positiva.



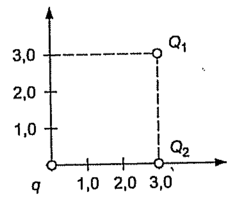
SOLUCIONES

16.1. *c)*	**16.10.** *b)*	**16.18.** *d)*
16.2. *d)*	**16.11.** *c)*	**16.19.** *c)*
16.3. *b)*	**16.12.** *b)*	**16.20.1.** *d)*
16.4. *a)*	**16.13.1.** *a)*	**16.20.2.** *c)*
16.5. *a)*	**16.13.2.** *d)*	**16.21.** *d)*
16.6. *b)*	**16.14.** *b)*	**16.22.** *c)*
16.7. *c)*	**16.15.** *b)*	**16.23.** *c)*
16.8. *c)*	**16.16.** *a)*	**16.24.** *d)*
16.9. *b)*	**16.17.** *b)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Los valores de las cargas del sistema de la figura son $Q_1 = -4{,}0\ \mu$C, $Q_2 = 2{,}0\ \mu$C y $q = 2{,}0\ \mu$C, si las coordenadas están expresadas en metros, determinar la fuerza electrostática neta que actúa sobre q.**

Sol.: $\vec{F} = -1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\,\hat{i} + 2{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\,\hat{j}$

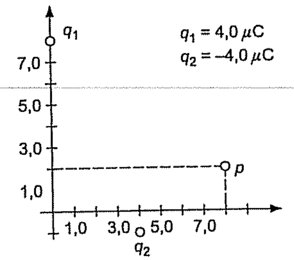


2 **Dos cargas puntuales idénticas de valor $q_1 = q_2 = 20\ \mu$C se encuentran separadas 0,60 m. La carga q_1 está en la posición (−0,30 m, 0,0) y la carga q_2 en (0,30 m, 0,0). Calcular el campo eléctrico en la posición (0,0, 0,40 m).**

Sol.: $\vec{E} = 12 \cdot 10^5\ \mathrm{N/C}\,\hat{j}$

3 **Dos cargas $q_1 = 4{,}0\ \mu$C y $q_2 = -4{,}0\ \mu$C se encuentran en los puntos (0, 8,0 m) y (4,0 m, −1,0 m) respectivamente. Calcular el campo eléctrico en el punto p (8,0 m, 2,0 m).**

Sol.: $\vec{E} = -0{,}86\ \mathrm{kN/C}\,\hat{i} - 1{,}1\ \mathrm{kN/C}\,\hat{j}$



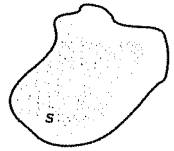
4 **Una carga puntual de 6,0 μC se halla en el interior de una superficie cúbica de 6,0 m de arista. ¿Cuánto vale el flujo de campo eléctrico que atraviesa esta superficie?**

Sol.: $6{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-1}}$

5 **En el interior de una superficie que encierra un volumen hay una distribución de cargas siendo 8,0 μC la carga neta positiva y −5,0 μC la carga neta negativa.**

Determinar el flujo de campo eléctrico Φ_E a través de esta superficie.

Sol.: $\Phi_E = 3{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$



6 **Una esfera conductora de radio 9,0 cm tiene una densidad superficial de carga de 9,0 nC/m². Determinar el módulo del campo eléctrico creado por la esfera en un punto que dista 16 cm del centro de la esfera.**

Sol.: 0,32 kN/C

7 **Una corteza esférica tiene una carga puntual de 15 μC en su hueco interior, pero no en el centro. El flujo de campo eléctrico a través de una superficie gaussiana irregular que contiene la corteza esférica es $\Phi = 4{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$. Calcular el valor de la carga Q de la corteza esférica.**

Sol.: Q = 20 μC

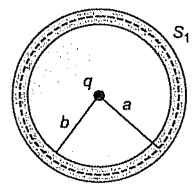
8 **Un conductor esférico que está cargado con una carga positiva de $3{,}0 \cdot 10^{-9}$ C, tiene un hueco en su interior. Si introducimos en él una carga puntual negativa de valor $-2{,}0 \cdot 10^{-9}$ C, ¿cuál será la carga sobre la superficie externa del conductor esférico?**

Sol.: $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ C

9 **Una carga puntual de 3,0 μC se encuentra en el centro de una esfera hueca conductora de radio interior $R_i = 20$ cm y radio exterior $R_e = 30$ cm. Calcular la densidad superficial de carga inducida en la superficie interior.**

Sol.: $\sigma = -6{,}0\ \mu\mathrm{C/m^2}$

10 **En la figura se muestra una carga puntual de 2,0 μC situada en el centro de una corteza esférica conductora descargada de radios $a = 0{,}12$ m y $b = 0{,}10$ m. Calcular:**



a) Las densidades superficiales de carga de la corteza.

b) El flujo a través de la superficie S_1 marcada con línea discontinua.

Sol.: *a)* $\sigma_a = 11\ \mu\mathrm{C/m^2}$, $\sigma_b = -16\ \mu\mathrm{C/m^2}$; *b)* 0

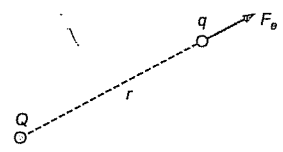
CAPÍTULO 17

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA. POTENCIAL ELÉCTRICO

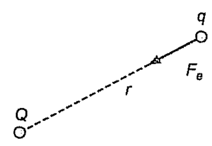
17.1. TRABAJO DE LA FUERZA ELECTROSTÁTICA. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Sea un sistema formado por dos cargas puntuales, Q y q, alejadas una distancia r. Si, partiendo del reposo, se deja evolucionar libremente una cualquiera de las dos cargas, por ejemplo q, ésta se desplazará en la dirección y sentido de la fuerza electrostática que sobre ella se está aplicando.

a) Q y q tienen el mismo signo



b) Q y q tienen diferente signo

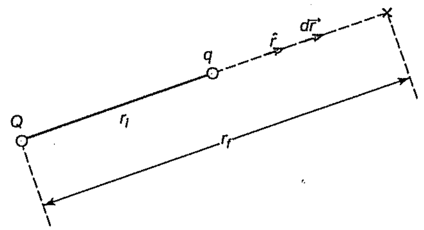


Independientemente de que las cargas tengan o no el mismo signo, la energía cinética de la carga q tendrá un incremento. Según el principio de conservación de la energía, el aumento de energía cinética se deberá a un aporte de energía que se encuentra almacenada en el sistema de las dos cargas. Esta energía es la energía potencial electrostática.

TRABAJO DE LA FUERZA ELECTROSTÁTICA

Trabajo realizado por la fuerza electrostática al desplazar una carga q desde una posición inicial r_i a otra posición final r_f.

a) Trayectoria radial:



El trabajo realizado por la fuerza electrostática es:

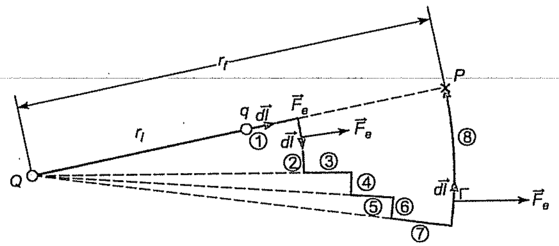
$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} k\frac{Qq}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r} = kQq\int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = kQq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f} =$$

$$kQq\left[-\frac{1}{r_f}+\frac{1}{r_i}\right] = kQq\left[\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right] = k\frac{Qq}{r_i} - k\frac{Qq}{r_f}$$

b) Trayectoria arbitraria:

En este caso, el desplazamiento entre las posiciones inicial y final es a lo largo de una trayectoria compuesta por sucesivos trayectos radiales y curvilíneos (tramos de circunferencias con centro en Q).

En la figura se observa que en los tramos radiales (1, 3, 5 y 7), el trabajo de la fuerza electrostática no será nulo, ya que $\vec{F}_e$ y $d\vec{l}$ son paralelos y su producto escalar es diferente de cero. Por el contrario, en los tramos radiales (2, 4, 6, y 8), el trabajo será nulo, ya que en esta ocasión $\vec{F}_e$ y $d\vec{l}$ son perpendiculares y su producto escalar es nulo.



El trabajo total a lo largo de esta trayectoria es:

$$W_{\text{Total}} = \int_1 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_5 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_6 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_7 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_8 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} =$$

$$\int_1 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_5 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_7 \vec{F}_e \cdot d\vec{l} =$$

$$\int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = kQq\left[\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right] = k\frac{Qq}{r_i} - k\frac{Qq}{r_f}$$

De los dos apartados anteriores se comprueba que el trabajo realizado por la fuerza electrostática depende sólo de la posición inicial y final, y no de la trayectoria seguida. Ésta es una característica de las fuerzas conservativas.

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas depende sólo de la posición inicial y final. En estas condiciones se puede definir una energía potencial electrostática asociada a la fuerza electrostática. La diferencia de potencial entre dos puntos, $U_f - U_i$, es el trabajo cambiado de signo que efectúa la fuerza electrostática sobre una carga cuando ésta se traslada de la posición inicial a la posición final:

$$U_f - U_i = \Delta U = -W_{F_e}$$

Esta expresión escrita en forma diferencial es:

$$dU = -\vec{F}_e \cdot d\vec{r}$$

En el caso que hemos calculado anteriormente de una carga, q, que se mueve bajo la acción de otra carga, Q, podremos escribir:

$$U_f - U_i = k\frac{Qq}{r_f} - k\frac{Qq}{r_i}$$

ORIGEN DE ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

No existe un valor absoluto de energía potencial electrostática. Sólo se pueden determinar las variaciones de energía potencial electrostática.

En ocasiones es útil fijar el valor de la energía potencial electrostática para una posición quedando así determinada en el resto. Normalmente se escoge el origen de energía potencial electrostática en el infinito. Si tomamos $U_\infty = 0$ cuando $r = \infty$, o de otra forma: $U_\infty = 0$. Tenemos:

$$U_\infty - U(r) = k\frac{Qq}{r_\infty} - k\frac{Qq}{r}$$

$$U(r) = k\frac{Qq}{r}$$

ENERGÍA DE FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE CARGAS

La energía de formación de un sistema de cargas es la suma de las energías potenciales electrostáticas de cada una de las cargas que componen el sistema. Esta energía queda almacenada en el sistema.

La expresión que determina la energía necesaria para formar un sistema de cargas es:

$$U_{\text{Sistema}} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

La ecuación anterior es el trabajo necesario para llevar las cargas desde el infinito, y en reposo, hasta la configuración actual.

17.2. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Cuando una carga se encuentra en un campo eléctrico, actúa sobre ella una fuerza $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Podemos escribir la expresión en forma diferencial que nos define la diferencia de energía potencial $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ de la siguiente forma:

$$dU = -q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

La ecuación anterior nos indica que la variación de energía potencial es proporcional a la carga q. Podemos definir una nueva función, el potencial eléctrico, como la energía potencial por unidad de carga:

$$dV = \frac{dU}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En un campo eléctrico, además de una función vectorial en cada punto podemos definir una función escalar, el potencial eléctrico.

Lo mismo que para la energía potencial, para indicar los potenciales hay que tomar un punto de referencia u origen. En el caso del potencial debido a un sistema de cargas puntuales y tomando como referencia el infinito, el potencial en un punto viene dado por la expresión:

$$V = k \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

Donde r_i es la distancia de la carga q_i al punto en el que se quiere calcular su potencial.

Cuando una carga, q, se desplaza entre dos posiciones de distinto potencial, experimenta una variación de potencial y, por tanto, una variación de energía potencial electrostática. La variación de la energía potencial electrostática de la carga viene dada por:

$$\Delta U = \Delta V \cdot q$$

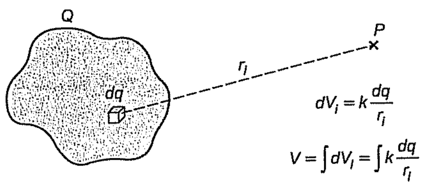
En el sistema internacional, la unidad de potencial eléctrico es el Joule por Coulomb (J/C), y tiene el nombre propio de Volt (V). De la relación entre energía y potencial electrostático se observa que J = V · C.

Otra unidad de energía es el electronvoltio (eV), que corresponde a la energía de una carga elemental, e, si su potencial es de un Volt.

POTENCIAL ELÉCTRICO CREADO POR DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGAS

Para determinar el potencial creado por un objeto cargado continuo (que no se puede considerar puntual), se descompone este objeto en elementos infinitesimales, que se comportan como cargas puntuales, cuya carga es un diferencial de carga, dq.

En cualquier punto del espacio, cada uno de estos diferenciales de carga creará un diferencial de potencial, dV_i. El potencial creado por este objeto cargado en un punto del espacio se obtiene sumando todos los diferenciales de potencial creados por cada uno de los elementos infinitesimales.



17.3. RELACIÓN ENTRE CAMPO ELÉCTRICO Y POTENCIAL

Si se conoce la expresión de campo eléctrico, es posible obtener la diferencia de potencial que dicho campo genera entre dos puntos cualesquiera. Por otro lado, si el dato de partida es la función del potencial eléctrico, se puede obtener la expresión del campo eléctrico que está asociada al potencial.

Si en una zona en la que hay establecido un campo electrostático, se realiza un desplazamiento infinitesimal a lo largo del eje x, se puede aproximar que la componente del campo eléctrico paralelo al desplazamiento es constante. La expresión de la diferencia de potencial eléctrica en forma diferencial es:

$$dV = -E_x \cdot dx$$

De donde se puede despejar la componente del campo eléctrico E_x:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

De forma equivalente se pueden obtener las componentes E_y y E_z:

$$E_y = -\frac{dV}{dy} \qquad E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Por tanto el campo eléctrico se puede expresar:

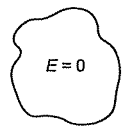
$$\vec{E}\,(x, y, z) = -\overrightarrow{grad}\,(V)$$

Donde $\overrightarrow{grad}$ es un operador matemático llamado gradiente. El resultado de aplicar el operador gradiente a una función es un vector cuya dirección es la de la máxima variación de dicha función.

17.4. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Los conductores en equilibrio electrostático se caracterizan por:

a) El campo eléctrico en su interior es nulo. En caso contrario, sobre las cargas libres existentes en el conductor se aplicaría una fuerza que las haría que se desplazasen en su interior, no cumpliéndose entonces la condición de equilibrio electrostático.



b) Como consecuencia del punto anterior, el potencial de un conductor en equilibrio electrostático es constante en todos sus puntos:

$$\Delta V = V_f - V_i = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

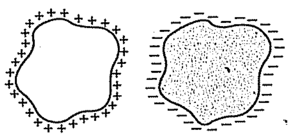
$$V_f - V_i = 0 \qquad V_f = V_i = V_{\text{Conductor}}$$

c) En un conductor cargado, la carga se distribuye por su superficie externa.

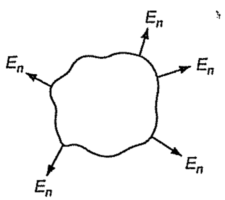
Para comprobarlo, sea un conductor cargado de una forma cualquiera. Se podría elegir una superficie gaussiana interior al conductor y muy próxima a su contorno exterior. Como el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo, el flujo de campo eléctrico a través de la superficie gaussiana es nulo, si además se tiene en cuenta que en toda superficie que encierra un volumen se cumple que:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{Neta}}}{\varepsilon_0}$$

Si el flujo es nulo, la carga neta de la superficie gaussiana es nula. Por tanto, si la carga no está en el interior del conductor, se encontrará en su superficie:

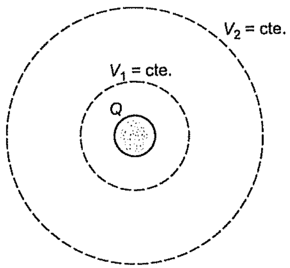


d) El campo eléctrico que genera un conductor cargado, en los puntos muy próximos al conductor, es un campo normal, perpendicular a la superficie del conductor.



SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Las cargas generan potencial eléctrico en todos los puntos del espacio. Una vez elegido el origen de potencial, cualquier punto tiene un valor concreto de potencial. Las superficies en las que todos los puntos tienen el mismo potencial se denominan superficies equipotenciales. El campo eléctrico es perpendicular a una superficie equipotencial en todos sus puntos.



PROBLEMAS RESUELTOS

17.1. Sea un sistema de dos cargas puntuales: $q_1 = 20\ \mu C$, que se encuentra en el origen de coordenadas y $q_2 = 10\ \mu C$ en el punto A ($x = 10$ cm). La carga q_2 tiene una masa de 0,60 g. Determinar:

a) La energía potencial electrostática de este sistema de cargas puntuales.

b) La variación de energía potencial electrostática de la carga q_2 al trasladarse:

*b*1) Desde el infinito al punto A ($x = 10$ cm).

*b*2) Desde el punto A a un punto B ($x = 4{,}0$ cm).

c) La velocidad y energía cinética de la carga q_2 en el punto A si se deja evolucionar libremente desde en punto B ($x = 4{,}0$ cm).

Solución

a) La energía potencial electrostática de este sistema de cargas es:

$$U_{\text{Sistema}} = k\frac{q_1\,q_2}{r}\,;\; U_{\text{Sistema}} = 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\,\text{C}\cdot 10\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0{,}10\ \text{m}} = 18\ \text{J}$$

*b*1) Si se toma como origen de potencial el infinito, $U_\infty = 0$:

$$\Delta U = U_f - 0\,;\; \Delta U = 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{20\cdot 10^{-6}\,\text{C}\cdot 10\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0{,}10\ \text{m}} - 0 = 18\ \text{J}$$

*b*2) La posición final corresponde al punto B y la inicial al punto A:

$$U_B - U_A = k\frac{q_1\,q_2}{x_B} - k\frac{q_1\,q_2}{x_A} = k\,q_1\,q_2\left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right)$$

$$U_B - U_A = 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\cdot 20\cdot 10^{-6}\,\text{C}\cdot 10\cdot 10^{-6}\,\text{C}\cdot\left(\frac{1}{4{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}10\ \text{m}}\right) = 27\ \text{J}$$

c) Si la carga q_2 se encuentra en reposo en el punto B ($x = 4{,}0$ cm) y se deja evolucionar libremente, ésta será repelida en la dirección de la fuerza electrostática que le ejerce q_1. La carga q_2, al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza electrostática, disminuye su energía potencial, y aumenta su energía cinética, ya que la energía *total* de carga q_2 no varía. Por tanto:

$$\Delta E = 0 \qquad \Delta U + \Delta E_C = 0$$

$$U_A - U_B + E_{CA} + E_{CB} = 0$$

$$-27\ J + E_{CA} - 0 = 0$$

$$E_{CA} = 27\ \text{J}$$

Como $E_{CA} = \frac{1}{2}mv_A^2 = 27$ J, la velocidad en la posición A es:

$$v_A = \sqrt{\frac{2\cdot 27\ \text{J}}{0{,}60\cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = \sqrt{9{,}0\cdot 10^4\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3{,}0\cdot 10^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

17.2. Sea un anillo de 10 cm de radio y 40 μC de carga uniformemente distribuida. Calcular:

a) El potencial eléctrico creado por el anillo en un punto de su eje.

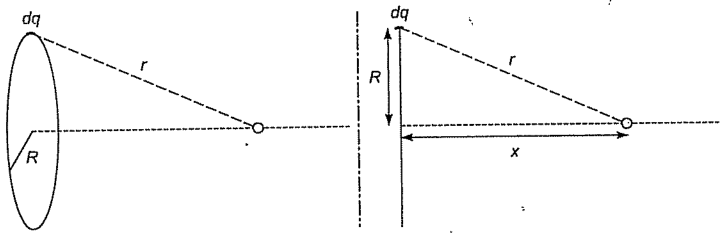
b) Demostrar que el potencial creado por el anillo en un punto del eje muy alejado de su centro es el mismo que el creado por una carga puntual de valor Q ($Q = 40\ \mu$C) localizada en el centro del anillo.

c) La diferencia de potencial $V_B - V_A$, siendo A y B puntos del eje del anillo alejados respectivamente 40 cm y 10 cm del centro del anillo.

d) La variación de energía potencial electrostática de una carga puntual $q = -10$ μC al pasar de A a B.

Solución

a) El anillo es una carga continua. Se calculará el diferencial de potencial que crea un elemento infinitesimal del anillo en un punto de su eje y posteriormente se sumará para todos los elementos diferenciales.



El diferencial de potencial creado por dq en un punto del eje del anillo alejado una distancia x de su centro es:

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

El potencial total es:

$$V = \int dV = \int_{\text{Anillo}} k\frac{dq}{r} = \frac{k}{\sqrt{R^2 + x^2}}\int_{\text{Anillo}} dq = k\frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}} + C$$

Donde se ha tenido presente que todos los elementos infinitesimales del anillo equidistan del punto x, y que la distancia r es un valor constante al realizar la integral.

C es una constante de integración. Si se toma $V = 0$ en el infinito, entonces $C = 0$.

b) Si el punto en el que se calcula el potencial está muy alejado del anillo, se cumple que $x >> R$ y se puede hacer la aproximación $\sqrt{R^2 + x^2} = x \cdot \sqrt{\frac{R^2}{x^2} + 1} \approx x$.

Así la expresión del potencial se reduce a:

$$V_{\text{Anillo}} = k\frac{Q}{x}$$

c) Potencial de los puntos A y B:

$$V_A = V\,(40\text{ cm}) = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\,\frac{40 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{\sqrt{(10 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2 + (40 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2}} =$$

$$= 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{40 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{17} \cdot 10^{-2}}\ V = 8{,}73 \cdot 10^5\ V$$

$$V_B = V\,(10\text{ cm}) = 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\,\frac{40 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{\sqrt{(10 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2 + (10 \cdot 10^{-2}\text{ m})^2}} =$$

$$= 9{,}0 \cdot 10^9\,\frac{40 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2{,}0} \cdot 10^{-2}}\ V = 2{,}55 \cdot 10^6\ V$$

$$V_B - V_A = 2{,}55 \cdot 10^6\ V - 8{,}73 \cdot 10^5\ V = 1{,}7 \cdot 10^6\ V$$

d) Variación de energía potencial de la carga $q = -10\ \mu$C al pasar desde A a B:

$$\Delta U = U_B - U_A = (V_B - V_A) \cdot q = 1{,}7 \cdot 10^6\ V \cdot (-10 \cdot 10^{-6}\ C) = -17\ J$$

17.3. Sea un plano circular de radio R y densidad de carga, σ, constante. Determinar:

a) El potencial creado por el plano en un punto de su eje. Utilizar el resultado obtenido en el apartado *a)* del ejercicio anterior suponiendo que el plano es una superposición de infinitos anillos de radio r ($0 < r < R$).

b) El campo eléctrico creado por el plano a partir del potencial obtenido en el apartado anterior.

Solución

a) Si el plano se considera como una superposición de infinitos anillos, hay que tener en cuenta que cada anillo tendrá un radio r, un espesor dr y una carga dq.

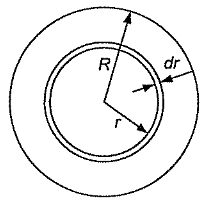
La suma de todos los dq de los anillos debe ser la carga total Q ($Q = \sigma \cdot \pi R^2$).

El potencial creado por un anillo con carga q y radio r en un punto de su eje alejado una distancia x es:

$$V = k\frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

El anillo genérico de radio r y espesor dr ocupa un área:

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$



Y su carga será:

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

El potencial que este anillo creará en un punto de su eje alejado una distancia x es:

$$dV = k\,\frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k\,\frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

El potencial creado por el plano será la suma de los potenciales creados por los infinitos anillos:

$$V = dV = \int_0^R k\,\frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2\pi k\,\sigma \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}\, dr = 2\pi k\,\sigma \cdot \left[\sqrt{r^2 + x^2}\right]_0^R$$

$$V = 2\pi k\,\sigma \cdot \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

b) Para obtener el campo eléctrico creado por el plano se aplicará la expresión:

$$\vec{E}\,(x, y, z) = -\overrightarrow{grad}\,(V)$$

$$\vec{E}\,(x, y, z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}\right) V$$

En este caso el potencial sólo depende de x:

$$\vec{E}\,(x) = -\frac{dV}{dx}\,\hat{i} \qquad \vec{E}\,(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)\right)\hat{i} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1\right)\hat{i}$$

$$\vec{E}\,(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\hat{i}$$

Si el plano se considera infinito, o lo que es lo mismo, $R \to \infty$, el término negativo que hay en el paréntesis tiende a cero, obteniendo el resultado conocido:

$$\vec{E}\,(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{i}$$

Esta expresión se puede aplicar a puntos muy próximos a un plano finito sobre todo si están alejados de los extremos del plano.

17.4. Sea la expresión del potencial creado por un dipolo:

$$V\,(x, y, z) = \frac{q\,a}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Donde:

– a y q son la longitud y la carga del dipolo, respectivamente.

– (x, y, z) son las coordenadas cartesianas del punto en el que se determina el valor del potencial.

Determinar el campo electrostático creado por el dipolo.

Solución

La ecuación que permite obtener el campo eléctrico a partir del potencial es:

$$\vec{E}\,(x, y, z) = -\overrightarrow{grad}\,(V) = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{k}$$

Así:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-z\,\frac{3}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}\,(2\,x)\right) = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,z\,x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,z\,x}{r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-z\,\frac{3}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}\,(2\,y)\right) = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,z\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,z\,y}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z\,\frac{3}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\,(2z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\right) = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{3\,z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Por tanto el campo eléctrico creado por el dipolo es:

$$\vec{E} = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{3\,z\,x}{r^5}\,\hat{i} + \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0} + \frac{3\,z\,y}{r^5}\,\hat{j} + \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{3\,z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{q\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\,z\,x}{r^2}\,\hat{i} + \frac{3\,z\,y}{r^2}\,\hat{j} + \left(\frac{3\,z^2}{r^2} - 1\right)\hat{k}\right)$$

17.5. En una zona del espacio hay establecido un campo electrostático $\vec{E} = 4{,}0 \cdot 10^3\,\frac{V}{m}\,\hat{i}$. Dadas las posiciones $A = (0{,}0, 0{,}0)$, $B = (8{,}0\text{ cm}, 0{,}0)$ y $C = (8{,}0\text{ cm}, 4{,}0\text{ cm})$, calcular:

a) La diferencia de potencial, $V_B - V_A$.

b) La diferencia de potencial, $V_C - V_B$.

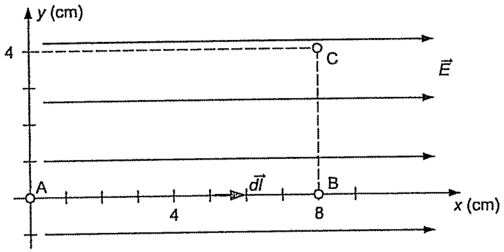
c) La diferencia de potencial, $V_C - V_A$.

Solución

a) Diferencia de potencial entre las posiciones A y B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donde: $d\vec{l} = dx\,\hat{i}$



Sustituyendo la expresión del campo eléctrico:

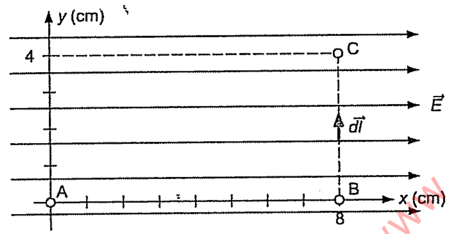
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{0{,}08} 4{,}0\cdot 10^3\,\frac{V}{m}\,\hat{i}\cdot dx\,\hat{i} = -4{,}0\cdot 10^3\,\frac{V}{m}\cdot\int_0^{0{,}08} dx$$

$$V_B - V_A = -4{,}0\cdot 10^3\,\frac{V}{m}\cdot[x]_0^{0{,}08} = -4{,}0\cdot 10^3\,\frac{V}{m}\cdot[0{,}08\text{ m} - 0] = -3{,}2\cdot 10^2\ V$$

b) Para determinar la diferencia de potencial $V_C - V_B$, hay que tener presente que el recorrido desde B hasta C es perpendicular al campo eléctrico E:

$$\vec{E} = 4{,}0\cdot 10^3\,\frac{V}{m}\,\hat{i}$$

$$d\vec{l} = dy\,\hat{j}$$



Al ser los vectores E y dl perpendiculares entre sí, su producto escalar es nulo:

$$\Delta V = V_B - V_C = -\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{0{,}04} 4{,}0\cdot 10^3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\,\hat{i}\cdot dy\,\hat{j} = -4{,}0\cdot 10^3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}\int_0^{0{,}04}\hat{i}\cdot\hat{j}\,dy = 0$$

c) La diferencia de potencial $V_C - V_A$, ha sido calculada por partes en los apartados *a)* y *b)*:

$$V_C - V_A = (V_B - V_A) - (V_B - V_C) = -3{,}2\cdot 10^2\ V - 0$$

$$V_C - V_A = -3{,}2\cdot 10^2\ V$$

17.6. Un plano, que se puede considerar infinito, tiene una densidad superficial de carga $\sigma = 8{,}8\cdot 10^2$ nC/m² y su potencial es $V_{\text{plano}} = 2{,}0\cdot 10^3$ V. Determinar:

a) Las posiciones que tienen potencial nulo.

b) El potencial a 10 cm y a 30 cm del plano.

Una carga puntual de 40 nC se encuentra a 10 cm del plano, seguidamente se desplaza en línea recta hasta la posición alejada 30 cm del plano.

c) Calcular la variación de la energía potencial electrostática de la carga puntual en este desplazamiento.

Solución

a) La expresión del potencial generado por el plano infinito en cualquier punto del espacio es:

$$\text{V}(x) - \text{V}_{\text{Plano}} = -\int_0^x \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\int_0^x E\cdot dx = -\int_0^x \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^x dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,x$$

$$V(x) = V_{\text{Plano}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,x$$

El potencial del plano es de $2{,}0\cdot 10^3$ V, para determinar las posiciones en las que el potencial es nulo, basta con sustituir los valores en la expresión anterior y despejar la incógnita x:

$$0 = 2{,}0\cdot 10^3\ V - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,x$$

$$x = \frac{2\varepsilon_0}{\sigma}\cdot(2{,}0\cdot 10^3\ V) = \frac{2\cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}}{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}}\cdot(2{,}0\cdot 10^3\ V) = 4{,}0\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

O sea, todos los puntos que equidistan 4,0 cm del plano, tienen un potencial eléctrico nulo.

b) Potencial a 10 cm y 30 cm del plano.

$$V(10\text{ cm}) = 2{,}0\cdot 10^3\text{ V} - \frac{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}}{2\cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}}\cdot 10\cdot 10^{-2}\text{ m} = (2{,}0 - 5{,}0)\cdot 10^3\ V = -3{,}0\cdot 10^3\ V$$

$$V(30\text{ cm}) = 2{,}0\cdot 10^3\ V - \frac{8{,}8\cdot 10^{-7}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}}{2\cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}}\cdot 30\cdot 10^{-2}\text{ m} = (2{,}0 - 15)\cdot 10^3\ V = -13\cdot 10^3\text{ V}$$

c) La variación de energía potencial electrostática de una carga puntual de 40 nC al pasar de la posición $x_1 = 10$ cm a la posición $x_2 = 30$ cm, es:

$$\Delta U = \Delta V\cdot q = (-13\cdot 10^3\ V - (-3{,}0\cdot 10^3\ V))\cdot 40\cdot 10^{-9}\text{ C}$$

$$\Delta U = -10\cdot 10^3\text{ V}\cdot 40\cdot 10^{-9}\text{ C} = -4{,}0\cdot 10^{-4}\text{ J}$$

17.7. Una esfera de 20 cm de radio posee una carga $Q = 50\ \mu$C. A 30 cm del centro de la esfera se encuentra una carga puntual $q = -20\ \mu$C. Determinar:

a) El potencial creado por la esfera en las posiciones $r_1 = 30$ cm y $r_2 = 60$ cm.

b) La variación de energía potencial electrostática de la carga puntual al trasladarla desde la posición r_1 a r_2.

c) El trabajo necesario para trasladar la carga puntual desde la posición r_1 hasta r_2.

Solución

a) El potencial creado por la esfera en las posiciones r_1 y r_2 es:

$$V(r_1) = k\,\frac{Q}{r_1} = 9{,}0\cdot 10^9\,\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\cdot\left[\frac{50\cdot 10^{-6}\text{ C}}{30\cdot 10^{-2}\text{ m}}\right] = 15\cdot 10^5\ V$$

$$V(r_2) = k\frac{Q}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \left[\frac{50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{60 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}\right] = 7{,}5 \cdot 10^5\ V$$

b) La variación de energía electrostática de la carga puntual al trasladarla desde r_1 hasta r_2 es:

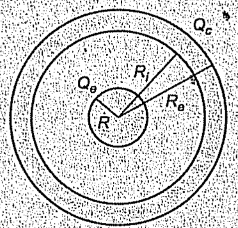
$$\Delta U = \Delta V \cdot q = (7{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{V} - 15 \cdot 10^5\,V) \cdot (-20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C})$$

$$\Delta U = (-7{,}5 \cdot 10^5\,V) \cdot (-20 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}) = 15\,\mathrm{J}$$

c) El trabajo necesario para trasladar la carga puntual desde la posición r_1 hasta r_2.

$$W = -\Delta U \qquad W = -15\,\mathrm{J}$$

17.8. Un sistema de cargas en equilibrio electrostático está compuesto por una esfera conductora, con carga Q_e y radio R y una corteza esférica conductora concéntrica con carga Q_c y radio interno R_i y externo R_e. Determinar:



a) Distribución de cargas en las superficies interna y externa de la corteza.
b) El potencial de la corteza (respecto al infinito).
c) La diferencia de potencial entre la esfera y la corteza, $V_e - V_c$.
d) El potencial de la esfera (respecto al infinito).

Solución

a) Carga en la superficie interna de la corteza:

La corteza esférica se encuentra en equilibrio electrostático. El campo eléctrico en su interior es nulo y no hay ninguna línea de campo que atraviese este conductor. Por tanto, todas las líneas de campo que salen desde la esfera interior deben finalizar en la superficie interna de la corteza, y ello implica que la carga existente en la superficie interna es igual que la de la esfera en módulo, pero de signo opuesto:

$$Q_{\text{corteza interna}} = -Q_e$$

Carga en la superficie externa de la corteza:
En la corteza esférica se cumple:

$$Q_c = Q_{\text{corteza externa}} + Q_{\text{corteza interna}}$$

Como es conocido el valor de la carga de la superficie interna, se puede despejar la carga de la superficie interna:

$$Q_{\text{corteza externa}} = Q_c - Q_{\text{corteza interna}} = Q_c - (-Q_e) = Q_c + Q_e$$

b) Visto desde fuera, el sistema se comporta de igual forma que una esfera de radio R_e y carga $Q_c + Q_e$. El campo eléctrico que genera en el exterior de la corteza ($r > R_e$) es:

$$\vec{E} = k\frac{Q_e + Q_c}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Este campo eléctrico crea una diferencia de potencial entre dos puntos:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} k\frac{Q_e + Q_c}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -k(Q_e + Q_c)\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -k(Q_e + Q_c)\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -k(Q_e + Q_c)\left[-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right] = k\frac{Q_e + Q_c}{r_B} - k\frac{Q_e + Q_c}{r_A}$$

Para calcular el potencial de la corteza respecto del infinito, se tomará como punto A la superficie de la corteza ($r_A = R_e$) y como punto B el infinito ($r_B = \infty$). De esta forma:

$$V_\infty - V_{R_e} = k\frac{Q_e + Q_c}{\infty} - k\frac{Q_e + Q_c}{R_e} = 0 - k\frac{Q_e + Q_c}{R_e}$$

Si se escoge el infinito como origen de potencial, $V_\infty = 0$ y el potencial en la superficie de la corteza es:

$$V_{R_e} = k\frac{Q_e + Q_c}{R_e}$$

Al ser la corteza conductora, el campo eléctrico en su interior es nulo y su potencial es por tanto constante (lo cual no significa que deba ser también nulo). El potencial de cualquier conductor es el valor del potencial de su superficie.

c) Para determinar la diferencia de potencial entre la esfera y la corteza es preciso conocer el campo eléctrico existente entre ambos cuerpos ($R < r < R_i$). Es fácil comprobar que la expresión de este campo eléctrico es:

$$\vec{E}' = k\frac{Q_e}{r^2}\hat{r}$$

Y la diferencia de potencial es:

$$V_c - V_e = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -\int_{R}^{R_i} k\frac{Q_e}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r} = -k\,Q_e \int_{R}^{R_i} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -k\,Q_e\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{R_i} = -k\,Q_e\left[-\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right]$$

$$V_c - V_e = k\frac{Q_e}{R_i} - k\frac{Q_e}{R}$$

d) Para determinar el potencial de la esfera respecto al infinito, sólo hay que despejar V_e en la expresión anterior y sustituir el valor obtenido de V_c en el apartado *b)*:

$$V_e = V_c + k\frac{Q_e}{R} - k\frac{Q_e}{R_i} = k\frac{Q_e + Q_c}{R_e} + k\frac{Q_e}{R} - k\frac{Q_e}{R_i}$$

17.9. Un sistema está formado por dos planos cuadrados conductores de 100 mm de lado paralelos entre sí y separados 0,20 mm. La carga del primer plano es $q_1 = 256$ pC y la del segundo plano es $q_2 = -256$ pC. Determinar:

a) El módulo del campo eléctrico en el espacio comprendido entre los planos.

b) El potencial del plano con carga positiva respecto al de carga negativa.

c) La relación q_1/V, donde V es el valor determinado en el apartado *b)*

Solución

a) Los campos creados por cada plano tienen el mismo módulo ya que, en valor absoluto, sus cargas son idénticas:

Módulo del campo creado por el plano 1:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{q_1}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0}\ ;\ E_1 = \frac{256 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}}{2 \cdot (100 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}} = 1{,}45 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

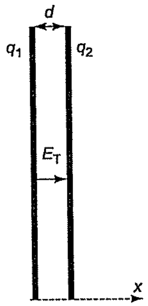
Módulo del campo creado por el plano 2:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{q_2}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0}\ ;\ E_2 = \frac{256 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}}{2 \cdot (100 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}} = 1{,}45 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Si los dos planos son paralelos, el campo eléctrico total establecido en el espacio comprendido entre planos será:

$$E_T = E_1 + E_2 = \frac{q_1}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0} + \frac{q_2}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0} = \frac{q_1}{A \cdot \varepsilon_0} = 1{,}45 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} + 1{,}45 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 2{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

b) Se calculará la diferencia de potencial $V_- - V_+$, donde V_- es el potencial electrostático de la placa con carga negativa y V_+, es el potencial electrostático de la placa con carga positiva:



$$V_- - V_+ = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d E \cdot dx = -\int_0^d \frac{q_1}{A \cdot \varepsilon_0} \cdot dx = -\frac{q_1}{A \cdot \varepsilon_0}\,[x]_0^d$$

$$V_- - V_+ = -\frac{q_1}{A \cdot \varepsilon_0}\,d\ ;\ V_- - V_+ = -2{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = -0{,}58\ \mathrm{V}$$

En realidad el apartado *b)* pide que se calcule el potencial del plano con carga positiva respecto al de carga negativa. Llamaremos V a ese valor:

$$V = V_+ - V_- = -(V_- - V_+) = 0{,}58\ V$$

c) Como $V = V_+ - V_- = -(V_- - V_+) = \dfrac{q_1}{A \cdot \varepsilon_0}\,d$, la relación $\dfrac{q_1}{V}$, tendrá un valor:

$$\frac{q_1}{V} = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} = 0{,}44 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$$

Se puede comprobar que $\dfrac{q_1}{V}$ es independiente del valor de la carga y potencial del sistema de cargas, ya que sólo depende de características geométricas del sistema:

- — Área de planos (A).
- — Distancia entre planos (d).
- — Constante ε_0.

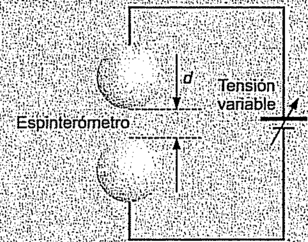
Esta relación se denomina capacidad.

17.10. Un espinterómetro es un aparato compuesto por dos esferas, huecas, de cobre enfrentadas entre sí cuya separación se puede regular. Entre las esferas hay aire. Se conecta el espinterómetro a un potencial variable V y se va aumentando hasta que salta una chispa entre las esferas. Si las esferas del espinterómetro tienen un diámetro de 80 mm y están separadas 100 mm, determinar:

a) La carga acumulada en cada esfera del espinterómetro hasta el momento en que salta la chispa.

b) El potencial eléctrico aplicado al espinterómetro.

NOTA: El aire se comporta como un aislante eléctrico si el campo eléctrico no es superior a $3{,}0 \cdot 10^6$ V/m.

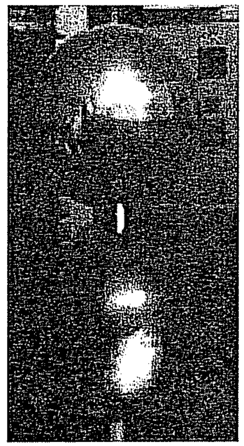


Solución

a) Al aplicar tensión al espinterómetro, se va acumulando carga en las esferas. La carga tendrá el mismo valor en las dos esferas, pero con signos opuestos, la esfera superior será cargada positivamente y la esfera inferior negativamente (ver figura).

Cuando la carga acumulada en las esferas vaya aumentando, también lo hará el campo creado por éstas. El campo total es la suma de los campos creados por cada esfera por separado y *será más intenso en la línea que une sus centros,* por tanto, cuando el campo mínimo en esa línea supere el valor de $3{,}0 \cdot 10^6$ V/m, saltará una chispa entre ellas.

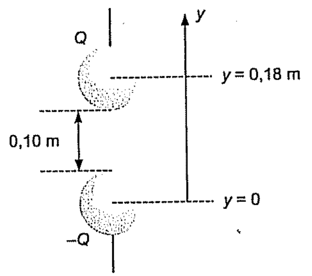
Se podría afirmar que el valor mínimo de campo eléctrico en la línea que une sus centros se encuentra en el punto medio de esta línea, pero vamos a comprobar que efectivamente es así.



Descarga producida entre las esferas del espinterómetro del laboratorio de alta tensión del departamento de ingeniería eléctrica de la UPC.

Para calcular el campo total *en la línea que une los centros de las esferas*, se tomarán las posiciones de los centros de las esferas en un eje vertical y.

Si se toma la posición de la esfera inferior coincidente con el origen, el centro de la segunda esfera estará en la posición $y = 0{,}18$ m.



Campo eléctrico creado por la esfera con carga negativa, $-Q$:

$$\vec{E}(y) = -k\frac{Q}{y^2}\hat{j} \quad (y > 40 \text{ mm})$$

Campo eléctrico creado por la esfera con carga positiva, Q:

$$\vec{E}(y) = -k\frac{Q}{(y-0{,}18)^2}\hat{j} \quad (y > 140 \text{ mm})$$

El campo total en la línea de unión de ambos centros será:

$$\vec{E}(y) = -\left(k\frac{Q}{y^2} + k\frac{Q}{(y-0{,}18)^2}\right)\hat{j} \quad (40 \text{ mm} < y < 140 \text{ mm})$$

Derivando la ecuación anterior respecto de y, e igualando a cero, se obtiene la posición en la que el módulo de este campo eléctrico es mínimo. Esa posición es:

$$y = 0{,}090 \text{ m}$$

$$E_{\min}(y = 0{,}09 \text{ m}) = \left(k\frac{Q}{(0{,}09)^2} + k\frac{Q}{(0{,}09-0{,}18)^2}\right) = 2\cdot k\frac{Q}{(0{,}09)^2}$$

Si dicho valor mínimo es $3{,}0\cdot 10^6$ V/m, se producirá una chispa entre las esferas, a partir de este dato se puede obtener la carga almacenada en las esferas.

$$E_{\min}(y = 0{,}09 \text{ m}) = 3{,}0\cdot 10^6\frac{V}{\text{m}} = 2\cdot k\frac{Q}{(0{,}09)^2}$$

$$Q = \frac{3{,}0\cdot 10^6\frac{V}{\text{m}}\cdot(0{,}09 \text{ m})^2}{2\cdot k} = \frac{3{,}0\cdot 10^6\cdot 81\cdot 10^{-4}}{2\cdot 9{,}0\cdot 10^9}\text{ C} = 13{,}5\cdot 10^{-7}\text{ C} = 1{,}35\ \mu\text{C}$$

b) El potencial de la esfera con carga positiva es:

$$V_+ = k\frac{Q}{R} = 9{,}0\cdot 10^9\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\frac{1{,}35\cdot 10^{-6}\text{ C}}{4{,}0\cdot 10^{-2}\text{ m}} = 3{,}0\cdot 10^5\ V$$

Y el de la esfera negativa:

$$V_- = k\frac{Q}{R} = 9{,}0\cdot 10^9\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\frac{-1{,}35\cdot 10^{-6}\text{ C}}{4{,}0\cdot 10^{-2}\text{ m}} = -3{,}0\cdot 10^5\ V$$

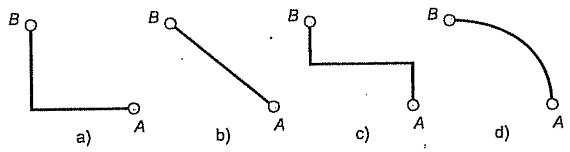
Por tanto la diferencia de potencial es:

$$V = V_+ - V_- = 6{,}0\cdot 10^5\ V = 0{,}60\ MV$$

CUESTIONES

TRABAJO

17.1. El trabajo que efectúa la fuerza de un campo electrostático para trasladar una carga de prueba, q_0, del punto A al punto B:



a) Es menor si se sigue la trayectoria *b*.

b) Es igual para todas las trayectorias si el campo es uniforme.

c) Es mayor si se sigue la trayectoria *d*.

d) Es siempre igual cualquiera que sea la trayectoria seguida.

17.2. Considerar una esfera conductora de radio R, con una carga $Q = 50\ \mu$C, en equilibrio electrostático:

a) El trabajo que hay que hacer para mover una carga puntual entre dos puntos del interior de la esfera es 50 J.

b) El campo electrostático en puntos del exterior de la esfera es $\vec{E} = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}\,\hat{r}$.

c) El trabajo que hay que hacer para mover una carga puntual, q, desde el infinito a la superficie de la esfera es $W = -\dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{Q \cdot q}{R}$.

d) La densidad volúmica de carga será $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\,\pi R^3}$.

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

17.3. Si movemos una carga de $-1{,}0\ \mu$C entre dos puntos de la superficie de un conductor separados 1,0 m, ¿cuál será la variación de energía potencial que habrá experimentado esta carga?

a) 9,0 kJ *c)* Depende del potencial del conductor.

b) −9,0 kJ *d)* 0

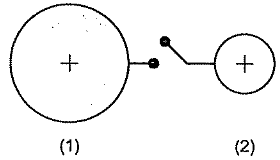
17.4. Trasladamos una carga puntual en la dirección y sentido de un campo eléctrico. La energía potencial de la carga:

a) Aumentará. *c)* Se mantendrá constante.

b) Disminuirá. *d)* La respuesta depende del signo de la carga.

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

17.5. Dos esferas metálicas (1) y (2), de radio R_1 y R_2, siendo $R_1 > R_2$, están cargadas positivamente. Se conectan las esferas mediante un conductor. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático las cargas respectivas de las esferas son Q_1 y Q_2, y los potenciales respectivos son V_1 y V_2. Podemos afirmar que:



a) $V_1 > V_2$ y $Q_1 > Q_2$ *c)* $V_1 = V_2$ y $Q_1 > Q_2$

b) $V_1 > V_2$ y $Q_1 = Q_2$ *d)* $V_1 = V_2$ y $Q_1 = Q_2$

17.6. En un conductor eléctrico de forma arbitraria cargado y en equilibrio electrostático se cumple que:

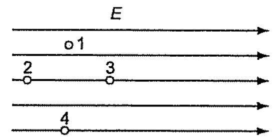
a) La densidad superficial de carga y el potencial siempre son iguales en todos los puntos.

b) El potencial es igual en todos los puntos.

c) La densidad superficial de carga es mayor en los puntos de menor curvatura.

d) El potencial es mayor en los puntos de mayor curvatura.

17.7. ¿Qué punto del campo eléctrico de la figura tendrá mayor potencial?



a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4

17.8. En una región del espacio hay dos esferas conductoras de diferente radio unidas por un hilo conductor. El conjunto está en equilibrio electrostático. Se puede afirmar que:

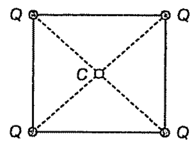
a) La carga de cada una de ellas será la misma.

b) El potencial al que se encuentren será el mismo.

c) El campo eléctrico creado por el conjunto en todo el espacio será nulo.

d) Si una de las esferas tiene carga positiva, la otra la tendrá negativa.

17.9. El sistema de la figura está formado por cuatro cargas idénticas situadas en los vértices de un rectángulo. Es correcto afirmar que en el centro del rectángulo:



a) El campo eléctrico y el potencial eléctrico son nulos.

b) El campo eléctrico no es nulo, pero el potencial eléctrico sí es nulo.

c) El campo eléctrico es nulo y el potencial eléctrico es no nulo.

d) Tanto el campo eléctrico como el potencial eléctrico son no nulos.

17.10. Dos esferas conductoras están unidas mediante un hilo conductor. El potencial de las esferas es el mismo:

a) Siempre.

b) Nunca.

c) Cuando el hilo conductor es muy largo y prácticamente no hay influencia de una esfera sobre la otra.

d) Cuando las cargas iniciales de las esferas son las mismas.

17.11. Considerar un cilindro conductor con una carga Q en equilibrio electrostático. Se puede afirmar que:

a) El campo electrostático en el interior del cilindro es $\vec{E} = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{r}$.

b) El campo en el interior del cilindro es $\vec{E} = 0$.

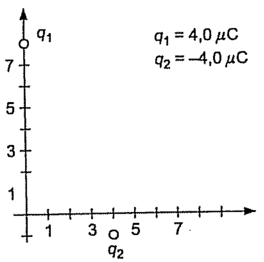
c) La diferencia de potencial entre dos puntos del interior del cilindro es $\Delta V = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$.

d) El flujo de campo a través de cualquier superficie que contenga el cilindro es cero.

17.12. El potencial en un punto creado por una carga puntual q es V. Consideramos el origen de potencial en el infinito. Si la distancia entre el punto y la carga se cuadruplica, el potencial se hace igual a:

a) $V/4$ *b)* $V/16$ *c)* $2V$ *d)* $4V$

17.13. Dos cargas $q_1 = 4{,}0\ \mu$C y $q_2 = -4{,}0\ \mu$C se hallan en las posiciones (0, 8,0 m) y (4,0 m, −1,0 m) respectivamente. El potencial que generan en la posición (0,0), tomando como origen de potenciales el infinito, es:



a) 13 kV *c)* −13 kV

b) − 4,2 kV *d)* −4,5 kV

17.14.1. Una esfera conductora de radio a está cargada con una carga Q. Envolviendo esta esfera hay una corteza esférica extremadamente delgada, concéntrica con la anterior, también conductora de radio b ($b > a$) que tiene carga neta cero. Si tomamos como origen de potencial el infinito, el potencial en la corteza esférica de radio b será:

a) Cero *c)* $V_b = k\dfrac{Q}{b} - k\dfrac{Q}{a}$

b) $V_b = k\dfrac{Q}{b}$ *d)* $V_b = k\dfrac{Q}{b} + k\dfrac{Q}{a}$

17.14.2. La diferencia de potencial entre un punto de la esfera de radio a y un punto de la corteza de radio b es:

a) $V_b - V_a = k \cdot Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$ *c)* $V_b - V_a = \dfrac{k \cdot Q}{3}\left(\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b^3}\right)$

b) $V_b - V_a = k \cdot Q\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ *d)* $V_b - V_a = 0$

17.15. En una región del espacio el campo electrostático varía según la función $\vec{E}(x) = 3x^2\,\hat{i}$ (en unidades del SI). La diferencia de potencial entre un punto A ($x_A = 2{,}0$ m) y un punto B ($x_B = 6{,}0$ m) es:

a) $V_B - V_A = 0{,}21$ kV

b) $V_B - V_A = -0{,}21$ kV

c) $V_B - V_A = 32$ V

d) La diferencia de tensión depende del camino seguido al ir de A a B.

17.16. Si se toma como origen de potencial la posición $x = 0$, la función potencial correspondiente a un campo eléctrico $\vec{E}(x) = (6x^2 - 2)\,\hat{i}$ es:

a) $V(x) = 6x + 3$ *c)* $V(x) = -2x^3 + 2x + 2$

b) $V(x) = 2x^3 - 2x$ *d)* $V(x) = -2x^3 + 2x$

17.17. Una esfera de radio $R = 0{,}25$ m tiene una carga $Q = -10\ \mu$C. Si se toma como origen de potencial el infinito, se puede afirmar que:

a) El potencial de la esfera es $V = 3{,}6 \cdot 10^5$ V.

b) El potencial decrece al alejarnos de la esfera.

c) El potencial de la esfera es $V = -1{,}4 \cdot 10^6$ V.

d) El potencial de la esfera es menor que el potencial en el infinito.

17.18. En el interior de un conductor cargado que se encuentra en equilibrio electrostático:

a) El campo y el potencial son nulos.

b) El campo es no nulo y el potencial es uniforme.

c) El campo es nulo y el potencial es uniforme.

d) El campo es uniforme y el potencial es nulo.

17.19. Nos movemos en la dirección y sentido de un campo eléctrico. Es correcto afirmar que:

a) Nos dirigimos hacia una carga positiva.

b) El potencial disminuye en la dirección del movimiento.

c) La energía potencial electrostática aumentará siempre en la dirección del movimiento.

d) El potencial aumenta en la dirección del movimiento.

17.20. Una esfera conductora de radio $R = 20$ cm, en equilibrio electrostático, está cargada con 3,0 μC. ¿Cuál es la diferencia de tensión entre un punto situado a 10 cm del centro de la esfera y un punto que dista 30 cm del centro?

a) $1{,}8 \cdot 10^2$ kV

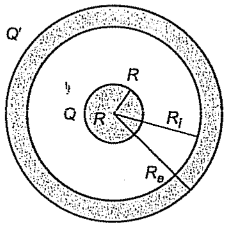
b) -45 kV

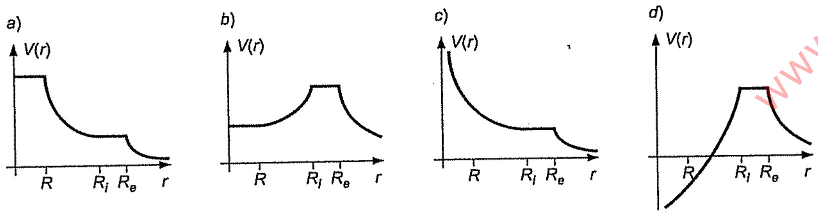
c) Depende del origen de potenciales que hayamos considerado.

d) 0

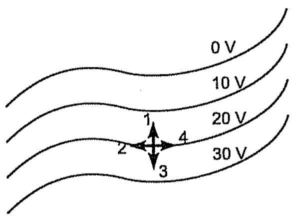
CURVAS DE POTENCIAL

17.21. La figura muestra dos conductores esféricos de cargas $Q > 0$, $Q' < 0$ y $|Q| > |Q'|$. Tomando como origen de potencial el infinito, la curva que describe el potencial en función de la posición es:





17.22. El vector que mejor representa el campo eléctrico en el punto x de la línea equipotencial de 20 V es



a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4

SOLUCIONES

17.1. *d)*
17.2. *c)*
17.3. *d)*
17.4. *d)*
17.5. *c)*
17.6. *b)*
17.7. *b)*
17.8. *b)*
17.9. *c)*
17.10. *a)*
17.11. *b)*
17.12. *a)*
17.13. *b)*
17.14.1. *b)*
17.14.2. *a)*
17.15. *b)*
17.16. *d)*
17.17. *d)*
17.18. *c)*
17.19. *b)*
17.20. *b)*
17.21. *a)*
17.22. *a)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Si se abandona un electrón desde el reposo en un punto A, cuyo potencial es de 0,90 kV, ¿cuál será la energía cinética en un punto B, donde el potencial es de 2,7 kV?**

Sol.: $3{,}0 \cdot 10^{-16}$ J = 1,8 keV

2 **Una partícula con carga $q = 20\ \mu$C se mueve en el interior de un campo electrostático. Cuando pasa de un punto A con potencial $V_A = 3{,}0$ V a un punto B, la variación de energía cinética de la partícula es $40 \cdot 10^{-6}$ J. ¿Cuál es el potencial del punto B?**

Sol.: $V_B = 1{,}0$ V

3 **Un sistema está formado por tres cargas puntuales: $q_1 = 20\ \mu$C, $q_2 = -10\ \mu$C y $q_3 = 10\ \mu$C, que se hallan en las posiciones (0,0, 6,0 cm), (8,0 cm, 6,0 cm) y (4,0 cm, 3,0 cm) respectivamente. Determinar:**

a) La energía potencial electrostática del sistema de cargas.

b) El potencial generado por el sistema de cargas en el origen de coordenadas.

c) La energía electrostática de una carga $q' = 1{,}0$ nC situada en el origen de coordenadas.

Sol.: *a)* $-4{,}5$ J, *b)* $39 \cdot 10^5$ V, *c)* 3,9 mJ

4 **En una zona del espacio hay un campo eléctrico de valor $\vec{E} = 2{,}0 \cdot 10^4$ V/m $\hat{i}$. Calcular la variación de energía potencial electrostática que sufre una carga $q = 40\ \mu$C al pasar desde la posición $x_1 = 1{,}0$ m a $x_2 = 3{,}0$ m.**

Sol.: $-1{,}6$ J

5 **La componente x de un campo eléctrico es $E(x) = 5{,}5 \cdot x^3$ V/m. Las otras componentes son nulas. Calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de los planos $x = 1{,}0$ m y $x = 5{,}0$ m.**

Sol.: $-0{,}86$ kV

6 **Una placa conductora cuadrada de lado $L = 400$ mm tiene una carga $Q = 8{,}00\ \mu$C. En un punto A, a 0,50 mm del plano, hay una carga puntual $q = 88$ nC. En la perpendicular del plano que pasa por el punto A pero alejado 1,0 mm se encuentra un punto B. Un tercer punto C se encuentra a 1,0 mm del plano pero 1,0 mm por encima del punto B. Determinar la variación de energía potencial electrostática:**

a) Al desplazar la carga q desde A hasta B, $U_B - U_A$.

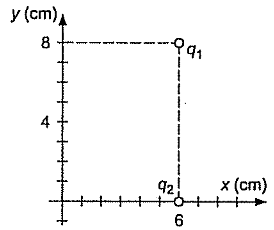
b) Al desplazar la carga q desde A hasta C, $U_C - U_A$, calculada a través de una trayectoria en línea recta que une A con C.

c) Al desplazar la carga q desde A hasta C, $U_C - U_A$, calculada a través de la trayectoria en L que une A con B y B con C.

NOTA: considerar que el plano se comporta como un plano infinito.

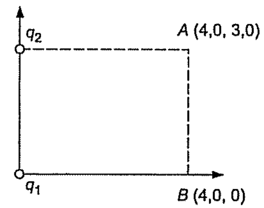
Sol.: *a)* $-2{,}5 \cdot 10^{-4}$ J, *b)* $-2{,}5 \cdot 10^{-4}$ J, *c)* $-2{,}5 \cdot 10^{-4}$ J

7 **En la figura, $q_1 = -10\ \mu$C y se encuentra en la posición (6,0, 8,0) en centímetros, y $q_2 = 20\ \mu$C, que está en la posición (6,0, 0,0) también en centímetros. Tomando como origen de potencial el infinito, ¿cuál es el valor del potencial en el punto (0,0, 8,0)?**



Sol.: $0{,}30 \cdot 10^6$ V

8 **En la figura adjunta hay dos cargas: $q_1 = 25$ nC y $q_2 = -16$ nC. Determinar:**



a) El potencial eléctrico en los puntos A = (4,0 cm, 3,0 cm) y B = (4,0 cm, 0 cm).

b) La diferencia de potencial $V_B - V_A$.

Sol.: *a)* $V_A = 0{,}90$ kV, $V_B = 2{,}7$ kV, *b)* $V_B - V_A = 1{,}8$ kV

9 **En una zona del espacio hay un potencial eléctrico de valor $V(x) = 4{,}0 \cdot 10^3 x + 4{,}0 \cdot 10^3$ (el potencial viene dado en voltios si la distancia se expresa en metros). En la posición $x_1 = 1{,}0$ m hay una carga $q = -1{,}0\ \mu$C y masa $m = 0{,}10$ mg en reposo. Se deja evolucionar libremente la carga y ésta se desplaza hasta llegar a la posición $x_2 = 3{,}0$ m. Determinar la velocidad con que llegará a la posición x_2.**

Sol.: $v = 4{,}0 \cdot 10^2$ m/s

10 **Un campo eléctrico viene dado por la expresión $\vec{E}(z) = 4{,}0 \cdot z\,\hat{k}$. Sea un punto A situado en $z = 2{,}0$ m y un punto B situado en $z = -1{,}0$ m:**

a) ¿Cuánto vale la diferencia de potencial $V_B - V_A$?

b) ¿Cuál será la variación de energía potencial que experimentará una carga $q = -2{,}0\ \mu$C al pasar de A a B?

Sol.: *a)* 6,0 V, *b)* $-12\ \mu$J

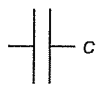
CAPÍTULO

18

CONDENSADORES Y DIELÉCTRICOS

18.1. CONDENSADORES

Un condensador es un sistema compuesto por dos conductores, de formas idénticas o muy similares, aislados entre sí y que se encuentran separados una distancia generalmente muy pequeña, del orden de milímetros o incluso décimas de milímetro. El símbolo del condensador es:



Un condensador tiene diversas utilidades, la más común es la de almacenar carga. Aunque no sólo ésta es su aplicación, en el tema de corriente alterna se comprobará que los sistemas de condensadores permiten mejorar la demanda de energía de la red de distribución, actuación que puede ser conveniente desde el punto de vista económico.

Los conductores que constituyen el condensador se denominan armaduras. En un condensador cargado, cada armadura contiene carga, aunque de diferente signo.

En el sencillo circuito de la Figura 18.1, se observa un condensador conectado a una batería de fuerza electromotriz ε por un circuito puramente resistivo. La R de la Figura 18.1 es el equivalente de la resistencia de los cables de conexión con el condensador.

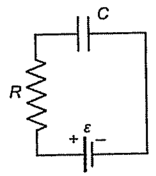


Figura 18.1

La armadura izquierda del condensador está conectada al polo de mayor potencial de la batería (polo positivo), mientras que la armadura derecha está directamente conectada al polo de menor potencial de la batería (polo negativo). Por tanto las armaduras izquierda y derecha tendrán cargas positiva y negativa respectivamente.

El condensador de la Figura 18.1 se dice que tiene una carga «q» igual al valor absoluto de la carga de cualquiera de las armaduras.

Si la batería de alimentación fuese una batería de tensión variable, la carga almacenada en el condensador no se mantendría constante, sino que dependería de la tensión de la batería. En corriente continua, cuando ya no hay corriente por la rama del condensador, independientemente de la tensión de alimentación y de la carga almacenada en cada caso, la relación entre la carga almacenada y la tensión de alimentación es un factor constante conocido como capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = cte$$

La capacidad de un condensador es una constante que depende de sus características físicas y del material que hay entre las armaduras.

La mayoría de las ocasiones se hace referencia a un condensador plano. Un condensador plano es aquel cuyas armaduras pueden considerarse que tienen áreas iguales y planas. Para un condensador plano, con separación entre placas d y área de armaduras A, la capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}$$

La unidad de la capacidad en el sistema internacional es el Farad (F). El Farad, al igual que el Coulomb es una unidad muy grande por lo que usualmente los condensadores tienen valores que son submúltiplos del Farad.

La permitividad eléctrica en el vacío también puede expresarse con unidades en Farads:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

18.2. ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Condensadores en serie

Dado un sistema de N condensadores conectados en serie, la capacidad equivalente del sistema se calcula:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

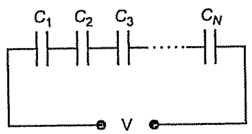


Figura 18.2

En una conexión en serie, sólo las armaduras en contacto con los bornes de la batería tienen continuidad eléctrica y se cargan. Esta carga genera un campo eléctrico que provoca una distribución de carga en el resto del sistema de condensadores, tal y como se observa en la Figura 18.3:

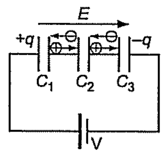


Figura 18.3

En el conductor que une dos armaduras de distintos condensadores conectados en serie, las cargas móviles negativas se desplazan en sentido opuesto al campo eléctrico hasta llegar a la armadura, donde ya no pueden continuar su desplazamiento. Y se crea, pues, un exceso de carga positiva en la otra armadura.

Evidentemente ambas cargas son idénticas, aunque de diferente signo, ya que el conductor no tiene carga neta. El proceso de desplazamiento de cargas finaliza cuando todos los conductores se encuentran en equilibrio electrostático y tiene lugar cuando, *en los conductores*, el campo eléctrico creado por la nueva distribución de cargas contrarresta el campo eléctrico inicial producido por las cargas suministradas por la batería, lo cual sólo es posible si la carga suministrada por la batería y la que se distribuye a continuación tienen el mismo valor.

Este proceso es prácticamente instantáneo y finaliza con todos los condensadores cargados con el mismo valor de carga:

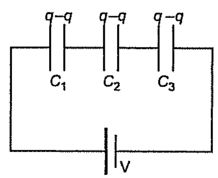


Figura 18.4

Así pues, en los sistemas de condensadores en serie, todos los condensadores tienen la misma carga, independientemente de su capacidad y coincide con la carga suministrada por la fuente de potencial existente entre los extremos del sistema de condensadores.

Condensadores en paralelo

Dado un sistema de N condensadores conectados en paralelo, la capacidad equivalente del sistema se calcula:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

En un sistema de condensadores en paralelo, todos los condensadores se encuentran al mismo potencial. La carga almacenada en cada condensador depende del valor de su capacidad. La carga total del sistema es la suma de las cargas parciales de los condensadores en paralelo.

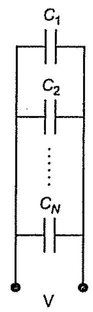


Figura 18.5

18.3. ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR

La energía almacenada en un condensador C, con carga Q que tiene una diferencia de potencial entre armaduras V ($V = Q/C$), se puede calcular mediante cualquiera de las siguientes expresiones:

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La energía almacenada en un condensador se puede considerar confinada en forma de campo eléctrico. Esto es, allí donde hay un campo eléctrico, hay energía. Para un condensador plano de placas paralelas:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 E^2 \cdot Ad$$

Donde el producto $A \cdot d$ es el volumen definido entre las armaduras del condensador.

Se define la densidad volúmica de energía electrostática, η_E, como la energía electrostática por unidad de volumen:

$$\eta_E = \frac{U}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 E^2 \text{ (1)}$$

18.4. DIELÉCTRICOS

Un dieléctrico es un material que no permite el movimiento libre de cargas en su seno. Supondremos en adelante que los dieléctricos son materiales homogéneos e isótropos.

En la mayoría de las ocasiones los condensadores comerciales tienen dieléctricos entre sus armaduras. Los motivos pueden ser varios, pero se pueden resumir en los siguientes:

— El dieléctrico es un soporte físico que evita el cortocircuito de las armaduras de un condensador ya que separa físicamente las armaduras entre sí.
— Permite almacenar más carga en el condensador (para los mismos valores de tensión de alimentación).
— Evita la descarga entre las armaduras.

Veamos a continuación a qué es debido:

Si un condensador de capacidad C_0 se conecta a una batería de tensión V, la carga del condensador será Q ($Q = C_0 \cdot V$). Si se desconecta el condensador de la batería y a continuación se introduce un dieléctrico que ocupa todo el espacio existente entre las armaduras, la tensión entre armaduras se ve reducida a un valor V' ($V' < V$). La relación V/V' es un factor adimensional que sólo depende del material dieléctrico:

$$\frac{V}{V'} = \varepsilon_r$$

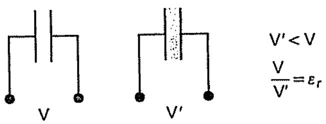


Figura 18.6

Donde ε_r es la permitividad eléctrica del dieléctrico ($\varepsilon_r \geq 1$).

De esta última expresión se deduce que el campo eléctrico entre las armaduras del condensador, disminuye en la misma proporción que la diferencia de potencial. Si la separación entre las armaduras del condensador es d, se cumple que:

$$V = E_0 \cdot d \qquad V' = E \cdot d$$

(1) Esta expresión es válida en ausencia de materiales dieléctricos. En presencia de dieléctricos, hay que sustituir ε_0 por el producto $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$.

Donde $\vec{E}_0$ y $\vec{E}$ son los campos eléctricos que hay entre las armaduras del condensador en ausencia y en presencia del dieléctrico respectivamente. Así:

$$\frac{V}{V'} = \varepsilon_r \qquad \frac{E_0 \cdot d}{E \cdot d} = \frac{E_0}{E} = \varepsilon_r$$

Como la carga del condensador no ha tenido camino por el que poder marchar, el condensador con el dieléctrico mantiene la misma carga Q. Por tanto la capacidad del nuevo condensador así formado, C, ha aumentado:

$$C = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{\frac{V}{\varepsilon_r}} = \varepsilon_r \cdot \frac{Q}{V} = \varepsilon_r \cdot C_0$$

Como el valor de ε_r es mayor o igual que uno, entonces $C \geq C_0$.

Este fenómeno se puede explicar con un simple modelo microscópico del dieléctrico:

Al introducir un dieléctrico en una zona del espacio en la que hay un campo eléctrico ($\vec{E}_0$), los centros de carga positivo y negativo de las moléculas del dieléctrico se orientan según la dirección y sentido de $\vec{E}_0$. Ello origina la aparición de unas distribuciones de carga ligada (Q_L) según se observa en la Figura 18.8.

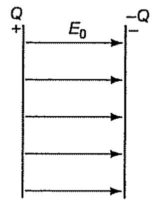


Figura 18.7

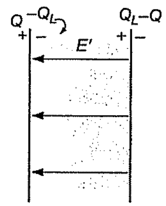


Figura 18.8

La carga ligada crea por sí misma un campo eléctrico (E') que, en la mayoría de los materiales dieléctricos es de sentido opuesto al campo originario E_0. De esta forma el campo eléctrico resultante (E) es la suma vectorial de E_0 y E':

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

En módulo, si E' es de sentido opuesto a E_0:

$$E = E_0 - E'$$

A partir de la ecuación anterior se puede obtener la relación entre la carga libre Q, que origina el campo E_0 y la carga ligada Q_L que crea el campo eléctrico E':

$$Q_L = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

O en función de las densidades de carga ligada:

$$\sigma_L = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

18.5. VECTOR POLARIZACIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Vector Polarización

Se define la polarización de un material, $\vec{P}$, como la variación de dipolos por unidad de volumen:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\vartheta}$$

Se puede demostrar que en un material dieléctrico homogéneo, el módulo del vector polarización corresponde al valor de la densidad superficial de carga ligada que se induce en el dieléctrico:

$$|\vec{P}| = \sigma_L$$

La polarización de un material está ligada a las cargas ligadas y es provocada por un campo eléctrico. Por tanto se puede poner $\vec{P}$ en función del campo eléctrico total $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\, \chi_e\, \vec{E}$$

Donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica. Es una magnitud adimensional, que depende sólo de la temperatura.

Vector Desplazamiento Eléctrico

En un condensador en el que haya en su interior más de una sustancia aislante, el campo eléctrico no será constante en todo el volumen y dependerá en cada posición del dieléctrico allí existente.

Se puede definir una magnitud cuyo valor depende únicamente de la carga libre almacenada en el condensador independientemente de los dieléctricos que se hallan en su interior. Es equivalente al campo eléctrico en un condensador sin dieléctricos.

Esta magnitud se denomina Vector Desplazamiento Eléctrico, $\vec{D}$, y se define:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

En medios isótropos y homogéneos, $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{P}$ son paralelos:

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

Sustituyendo la expresión de la polarización:

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0\, \chi_e E \qquad D = \varepsilon_0\,(1 + \chi_e)\, E$$

Se puede demostrar que, para todos los dieléctricos, la relación $1 + \chi_e$ coincide con el valor de permitividad relativa:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

Y por tanto:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E$$

Donde ε es la permitividad absoluta de un material.

La componente del desplazamiento eléctrico en la dirección normal a un conductor eléctrico es igual a la densidad superficial de carga del conductor:

$$D_n = \sigma$$

El desplazamiento eléctrico está ligado a las cargas libres.

18.6. RUPTURA DE DIELÉCTRICO

Un condensador no soporta un proceso de aumento de carga ilimitado. Al ir aumentando la carga almacenada, también aumenta tanto el campo eléctrico como la diferencia de potencial entre sus armaduras.

Hay un valor de diferencia de potencial entre armaduras que caso de superarse, se origina la descarga entre las placas del condensador, fenómeno conocido como *ruptura de dieléctrico*.

El aire es considerado aislante, pero si el campo eléctrico supera el valor de $3{,}0 \cdot 10^6$ V/m, se producirá una descarga a través del aire. Este valor se conoce como límite de ruptura de dieléctrico.

Algunos dieléctricos presentan límites de ruptura de dieléctrico superiores al del aire, por lo que se hacen imprescindibles si se precisa trabajar con campos próximos o superiores a $3{,}0 \cdot 10^6$ V/m.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.1. Sea un condensador de 22 n*F*. La separación entre armaduras es de 0,20 mm. Determinar:

a) La carga almacenada en el condensador si se conecta a una batería de 24 V.

b) La superficie de las armaduras del condensador.

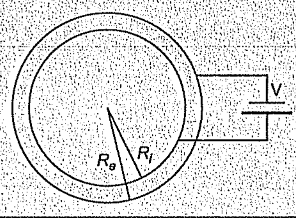
Solución

a) $Q = C \cdot V \qquad Q = 22 \cdot 10^{-9}\, F \cdot 24\, V = 5{,}3 \cdot 10^{-7}\, C = 0{,}53\, \mu C$

b) $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{A \cdot \varepsilon_0}{d} \qquad A = \dfrac{C \cdot d}{\varepsilon_0} \qquad A = \dfrac{22 \cdot 10^{-9}\, F \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-3}\, \text{m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\, F/\text{m}} = 0{,}50\ \text{m}^2$

18.2. Dos superficies esféricas concéntricas y conductoras de radios R_i y R_e ($R_i < R_e$) se encuentran conectadas a una batería de corriente continua de potencial V. La diferencia entre los radios de los conductores esféricos es muy pequeña: $R_e - R_i = d$.

Demostrar que este sistema de conductores se puede considerar un condensador. Determinar la capacidad del sistema de conductores esféricos. Realizar un cálculo numérico con los datos $R_i - R_e = 0{,}50$ mm y suponiendo que $R_e \approx R_i \approx 20$ mm.



Solución

El campo eléctrico creado en el espacio entre superficies esféricas conductoras es radial y su módulo tiene un valor:

$$E\,(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}$$

Donde r es un valor comprendido entre R_i y R_e ($R_i < r < R_e$) y Q es la carga que suministra la batería. La diferencia de potencial entre las superficies esféricas es:

$$V = V_i - V_e = \int_{R_i}^{R_e} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R_i} - \frac{Q}{R_e}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_e - R_i}{R_e \cdot R_i}\right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_e - R_i}{R_e \cdot R_i}\right]$$

La capacidad C del sistema es:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_e \cdot R_i}{R_e - R_i} = \frac{\varepsilon_0 4\pi R_e \cdot R_i}{d}$$

Como las dos superficies esféricas tienen una diferencia de radios muy pequeña (d), se puede hacer la aproximación:

$$R_e \approx R_i \approx R$$

De esta forma la capacidad del sistema es:

$$C = \frac{\varepsilon_0 4\pi R^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Donde A es el área de la superficie del condensador, ya que el área de una superficie esférica de radio R es $A = 4\pi R^2$.

Si se sustituye por los valores numéricos correspondientes:

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{\text{m}} \cdot 4\pi\,(20 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2}{0{,}50 \cdot 10^{-3}\text{ m}} = 89 \cdot 10^{-12}\,F$$

$$C = 89\,pF$$

18.3. Se precisa almacenar una carga de 19,2 mC. Se dispone de una batería de 96 V y un número elevado de condensadores electrolíticos de 100 mF que soportan una tensión máxima de 63 V. Comentar qué posibilidades hay con el material de que se dispone para poder almacenar la carga de 19,2 mC.

Solución

Para almacenar una carga de 19,2 mC con una fuente de 96 V se necesita una capacidad equivalente:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \qquad C_{eq} = \frac{19{,}2 \cdot 10^{-3}\,C}{96\,V} = 200\,\mu F \qquad C_{eq} = 2{,}0 \cdot 10\,\mu F$$

Podríamos pensar que para conseguir, a partir de condensadores de 100 μF, una capacidad equivalente de 200 μF la mejor opción es conectar dos de esos condensadores en paralelo. La capacidad equivalente de los condensadores en paralelo es la suma de la capacidad de los condensadores que forman el paralelo.

Sin embargo, en este caso hay un grave problema. Los condensadores no soportan una tensión superior a los 63 V. Por tanto esa primera opción se ha de rechazar.

Es necesario pues conectar condensadores en serie ya que de esta forma la tensión se reparte entre los elementos de la serie. En esta ocasión bastará con que haya dos condensadores en serie:

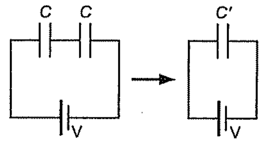


Figura 18.10

La capacidad equivalente de dos condensadores en serie de $C = 100\,\mu F$ es $C' = 50\,\mu F$, por lo que sólo se podrá almacenar una carga de 4,8 mC. De esta forma se ha salvado el problema de la tensión máxima que soportan los condensadores, pero esta carga es sólo la cuarta parte de lo que se desea almacenar.

Si se desea almacenar cuatro veces la carga del sistema compuesto por dos condensadores en serie, se necesitará conectar cuatro series en paralelo.

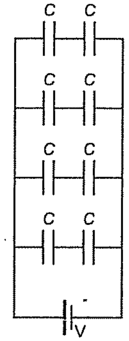


Figura 18.11

La capacidad equivalente del sistema es de 200 μF y la carga almacenada en el sistema es:

$$Q = C \cdot V = 200 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 96\,V = 19{,}2\,mC$$

$$Q = 19{,}2\,mC$$

18.4. Dos condensadores plano paralelos de capacidades $C_1 = 0{,}47\,\mu F$ y $C_2 = 1{,}0\,\mu F$ están conectados en serie y se cargan a una diferencia de potencial de 24 V. Calcular:

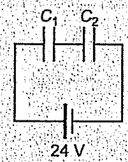


Figura 18.12

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga suministrada por la batería.

c) La carga de cada condensador.

d) La caída de potencial de cada condensador.

e) Si la separación entre las armaduras de cada condensador es $d_1 = 0{,}20$ mm, $d_2 = 0{,}30$ mm, determinar el campo eléctrico en cada condensador.

Solución

a) Los dos condensadores del sistema están conectados en serie a la batería. Por tanto:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{0{,}47 \cdot 10^{-6}\,F} + \frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-6}\,F} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{0{,}32 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$C_{eq} = 0{,}32 \cdot 10^{-6}\,F = 0{,}32\,\mu F$$

b) La batería está conectada a un sistema de condensadores cuya capacidad equivalente es de 0,32 μF, por tanto la carga que suministrará la batería es:

$$Q_T = C_{eq} \cdot V \qquad Q_T = 0{,}32 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 24\,V = 7{,}7 \cdot 10^{-6}\,C = 7{,}7\,\mu C$$

c) Una vez conocida la carga suministrada por la batería, es muy sencillo determinar la carga de los condensadores en serie, ya que cada uno de los condensadores de la serie tiene una carga igual a la suministrada por la batería:

$$Q_1 = Q_T = 7{,}7\,\mu C$$
$$Q_2 = Q_T = 7{,}7\,\mu C$$

d) Con el valor de la carga almacenada en cada condensador, se puede calcular la caída de tensión en cada uno de ellos:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{7{,}7\,\mu C}{0{,}47\,\mu F} = 16{,}3\,V \qquad V_1 = 16\,V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{7{,}7\,\mu C}{1{,}0\,\mu F} = 7{,}70\,V \qquad V_2 \doteq 7{,}7\,V$$

Se puede comprobar que la suma de las caídas de potencial de los dos condensadores coincide con el potencial suministrado por la batería: $V_1 + V_2 = 24\,V$

e) Para determinar el campo eléctrico en cada condensador, conocida la separación entre armaduras, se puede aplicar la expresión $V = E \cdot d$:

$$E_1 = \frac{V_1}{d_1} = \frac{16{,}3\,V}{0{,}20 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 8{,}15 \cdot 10^4\,\frac{V}{\text{m}} = 81{,}5\,\frac{V}{\text{mm}} \qquad E_1 = 82\,\frac{V}{\text{mm}}$$

$$E_2 = \frac{V_2}{d_2} = \frac{7{,}7\,V}{0{,}20 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 3{,}84 \cdot 10^4\,\frac{V}{\text{m}} = 38{,}4\,\frac{V}{\text{mm}} \qquad E_2 = 38\,\frac{V}{\text{mm}}$$

18.5. En la figura adjunta hay un sistema compuesto por tres condensadores cuyas capacidades respectivas son: $C_1 = 1{,}0\,\mu F$, $C_2 = 4{,}7\,\mu F$, $C_3 = 6{,}8\,\mu F$. El sistema de condensadores se conecta a una batería de 12 V. Determinar:

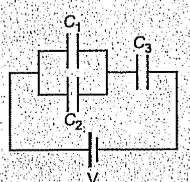


Figura 18.13

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga y la caída de potencial de cada condensador.

c) La energía almacenada en cada condensador y la energía total almacenada en el sistema.

Solución

a) Para calcular la capacidad equivalente del sistema, se determinará primero la capacidad equivalente del paralelo formado por C_1 y C_2 (C'). Al estar en paralelo, la capacidad equivalente es la suma de capacidades:

$$C' = C_1 + C_2 \qquad C' = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,F + 4{,}7 \cdot 10^{-6}\,F = 5{,}7\,\mu F$$

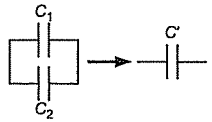


Figura 18.14

Una vez obtenido el valor de C', se determina la capacidad equivalente del sistema a partir de dos condensadores en serie: C' y C_3.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_3} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{5{,}7 \cdot 10^{-6}\,F} + \frac{1}{6{,}8 \cdot 10^{-6}\,F} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3{,}1 \cdot 10^{-6}\,F}$$

b) Para calcular la carga de cada condensador, determinaremos en primer lugar la carga total del sistema:

$$Q_T = C_{eq} \cdot V \qquad Q_T = 3{,}10 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 12\,V = 37{,}2 \cdot 10^{-6}\,C = 37{,}2\,\mu C$$

Este valor de carga es el que se almacena en cada uno de los condensadores en serie:

$$Q_3 = Q_T = 37\,\mu C$$
$$Q' = Q_T = 37\,\mu C$$

Donde Q' es la carga almacenada en C', que es el equivalente de la conexión en paralelo entre C_1 y C_2. La carga Q' se repartirá entre los dos condensadores y lo hará de forma proporcional a la capacidad de cada uno de los condensadores. Para ello, vamos a obtener la caída de tensión de los condensadores C_1 y C_2.

$$V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{37{,}2\,\mu C}{5{,}7\,\mu F} = 6{,}53\,V \qquad V' = 6{,}5\text{ V}$$

Por tanto:

$$Q_1 = C_1 \cdot V' = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 6{,}53\,V = 6{,}53 \cdot 10^{-6}\,C = 6{,}53\,\mu C \qquad Q_1 = 6{,}5\,\mu C$$

$$Q_2 = C_1 \cdot V' = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 6{,}53\,V = 30{,}67 \cdot 10^{-6}\,C = 30{,}67\,\mu C \qquad Q_2 = 31\,\mu C$$

Ahora sólo queda calcular la caída de potencial del condensador C_3:

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{37{,}2\,\mu C}{6{,}8\,\mu F} = 5{,}47\,V \qquad V_3 = 5{,}5\text{ V}$$

c) La energía almacenada en cada condensador es:

$$U_1 = \frac{1}{2}\,Q_1 \cdot V_1\ ;\ U_1 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}53 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 6{,}5\,V = 21{,}3 \cdot 10^{-6}\,J = 21{,}3\ \mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\,Q_2 \cdot V_2\ ;\ U_2 = \frac{1}{2} \cdot 30{,}67 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 6{,}5\,V = 100 \cdot 10^{-6}\,J = 100\ \mu J$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\,Q_3 \cdot V_3\ ;\ U_3 = \frac{1}{2} \cdot 37{,}2 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 5{,}5\,V = 102 \cdot 10^{-6}\,J = 102\ \mu J$$

Y la energía total almacenada en el sistema:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 = 21{,}3\ \mu J + 100\ \mu J + 102\ \mu J = 223\ \mu J$$

$$U_T = 2{,}2 \cdot 10^2\ \mu J$$

18.6. En el sistema de la figura el único condensador conocido es C_4 que tiene una capacidad de 6,8 μF. Se han realizado algunas medidas obteniéndose los valores de las cargas almacenadas en los condensadores 3 y 4; $Q_3 = 118\ \mu C$ y $Q_4 = 155{,}6\ \mu C$, además de la caída de potencial en el condensador 1; $V_1 = 17{,}1$ V. La batería es de 48 V. Los condensadores utilizados no soportan caídas de potencial superiores a los 35 V. Determinar:

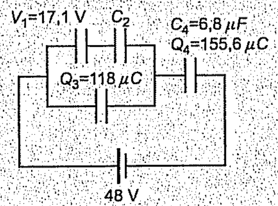


Figura 18.15

a) La carga que ha suministrado la batería y la capacidad equivalente del sistema.
b) El potencial del condensador 4.
c) La caída de potencial y la capacidad del condensador 3.
d) La carga y capacidad del condensador 1.
e) La caída de potencial, carga y capacidad del condensador 2.
f) La energía almacenada en el sistema.
g) Presentar una tabla con los valores de capacidad, carga, caída de potencial y energía electrostática almacenada de cada condensador. Comentar si alguno de los condensadores sufrirá una ruptura de dieléctrico.

Solución

a) El condensador 4 tiene una carga almacenada de 155,6 μC. Este condensador está en serie con el sistema compuesto por los condensadores 1, 2 y 3. En una asociación de condensadores en serie, todos los condensadores almacenan la misma carga y coincide con la que ha suministrado la batería.

Por tanto, por la batería ha pasado una carga de 155,6 μC y el equivalente del sistema de condensadores 1, 2 y 3 tendrá almacenada esta misma carga de 155,6 μC:

$$Q_T = 155{,}6\ \mu C$$

$$Q_{123} = Q_T = 155{,}6\ \mu C$$

La capacidad equivalente del sistema es:

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{V} = \frac{155{,}6\ \mu C}{48\ V} = 3{,}24\ \mu F \qquad C_{eq} = 3{,}2\ \mu F$$

b) Del condensador 4 se conoce su capacidad y la carga almacenada, por tanto se puede calcular su caída de tensión:

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{155{,}6\ \mu C}{6{,}8\ \mu F} = 22{,}9\ V \qquad V_4 = 23\ V$$

c) Con este dato, se puede calcular la caída de tensión en el sistema compuesto por los condensadores 1, 2 y 3:

$$V_{123} = V_{Batería} - V_4 = 48\ V - 22{,}9\ V = 25{,}1\ V \qquad V_{123} = 25\ V$$

El condensador 3 tiene una caída de potencial, V_3, que coincide con el valor de V_{123}.

$$V_3 = V_{123} = 25{,}1 \qquad V_3 = 25\ V$$

Se puede obtener el valor de la capacidad C_3 ya que su carga es un dato del problema:

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_3} = \frac{118\ \mu C}{25{,}1\ V} = 4{,}70\ \mu F \qquad C_3 = 4{,}7\ \mu F$$

d) En el apartado *a)* se comprobó que la carga almacenada en el sistema formado por los condensadores 1, 2 y 3 era $Q_{123} = 155{,}6\ \mu C$. Como el enunciado indica que la carga del condensador 3 es de 118 μC, en la serie compuesta por los condensadores 1 y 2 se almacena una carga Q_{12}:

$$Q_{12} = Q_{123} - Q_3 = 155{,}6\ \mu C - 118\ \mu C = 37{,}6\ \mu C$$

Al estar los condensadores 1 y 2 en serie, cada uno tiene la misma carga:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12} = 37{,}6\ \mu C \qquad Q_1 = 38\ \mu C$$

Como la caída de potencial del condensador 1 es un dato, se puede determinar su capacidad:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{37{,}6\ \mu C}{17{,}1\ V} = 2{,}19\ \mu F \qquad C_1 = 2{,}2\ \mu F$$

e) La serie formada por los condensadores 1 y 2 se encuentra al mismo potencial que el condensador 3, a 25,1 V. Como la caída de potencial en el condensador 1 es de 17,1 V, el condensador 2 se encuentra a un potencial V_2:

$$V_2 = V_{12} - V_1 = 25{,}1\ V - 17{,}1\ V = 8{,}0\ V$$

La capacidad del condensador 2 es:

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{37{,}6\ \mu C}{8{,}0\ V} = 4{,}70\ \mu F \qquad C_2 = 4{,}7\ \mu F$$

f) Energía almacenada en cada condensador:

$$U_1 = \frac{1}{2} Q_1 \cdot V_1 = \frac{1}{2} 37{,}6 \cdot \mu C \cdot 17{,}1\ \text{V} = 321\ \mu J \qquad U_1 = 3{,}2 \cdot 10^2\ \mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2} Q_2 \cdot V_2 = \frac{1}{2} 37{,}6 \cdot \mu C \cdot 8{,}0\ \text{V} = 150\ \mu J \qquad U_2 = 1{,}5 \cdot 10^2\ \mu J$$

$$U_3 = \frac{1}{2} Q_3 \cdot V_3 = \frac{1}{2} 118 \cdot \mu C \cdot 25{,}1\ \text{V} = 1\,481\ \mu J \qquad U_3 = 1{,}5\ \text{m}J$$

$$U_4 = \frac{1}{2} Q_4 \cdot V_4 = \frac{1}{2} 155{,}6 \cdot \mu C \cdot 22{,}9\ \text{V} = 1\,782\ \mu J \qquad U_4 = 1{,}8\ \text{m}J$$

La energía total almacenada es:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$U_T = 321\ \mu J + 150\ \mu J + 1\,481\ \mu J + 1\,782\ \mu J \doteq 3\,734\ \mu J$$

$$U_T = 3{,}7\ \text{m}J$$

Se podría haber calculado a partir de los valores de capacidad equivalente, tensión de batería y carga total del sistema:

$$U_T = \frac{1}{2} Q_T \cdot V = \frac{1}{2} V^2 \cdot C_{eq} = \frac{1}{2} \frac{Q_T^2}{C_{eq}} = 3{,}7\ \text{m}J$$

g)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C (μF)	2,2	4,7	4,7	6,8
Q (μQ)	37,6	37,6	118	155,6
V (V)	17,1	8,0	25,1	22,9
U (μJ)	321	150	1 481	1 782

Ninguno de los condensadores sufrirá ruptura de dieléctrico ya que todos tienen una caída de potencial inferior a los 35 V.

18.7. Un sistema está compuesto por dos condensadores en paralelo conectados a una batería de 12 V. Los condensadores tienen unas capacidades $C_1 = 47\ \mu F$ y $C_2 = 10\ \mu F$. Se desconecta el sistema de la batería y a continuación se unen los dos condensadores conectando placas de diferente polaridad, tal y como indica la Figura 18.16. Calcular:

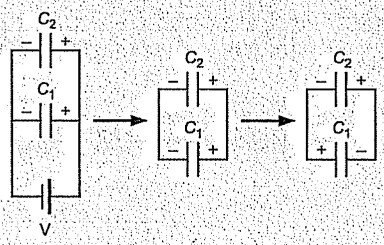


Figura 18.16

a) La carga almacenada en cada condensador cuando están en paralelo con la batería.

b) La carga de cada condensador y la diferencia de potencial en el sistema de condensadores cuando se conectan placas de diferente polaridad.

Solución

a) La carga de cada condensador es:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 47 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 12\ V = 564 \cdot 10^{-6}\ C = 564\ \mu C\ ;\ Q_1 = 5{,}6 \cdot 10^2\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 10 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 12\ V = 120 \cdot 10^{-6}\ C = 120\ \mu C\ ;\ Q_2 = 1{,}2 \cdot 10^2\ \mu C$$

b) Cuando se conectan los condensadores uniendo placas de diferente polaridad, la carga libre almacenada en las armaduras del condensador se redistribuirá. La carga total Q_T que queda en el sistema entre los dos condensadores es la diferencia $Q_1 - Q_2$.

$$Q_T = Q_1 - Q_2 = 564 \cdot 10^{-6}\ C - 120 \cdot 10^{-6}\ C = 444 \cdot 10^{-6}\ C = 444\ \mu C$$

Por tanto, si denominamos Q_1' y Q_2' a las nuevas cargas almacenadas en cada condensador, se debe cumplir:

$$Q_1' + Q_2' = Q_T = 444\ \mu C$$

Por otro lado, al estar conectados los dos condensadores en paralelo, la caída de potencial debe ser la misma en ambos condensadores, así:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1'}{C_1} \\ V_2 &= \frac{Q_2'}{C_2} \end{aligned}\right\} V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{47\ \mu F} = \frac{Q_2'}{10\ \mu F}$$

Sustituyendo Q'_1 en función de Q'_2, se obtiene:

$$\frac{444\ \mu C - Q'_2}{47\ \mu F} = \frac{Q'_2}{10\ \mu F} \qquad \frac{444\ \mu C}{47\ \mu F} = \frac{Q'_2}{10\ \mu F} + \frac{Q'_2}{47\ \mu F}$$

$$\frac{444\ \mu C}{47\ \mu F} = Q'_2 \cdot \left[\frac{1}{10\ \mu F} + \frac{1}{47\ \mu F}\right];\ Q'_2 = \frac{444\ \mu C}{47\ \mu F\left[\frac{1}{10\ \mu F} + \frac{1}{47\ \mu F}\right]} = \frac{444\ \mu C}{\frac{47}{10} + 1}$$

$$Q'_2 = \frac{444\ \mu C}{5{,}7} = 77{,}8\ \mu C \qquad Q'_2 = 77{,}8\ \mu C$$

Y por tanto:

$$Q'_1 = 444\ \mu C - Q'_2 = 444\ \mu C - 77{,}8\ \mu C = 366{,}2\ \mu C \qquad Q'_1 = 3{,}6 \cdot 10^2\ \mu C$$

Ahora se puede calcular la diferencia de potencial del sistema:

$$V_1 = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{366{,}2\ \mu C}{47\ \mu F} = 7{,}79\ V \qquad V_1 = 7{,}8\ V$$

$$V_2 = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{77{,}8\ \mu C}{10\ \mu F} = 7{,}78\ V \qquad V_2 = 7{,}8\ V$$

18.8. En un condensador de caras plano paralelas de área A y separación entre armaduras d, se introduce una lámina de dieléctrico de espesor x ($x \leq d$) y permitividad relativa ε_r. Determinar la capacidad del sistema en función del espesor de la lámina de dieléctrico.

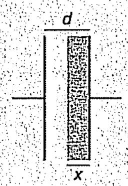


Figura 18.17

Solución

El sistema de la Figura 18.17 se puede reducir a un modelo de dos condensadores en serie con idénticas áreas de armaduras y cuyas separaciones entre placas serán $d - x$ y x respectivamente. De hecho, si se aplica una diferencia de potencial al condensador original, habrá dos campos eléctricos diferenciados. Uno en la zona sin dieléctrico y otro en la zona con dieléctrico.

Para calcular la capacidad equivalente del sistema, bastará con calcular la capacidad equivalente de dos condensadores en serie que denominaremos C_1 y C_2.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x} \qquad C_2 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{x}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d - x}} + \frac{1}{\varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{x}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[d - x + \frac{x}{\varepsilon_r}\right]$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\varepsilon_r \cdot (d - x) + x}{\varepsilon_r}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{d \cdot \varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1) \cdot x}{\varepsilon_r}\right]$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 A}{d \cdot \varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1) \cdot x}$$

Se puede comprobar que si no hay dieléctrico entre placas ($x = 0$): $C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$, que es la capacidad inicial del condensador, y que si el dieléctrico ocupa todo el espacio entre placas ($x = d$): $C_{eq} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$, como cabía esperar.

18.9. En un condensador de caras plano paralelas de lados b y h (área $A = b \cdot h$) y separación entre armaduras d, se introduce una lámina de dieléctrico de espesor d y lados b y x (área $A' = b \cdot x$) y permitividad relativa ε_r. Determinar la capacidad del sistema en función de la longitud x del lado de la lámina de dieléctrico.

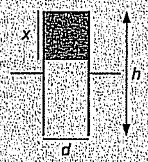


Figura 18.18

Solución

Con el mismo planteamiento que en el ejercicio anterior, el condensador de la Figura 18.18 se puede reducir a un modelo de dos condensadores en paralelo de idéntica separación entre armaduras y diferentes áreas.

Para calcular la capacidad equivalente del sistema, bastará con calcular la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo que denominaremos C_1 y C_2.

$$C_1 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \cdot b \cdot x}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot b \cdot (h - x)}{d}$$

Por tanto:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \cdot b \cdot x}{d} + \frac{\varepsilon_0 \cdot b \cdot (h - x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot b}{d}\left[\varepsilon_r \cdot x + (h - x)\right]$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \cdot b}{d}\left[h + x \cdot (\varepsilon_r - 1)\right]$$

Si se tiene en cuenta que el área del condensador es $A = b \cdot h$, la capacidad equivalente se puede expresar:

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d \cdot h}\,[h + x \cdot (\varepsilon_r - 1)] = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}\left[1 + \frac{x}{h} \cdot (\varepsilon_r - 1)\right]$$

Se puede comprobar que si no hay dieléctrico entre placas ($x = 0$): $C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$, que es la capacidad inicial del condensador, y que si el dieléctrico ocupa todo el espacio entre placas ($x = h$): $C_{eq} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$, como cabía esperar.

18.10. El área de las armaduras de un condensador de caras plano paralelas es de 24 cm² y están separadas una distancia $d = 0{,}20$ mm. El condensador se pone en contacto con una batería de corriente continua de 48 V. Cuando el condensador está totalmente cargado se desconecta el condensador de la batería. Determinar:

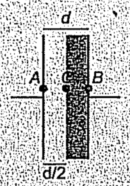


Figura 18.19

a) La carga Q almacenada en el condensador.

A continuación se introduce una lámina de baquelita ($\varepsilon_r = 5{,}0$), de idéntica superficie que las armaduras, que ocupa la mitad del volumen que hay entre placas. Calcular:

b) El campo eléctrico en la zona AC y el campo eléctrico en la zona CB.

c) La caída de potencial en la zona sin dieléctrico, V_{AC}, y en la zona con dieléctrico, V_{CB}.

d) La capacidad equivalente del condensador así formado.

e) La densidad de carga ligada en el dieléctrico.

f) El módulo del vector polarización en el dieléctrico y el vector desplazamiento eléctrico.

Solución

a) La capacidad de un condensador plano paralelo se puede calcular con la expresión:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}; \; C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \cdot 24 \cdot 10^{-4}\,m^2}{0{,}20 \cdot 10^{-3}\,m} = 106\,pF \qquad C = 1{,}1 \cdot 10^2\,pF$$

La carga que se almacena en este condensador será:

$$Q = C \cdot V \qquad Q = 106 \cdot 10^{-12}\,F \cdot 48\,V = 5{,}08 \cdot 10^{-9}\,C \qquad Q = 5{,}1\,nC$$

b) Antes de introducir la baquelita (dieléctrico), el campo eléctrico en el condensador es:

$$E_0 = \frac{V}{d} \qquad E_0 = \frac{48\,V}{0{,}20 \cdot 10^{-3}\,m} = 2{,}4 \cdot 10^5\,\frac{V}{m} = 2{,}4 \cdot 10^2\,\frac{V}{mm}$$

Al introducir la baquelita, en la zona que queda aire (o vacío), el campo eléctrico no varía:

$$E_{AC} = E_0 = 2{,}4 \cdot 10^5\,\frac{V}{m}$$

Y el campo en la zona ocupada por la baquelita, disminuye en un factor ε_r:

$$E_{CB} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{2{,}4 \cdot 10^5\,\frac{V}{m}}{5{,}0} = 4{,}8 \cdot 10^4\,\frac{V}{m}$$

c) Una vez calculados los campos eléctricos, se pueden determinar las caídas de potencial en cada zona:

$$V_{AC} = E_{AC} \cdot \frac{d}{2} = 2{,}4 \cdot 10^5\,\frac{V}{m} \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-3}\,m = 24\,V$$

$$V_{CB} = E_{CB} \cdot \frac{d}{2} = 4{,}8 \cdot 10^4\,\frac{V}{m} \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-3}\,m = 4{,}8\,V$$

d) Para calcular la capacidad del condensador con la placa de baquelita, basta con obtener la diferencia de potencial entre armaduras, ya que la carga del sistema no ha cambiado al haberse desconectado de la batería una vez cargado y antes de introducir la placa de dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{V_{AC} + V_{CB}} = \frac{5{,}1\,nC}{24\,V + 4{,}8\,V} = \frac{5{,}1\,nC}{28{,}8\,V} = 177 \cdot 10^{-12}\,F$$

$$C = 0{,}18\,nF$$

e) La carga ligada en el dieléctrico tiene un valor:

$$\sigma_L = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{Q}{A} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{5{,}1 \cdot 10^{-9}\,C}{24 \cdot 10^{-4}\,m^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_L = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$$

f) Módulo del vector polarización en el dieléctrico:

$$|\vec{P}| = \sigma_L = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$$

Y el vector desplazamiento eléctrico es $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.
Si se calcula el módulo del vector desplazamiento en la zona sin dieléctrico:

$$D = \varepsilon_0 E = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \cdot 2{,}4 \cdot 10^5\,\frac{V}{m} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}$$

$$D = 2{,}1\,\frac{\mu C}{m^2}$$

Y si se calcula en la zona con dieléctrico:

$$D = \varepsilon_0 E + P = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 4{,}8 \cdot 10^4 \frac{V}{m} + 1{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{C}{m^2}$$

$$D = 2{,}12 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \qquad D = 2{,}1 \frac{\mu C}{m^2}$$

Lo que indica que el vector desplazamiento eléctrico es una magnitud constante en todo el espacio entre armaduras:

18.11. Un condensador plano paralelo tiene una capacidad $C_0 = 4{,}7\ nF$ y 0,40 mm de separación entre placas. Se encuentra conectado a una batería de 36 V. Determinar:

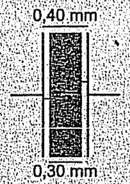


Figura 18.20

a) El área de las armaduras del condensador si entre ellas hay aire.

b) El campo eléctrico, E_0, establecido entre las armaduras.

c) La carga Q_0 almacenada en el condensador.

A continuación, sin desconectar de la batería, se introduce, equidistante a ambas armaduras, una lámina de neopreno ($\varepsilon_r = 7{,}0$) de área idéntica a las armaduras y de 0,30 mm de espesor. Calcular:

d) La capacidad equivalente del sistema así formado.

e) Las cargas Q y Q_L almacenadas en las armaduras y dieléctrico respectivamente.

f) Los campos eléctricos en las zonas de aire y de dieléctrico.

g) La energía almacenada en este condensador y la densidad de energía en el aire y en el dieléctrico.

h) La caída de potencial en el dieléctrico.

i) El módulo del vector polarización en el dieléctrico y el vector desplazamiento eléctrico.

Solución

a) Área de armaduras:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = A = \frac{C_0 \cdot d}{\varepsilon_0} = \frac{4{,}7 \cdot 10^{-9} F \cdot 0{,}40 \cdot 10^{-3}\,m}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}} = 0{,}212\ m^2 \qquad A = 0{,}21\ m^2$$

b) El campo eléctrico en el condensador es:

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{36\ V}{0{,}40 \cdot 10^{-3}\,m} = 9{,}0 \cdot 10^4 \frac{V}{m} = 90 \frac{V}{mm}$$

c) La carga almacenada en el condensador:

$$Q_0 = C_0 \cdot V = 4{,}7 \cdot 10^{-9} F \cdot 36\ V = 169 \cdot 10^{-9}\ C = 0{,}17\ \mu C$$

d) El sistema del condensador con el dieléctrico se reduce a tres condensadores en serie que denominaremos C_1, C_2 y C_3.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1} \qquad C_2 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{d_2} \qquad C_3 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_3}$$

Donde $d_1 = d_3 = 0{,}050$ mm y $d_2 = 0{,}30$ mm.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_1}} + \frac{1}{\varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{d_2}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d_1}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_r} + d_1\right] = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\varepsilon_r \cdot 2 \cdot d_1 + d_2}{\varepsilon_r}\right]$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_r\, \varepsilon_0 A}{\varepsilon_r \cdot 2 \cdot d_1 + d_2} = \frac{7{,}0 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 0{,}212\ m^2}{7{,}9 \cdot 2 \cdot 0{,}050 \cdot 10^{-3}\,m + 0{,}3 \cdot 10^{-3}\,m} = 12\ nF$$

e) La carga Q que ahora se almacena en el condensador es:

$$Q = C_{eq} \cdot V = 12 \cdot 10^{-9} F \cdot 36\ V = 434 \cdot 10^{-9}\ C = 434\ nC \qquad Q = 0{,}43\ \mu C$$

Y la carga ligada que aparece en la lámina de dieléctrico es:

$$Q_L = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \qquad Q_L = 434 \cdot 10^{-9}\ C\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 372 \cdot 10^{-9}\ C$$

$$Q_L = 0{,}37\ \mu C$$

f) Los campos eléctricos en el aire y en el dieléctrico:

Sean E y E' los campos eléctricos en el aire y en el dieléctrico respectivamente:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{434 \cdot 10^{-9}\ C}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 0{,}212\ m^2} = 2{,}31 \cdot 10^5 \frac{V}{m} = 231 \frac{V}{mm}$$

$$E = 231 \frac{V}{mm}$$

$$E' = \frac{E}{\varepsilon_r} = \frac{2{,}31 \cdot 10^5 \frac{V}{m}}{7} = 3{,}30 \cdot 10^4 \frac{V}{m} = 33 \frac{V}{mm}$$

$$E' = 33 \frac{V}{mm}$$

g) La energía almacenada en el condensador, en función de los valores de capacidad y potencial es:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 12 \cdot 10^{-9} F \cdot (36\ V)^2 = 7{,}8 \cdot 10^{-6} J = 7{,}8\ \mu J$$

Densidad de energía en el aire:

$$\eta_{E\,aire} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0\, E^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \left(2{,}31 \cdot 10^5 \frac{V}{m}\right)^2 = 0{,}24 \frac{J}{m^3}$$

Densidad de energía en el dieléctrico:

$$\eta_{E\,dieléctrico} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r\, E'^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 7 \cdot \left(3{,}3 \cdot 10^4 \frac{V}{m}\right)^2 = 34 \cdot 10^{-3} \frac{J}{m^3} = 34 \frac{mJ}{m^3}$$

h) La caída de potencial en el dieléctrico es:

$$V' = E' \cdot d_2 = 33 \frac{V}{mm} \cdot 0{,}30\ mm = 9{,}9\ V$$

i) El módulo del vector polarización en el dieléctrico:

$$|\vec{P}| = \sigma_L = \frac{Q_L}{A} = \frac{372 \cdot 10^{-9}\ C}{0{,}212\ m^2} = 1{,}75 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$$

En la zona sin dieléctrico, $|\vec{P}| = 0$.

Y el vector desplazamiento eléctrico es $D = \varepsilon_0 E + P$.
Si se calcula en la zona sin dieléctrico:

$$D = \varepsilon_0 E = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 2{,}31 \cdot 10^5 \frac{V}{m} = 2{,}0 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} = 2{,}0 \frac{\mu C}{m^2}$$

18.12. Dos placas circulares, verticales, de radio $R = 5{,}0$ cm están separadas una distancia $d = 1{,}0$ mm. Entre ellas existe una diferencia de potencial $V = 240$ V. Un agente externo separa las placas hasta una distancia $d' = 2 \cdot d = 2{,}0$ mm. Calcular la variación de energía del sistema y el trabajo efectuado por el agente externo si:

a) Una vez cargadas, se desconectan de la fuente de potencial, y luego se separan.

b) Las placas permanecen conectadas a la fuente de potencial.

Solución

a) Condensador desconectado de la batería:

Inicialmente el condensador tiene una capacidad C_0 y una carga almacenada en las placas Q_0:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0\, \pi \cdot R^2}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} [\pi \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-2}\ m)^2]}{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ m} = 69{,}5 \cdot 10^{-12}\ F$$

$$Q_0 = C_0 \cdot V = 69{,}5 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 240\ V = 16{,}7 \cdot 10^{-9}\ C$$

Antes de separar las placas, la energía almacenada es:

$$U_0 = \frac{1}{2} Q_0 \cdot V_0 = \frac{1}{2} 16{,}7 \cdot 10^{-9}\ C \cdot 240\ V = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\ J$$

Si las placas se separan es porque hay algún agente externo que está realizando un trabajo. Para desplazar una placa con movimiento uniforme, el agente exterior debe hacer una fuerza del mismo módulo y dirección pero con sentido contrario a la de atracción de la otra placa dirección. El módulo de esta fuerza es:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}_1$$

Donde $\vec{E}_1$ es el campo debido a la placa 1 en la posición de la placa 2 y Q es la carga de la placa 2. Sabemos que:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

El trabajo que realiza el agente externo para separar las placas es: $W_{ext} = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$. Como la fuerza aplicada por el agente externo y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido:

$$W_{ext} = \int F\, dx = \int_d^{2d} E \cdot Q \cdot dx = \int_d^{2d} \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot dx = \frac{\sigma \cdot Q}{2 \cdot \varepsilon_0} \int_d^{2d} dx = \frac{\sigma \cdot Q}{2 \cdot \varepsilon_0} [d] = \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0}$$

$$W_{ext} = \frac{(16{,}7 \cdot 10^{-9}\ C)^2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ m}{2 \cdot [\pi \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-2}\ m)^2] \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ J$$

$$W_{ext} = 2{,}0\ \mu J$$

Después de desplazar las placas, su capacidad pasa a ser la mitad, y su energía final es:

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C_f} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{\frac{C_0}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0} = 2 \cdot U_0 = 2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ J = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\ J$$

El aumento de energía del sistema es:

$$\Delta U = U_f - U_0 = 2 \cdot U_0 - U_0 = U_0$$

$$\Delta U = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\ J - 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ J = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ J$$

$$\Delta U = 2{,}0\ \mu J$$

Que es precisamente la energía invertida por el agente externo:

$$W_{ext} = \Delta U = U_0$$

b) Condensador conectado a la batería:

En este apartado hay que calcular el trabajo realizado tanto por el agente externo como por la batería:

— *Trabajo del agente externo:*

A diferencia del apartado *a)*, la carga no es constante, sino que depende de la separación entre placas, ya que la magnitud que se mantiene constante es el potencial V entre placas. Cuando las placas están separadas una distancia x, el módulo de la carga de una de ellas es:

$$Q(x) = C(x) \cdot V = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \cdot V$$

El trabajo realizado por el agente externo se determina según:

$$W_{ext} = \int F\,dx = \int_d^{2d} \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot dx = \int_d^{2d} \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A} dx = \frac{1}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0} \int_d^{2d} \left(\frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot V}{x}\right)^2 dx = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot V^2}{2} \int_d^{2d} \frac{dx}{x^2}$$

$$W_{ext} = \frac{\varepsilon_0 A \cdot V^2}{2} \left[-\frac{1}{x}\right]_d^{2d} = \frac{\varepsilon_0 A \cdot V^2}{2} \left(\frac{1}{2d}\right) = \left(\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot V^2\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_0 \cdot V^2}{2}\right) = \frac{U_0}{2}$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\, 2{,}00 \cdot 10^{-6}\, J = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\, J$$

$$W_{ext} = 1{,}0\ \mu J$$

— *Trabajo de la batería:*

Al separar las armaduras de un valor d a otro $2d$, la carga almacenada pasa de Q a $Q/2$. La carga que se retira de las armaduras es de $Q/2$ coulombs que neutralizan $-Q/2$ coulombs de la armadura negativa. La carga debe pasar por la batería, por lo que ésta realizará un trabajo:

$$W_{batería} = q \cdot \Delta V, \text{ donde } q = \frac{Q}{2}$$

Como la carga pasa del polo positivo al negativo, $\Delta V = -V$, y:

$$W_{batería} = \frac{Q}{2}(-V) = -\frac{1}{2} QV = -U_0$$

Como la carga pasa del polo positivo de la batería al polo negativo por el interior de la misma pierde energía.

El trabajo total en este proceso es:

$$W_{Total} = W_{ext} + W_{batería} = \frac{U_0}{2} - U_0 = -\frac{U_0}{2}$$

Se calcula ahora la energía final del sistema y la variación de energía que ha tenido lugar:

$$U_f = \frac{1}{2} C_f V^2 = \frac{1}{2} \frac{C_0}{2} V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} C_0 V^2\right) = \frac{1}{2} U_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\, J = 1{,}0\ \mu J$$

$$\Delta U = U_f - U_0 = \frac{1}{2} U_0 - U_0 = -\frac{1}{2} U_0 = -1{,}0\ \mu J$$

Resultado que concuerda con el trabajo realizado por el agente externo y la batería.

18.13. Un condensador está formado por dos placas cuadradas de lado $L = 60$ mm, separadas una distancia $d = 4{,}0$ mm. Entre ellas se establece una diferencia de potencial de 240 V. Sin desconectarlo de la fuente, se introduce entre las placas una lámina de dieléctrico, de constante dieléctrica 7,0, de igual área y espesor: $e = d = 4{,}0$ mm.

Calcular:

a) La energía almacenada en el condensador antes y después de introducir el dieléctrico.

Si se introduce completamente la lámina de dieléctrico, calcular:

b) La densidad de carga libre.

c) La densidad de carga ligada.

d) La fuerza que actúa sobre la lámina de dieléctrico, supuesta parcialmente introducida entre las dos placas del condensador (ver Figura 18.21).

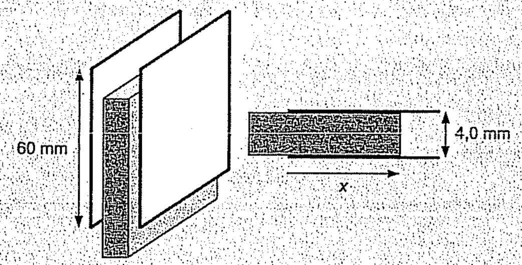


Figura 18.21

Solución

a) Energía inicial:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \cdot L^2}{d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot (60 \cdot 10^{-3}\, m)^2}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\, m} \cdot (240\, V)^2 = 0{,}23\ \mu J$$

Energía final:

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{7{,}0 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot (60 \cdot 10^{-3}\, m)^2}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\, m} \cdot (240\, V)^2 = 1{,}6\ \mu J$$

b) La densidad de carga libre.

La carga almacenada cuando el dieléctrico está completamente introducido es:

$$Q_f = C_f \cdot V = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{d} V = \frac{7{,}0 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot (60 \cdot 10^{-3}\, m)^2}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\, m} \cdot 240\, V = 13 \cdot 10^{-9}\, C = 13\, nC$$

Por tanto la densidad de carga es:

$$\sigma = \frac{Q_f}{A} = \frac{13 \cdot 10^{-9}\, C}{(60 \cdot 10^{-3}\, m)^2} = 3{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} = 3{,}7 \frac{\mu C}{m^2}$$

c) La densidad de carga ligada.

La densidad de carga ligada se puede calcular a partir del resultado del apartado anterior:

$$\sigma_L = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right);\ \sigma_L = 3{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 3{,}2 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2} = 3{,}2\,\frac{\mu C}{m^2}$$

d) La fuerza que actúa sobre la lámina de dieléctrico se va a determinar a partir de la expresión que nos da la variación de energía potencial al introducir el dieléctrico:

$$F_x = \frac{dU}{dx}$$

Calcularemos la energía potencial a partir de la densidad de energía.

Si en un cierto instante la lámina de dieléctrico se ha introducido una cierta distancia x (ver Figura 18.21) el sistema se puede reducir a un modelo compuesto por dos condensadores en paralelo de igual espesor pero áreas distintas. La zona ocupada con dieléctrico tiene un área $A_1 = L \cdot x$ y el área libre de dieléctrico es $A_2 = L \cdot (L - x)$.

Sea η_1 la densidad de energía en la zona del condensador ocupada por el dieléctrico (de área A_1) y η_2 la densidad de energía en la zona sin dieléctrico (de área A_2):

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E_1^2 \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot E_2^2$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2 \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot L \cdot x \cdot d \qquad U_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot L \cdot (L - x) \cdot d$$

Por tanto la energía total almacenada en el instante en que el dieléctrico se ha introducido una distancia x en el condensador es:

$$U(x) = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot L \cdot x \cdot d + \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2 \cdot L \cdot (L - x) \cdot d$$

$$U(x) = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot L \cdot d \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2 [x \cdot \varepsilon_r + (L - x)]$$

La fuerza aplicada al dieléctrico es:

$$F_x = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot L \cdot \frac{V^2}{d} \cdot [\varepsilon_r - 1]$$

$$F_x = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \cdot L \cdot \frac{V^2}{d} \cdot [\varepsilon_r - 1]$$

Sustituyendo valores:

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \cdot 60 \cdot 10^{-3}\,m \cdot \frac{(240\ V)^2}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\,m} \cdot [7 - 1] = 22{,}9 \cdot 10^{-6}\,N$$

$$F_x = 23\ \mu N$$

CUESTIONES

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES (SIN DIELÉCTRICOS)

18.1. Dos condensadores $C_1 = 0{,}10\ \mu F$ y $C_2 = 0{,}15\ \mu F$ están conectados en serie y se cargan a una diferencia de potencial $\Delta V = 50$ V. La carga almacenada en cada condensador es:

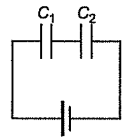


Figura 18.22

a) $Q_1 = Q_2 = 1{,}5\ \mu C$

b) $Q_1 = Q_2 = 3{,}0\ \mu C$

c) $Q_1 = 1{,}6\ \mu C,\ Q_2 = 1{,}4\ \mu C$

d) $Q_1 = 1{,}4\ \mu C,\ Q_2 = 1{,}6\ \mu C$

18.2. En la Figura 18.23 hay un sistema de tres condensadores de valores $C_1 = 2{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$, $C_3 = 3{,}0\ \mu F$ y $V = 18$ V. La carga total almacenada en el sistema es de 36 μC. La carga almacenada en los condensadores cumple que:

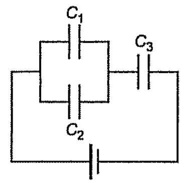


Figura 18.23

a) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 36\ \mu C$

b) $Q_1 + Q_2 = Q_3 = 36\ \mu C$

c) $Q_1 = Q_2 = 18\ \mu C,\ Q_3 = 36\ \mu C$

d) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 12\ \mu C$

18.3.1. El sistema de condensadores de la Figura 18.24 está conectado a una batería de 12 V. Sólo se conoce la capacidad del condensador 4, $C_4 = 8{,}0\ \mu F$. Se han realizado algunas medidas que han permitido obtener los siguientes valores: $Q_1 = 12\ \mu C$, $V_2 = 2{,}0$ V y $V_4 = 6{,}0$ V. La capacidad equivalente del sistema es:

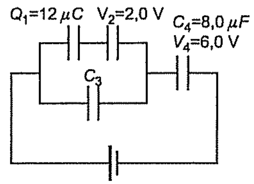


Figura 18.24

a) Imposible de calcular.

b) $C_{eq} = 8{,}0\ \mu F$

c) $C_{eq} = 4{,}0\ \mu F$

d) $C_{eq} = 12\ \mu F$

18.3.2. La carga del condensador C_3 es:

a) $Q_3 = 36\ \mu C$

b) $Q_3 = 48\ \mu C$

c) $Q_3 = 24\ \mu C$

d) $Q_3 = 12\ \mu C$

18.3.3. El condenador C_1 tiene un valor:

a) $C_1 = 8{,}0\ \mu F$

b) $C_1 = 6{,}0\ \mu F$

c) $C_1 = 3{,}0\ \mu F$

d) $C_1 = 12\ \mu F$

18.3.4. La energía almacenada en el sistema es:

a) $U = 72\ \mu J$

b) $U = 2{,}9 \cdot 10^2\ \mu J$

c) $U = 5{,}8 \cdot 10^2\ \mu J$

d) $U = 1{,}4 \cdot 10^2\ \mu J$

18.4. En la Figura 18.25 se muestra un sistema de tres condensadores cuyas capacidades son $C_1 = 6{,}0\ nF$, $C_2 = 3{,}0\ nF$ y $C_3 = 22\ nF$. Si el conjunto está unido a una batería de 12 V, es correcto que:

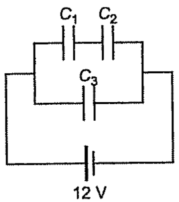


Figura 18.25

a) $Q_1 + Q_2 = Q_3$

b) $V_1 = V_2 = V_3/2$

c) $Q_2 = 12\ nC$

d) $V_2 = 8{,}0\ V$

18.5. Tres condensadores C_1, C_2 y C_3 asociados en serie están conectados a una batería cuya diferencia de potencial entre sus bornes es V. Los condensadores tienen los siguientes valores $C_1 = 2{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$ y $C_3 = 8{,}0\ \mu F$. Es correcto afirmar que:

a) La diferencia de potencial entre las placas de los condensadores es igual en todos ellos.

b) La diferencia de potencial entre las placas de C_2 es el doble que la diferencia de potencial entre las placas de C_1.

c) La diferencia de potencial entre las placas de C_3 es la mitad que la diferencia de potencial entre las placas de C_2.

d) La diferencia de potencial entre las placas de los condensadores que están en los extremos de la serie son iguales.

CONDENSADOR DESCONECTADO DE LA BATERÍA

18.6.1. Considerar un condensador de placas paralelas. El área de las placas es de 0,30 m^2 y la separación entre placas 2,0 mm. El condensador se conecta a una batería de 5,0 V. ¿Cuánto vale el campo eléctrico en el interior del condensador?

a) 2,5 kV/m *b)* 5,0 V/m *c)* 3,2 kV/m *d)* $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ V/m

18.6.2. Seguidamente desconectamos la batería e introducimos dos dieléctricos de permitividad relativa $\varepsilon_{r1} = 2{,}0$ y $\varepsilon_{r2} = 3{,}0$, y espesor $d_1 = 0{,}50$ mm y $d_2 = 1{,}5$ mm. (El área de los dieléctricos coincide con el área de las placas del condensador). Es correcto afirmar que:

a) El campo en el interior del dieléctrico 1 es superior al campo en el interior del dieléctrico 2.

b) El campo en el interior del dieléctrico 1 es inferior al campo en el interior del dieléctrico 2.

c) El campo en el interior del dieléctrico 1 es igual al campo en el interior del dieléctrico 2.

d) El campo eléctrico en el interior del condensador no ha variado.

CONDENSADOR CONECTADO A UNA BATERÍA

18.7. Entre las placas de un condensador conectado a una batería de potencial V se inserta un dieléctrico sin desconectarlo de la batería. Es correcto afirmar que:

a) La carga del condensador disminuye.

b) La diferencia de potencial entre las placas del condensador disminuye.

c) La capacidad del condensador no varía.

d) La diferencia de potencial entre las placas del condensador no varía.

18.8. Considerar un condensador de 10 nF conectado a una batería. Si introducimos un dieléctrico de $\varepsilon_r = 2{,}0$ entre sus placas sin desconectar la batería, podremos afirmar que:

a) La capacidad del condensador pasará a ser de 5,0 nF.

b) El campo electrostático en el interior del dieléctrico será cero.

c) La tensión entre armaduras disminuirá.

d) La carga del condensador aumentará.

18.9. En el sistema de condensadores de la Figura 18.26, $C_1 = 2{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$, $C_3 = 3{,}0\ \mu F$ y $V = 18\ V$. Si se introduce un dieléctrico en el condensador C_3 con una permitividad relativa $\varepsilon_r = 4{,}0$ sin desconectar la batería del sistema:

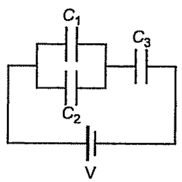


Figura 18.26

a) La carga almacenada en el condensador 3 se multiplicará por 4.

b) La carga almacenada en los condensadores 1 y 2 no cambia porque no ha variado su capacidad.

c) La diferencia de tensión a la que se encuentra el paralelo no habrá sufrido ninguna variación.

d) La carga almacenada en el paralelo será de 72 μC.

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES (CON DIELÉCTRICO)

18.10. Dos condensadores idénticos, con aire entre sus armaduras, están conectados en paralelo, siendo la capacidad del conjunto C_0. Si estos condensadores se conectan en serie y se rellenan con un dieléctrico de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 4{,}0$, la capacidad del sistema será:

a) C_0 *b)* $2\,C_0$ *c)* $C_0/2$ *d)* $4\,C_0$

18.11.1. Tres condensadores $C_1 = 15\ \mu F$, $C_2 = 24\ \mu F$ y $C_3 = 24\ \mu F$ se conectan en serie a una batería de 30 V. La carga almacenada en el condensador C_2 es:

a) $2{,}0 \cdot 10^{-4}\ C$ *c)* $6{,}0 \cdot 10^{-4}\ C$
b) $67\ \mu C$ *d)* $1{,}0 \cdot 10^{-4}\ C$

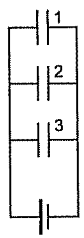
18.11.2. La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador C_1 es:

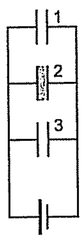
a) 10 V *b)* 8,3 V *c)* 30 V *d)* 13 V

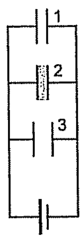
18.11.3. Una vez cargados todos los condensadores se introduce un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 1{,}6$ entre las placas del condensador de capacidad C_1. ¿Cuál es la capacidad equivalente del conjunto?

a) $8{,}3\ \mu F$ *c)* $72\ \mu F$
b) $63\ \mu F$ *d)* $8{,}0\ \mu F$

18.12.1. Tres condensadores de placas paralelas, idénticos, de área $A = 100\ \text{cm}^2$ y separación entre placas $d = 1{,}0$ mm están asociados en paralelo y conectados a una fuente de tensión 5,0 V.







La capacidad del conjunto es:

a) $2{,}7\ nF$ *c)* $86\ pF$
b) $2{,}6 \cdot 10^2\ pF$ *d)* $30\ pF$

18.12.2. Introducimos un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2{,}0$ en el interior del condensador n.º 2. ¿Cuál será la capacidad del conjunto?

a) $35\ pF$ *b)* $2{,}2 \cdot 10^2\ pF$ *c)* $3{,}5 \cdot 10^2\ pF$ *d)* $89\ pF$

18.12.3. Seguidamente aumentamos la separación entre las placas del condensador n.º 3 hasta 2,0 mm. La capacidad equivalente de la asociación en paralelo será:

a) $44\ pF$ *b)* $18\ nF$ *c)* $25\ pF$ *d)* $3{,}1 \cdot 10^2\ pF$

18.12.4. ¿Cuál será la carga almacenada en el condensador n.º 3?

a) $8{,}9 \cdot 10^2\ pC$ *c)* $1{,}5\ nC$
b) $2{,}2 \cdot 10^2\ pC$ *d)* $35\ nC$

18.12.5. ¿Cuál es, en estas condiciones, el campo electrostático entre les placas del condensador n.º 2?

a) 5,0 V/m *b)* 5,0 kV/m *c)* 10 kV/m *d)* 2,5 kV/m

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

18.13. La distancia entre las placas de un condensador cargado es d. Se carga el condensador y adquiere una energía U. Una vez cargado se desconecta de la fuente y las placas se acercan hasta una distancia $d/2$. El nuevo valor de la energía del condensador, U', será:

a) $2U$ *b)* U *c)* $U/4$ *d)* $U/2$

18.14.1. Un condensador plano paralelo de 220 μF, con una separación entre armaduras $d = 0{,}40$ mm está conectado a una batería de 48 V. La energía almacenada en el condensador es:

a) $1{,}2 \cdot 10^{-6}\ J$ *c)* $0{,}25\ J$
b) $0{,}90\ J$ *d)* $0{,}51\ J$

18.14.2. Calcular la densidad de energía almacenada en este condensador.

NOTA: considerar este condensador como un condensador plano.

a) $0{,}13\ J/\text{m}^3$ *b)* $0{,}25\ J/\text{m}^3$ *c)* $6{,}4 \cdot 10^{-2}\ J/\text{m}^3$ *d)* $72\ J/\text{m}^3$

18.15. Un condensador de 10 μF está conectado a una batería de 150 V. Sin desconectar la batería, se introduce un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 8{,}0$ que ocupa todo el espacio entre placas. La variación de energía almacenada en el condensador será:

a) $0{,}11\ J$ *b)* $0{,}90\ J$ *c)* $0{,}79\ J$ *d)* $-0{,}79\ J$

VECTOR POLARIZACIÓN Y DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

18.16. Considerar un condensador de 10 nF conectado a una batería. Si introducimos un dieléctrico de $\varepsilon_r = 2{,}0$ entre sus placas sin desconectar la batería, podremos afirmar que:

a) La capacidad del condensador pasará a ser de 5,0 nF.

b) El campo electrostático en el interior del dieléctrico será cero.

c) El vector polarización en el interior del dieléctrico será cero.

d) La carga del condensador aumentará.

18.17. Para el espacio comprendido entre las placas de un condensador, d, y parcialmente ocupado por un dieléctrico, de espesor e, el gráfico de la Figura 18.27 representa:

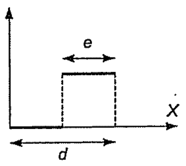


Figura 18.27

a) La polarización

b) El campo eléctrico

c) El desplazamiento eléctrico.

d) El potencial eléctrico.

18.18. En la Figura 18.28 se muestra un condensador donde la mitad del espacio entre placas se encuentra ocupado por un dieléctrico. Los vectores dibujados en los casos A, B, y C representan:

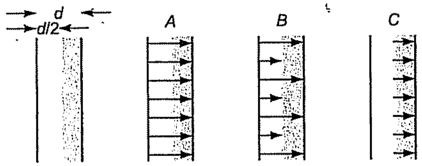


Figura 18.28

a) A: Campo eléctrico total.
B: Vector polarización.
C: Campo eléctrico creado por las cargas inducidas.

b) A: Campo eléctrico creado por las cargas libres.
B: Vector polarización.
C: Vector desplazamiento.

c) A: Vector desplazamiento.
B: Campo eléctrico total.
C: Vector polarización.

d) A: Campo eléctrico total.
B: Campo eléctrico creado por las cargas inducidas.
C: Vector polarización.

18.19. El flujo del vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ a través de una superficie que encierra un volumen es igual a:

a) La carga neta encerrada en la superficie.

b) La carga libre neta encerrada en la superficie.

c) La carga ligada encerrada en la superficie.

d) La densidad superficial de carga de polarización.

18.20. Entre las placas del condensador de la Figura 18.29 hay dos dieléctricos diferentes. Podemos afirmar que en el interior del condensador se mantiene constante:

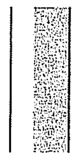


Figura 18.29

a) El campo electrostático E.

b) La polarización P.

c) El potencial V.

d) El desplazamiento eléctrico D.

18.21. Considerar dos condensadores idénticos A y B. Cada uno de ellos está conectado a una fuente de tensión V. Sin desconectar las fuentes, introducimos, ocupando todo el espacio entre armaduras, en el interior del condensador A un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2{,}0$ y en el interior del condensador B un dieléctrico con $\varepsilon_r = 3{,}0$.

a) El dieléctrico del condensador A estará más polarizado que el del B.

b) El desplazamiento eléctrico será mayor en el interior del dieléctrico B.

c) El campo eléctrico será mayor en el interior del dieléctrico A.

d) La caída de tensión entre las placas del condensador A será mayor que entre las del B.

18.22. En la gráfica se representa una magnitud física, M, en función de la distancia en el interior del condensador. El condensador (de distancia entre placas d) contiene un dieléctrico que está junto a la placa que se halla en el origen de coordenadas ($x = 0$) y que ocupa la mitad del espacio entre placas. Podemos afirmar que se tratará de:

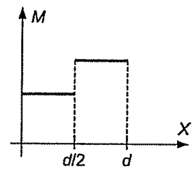


Figura 18.30

a) El campo eléctrico.

b) El desplazamiento eléctrico.

c) La carga libre.

d) La polarización.

18.23. En un condensador de caras plano paralelas hay dos dieléctricos que ocupan a partes iguales todo el espacio entre armaduras (d). Se representa una magnitud en función de la posición obteniéndose la gráfica de la Figura 18.31. La magnitud M representada es:

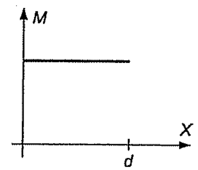


Figura 18.31

a) El campo electrostático total entre placas.

b) El potencial eléctrico.

c) El desplazamiento eléctrico.

d) La polarización.

18.24.1. Un condensador de placas planoparalelas de 10 cm² de sección y 0,44 mm de separación entre armaduras tiene una capacidad de 20 *pF*. Este condensador se carga con una batería de 44 V. Una vez cargado, se desconecta de la batería y a continuación se introduce baquelita (permitividad relativa $\varepsilon_r = 5{,}0$). La lámina de baquelita, que tiene la misma sección que las armaduras y un espesor de 0,10 mm, está en contacto con la armadura positiva. El campo eléctrico en el aire, E_{aire}, y en la baquelita, $E_{baquelita}$, tiene respectivamente, un valor:

a) $E_{aire} = 1{,}0 \cdot 10^5$ V/m, $E_{baquelita} = 1{,}0 \cdot 10^5$ V/m

b) $E_{aire} = 1{,}0 \cdot 10^5$ V/m, $E_{baquelita} = 2{,}0 \cdot 10^4$ V/m

c) $E_{aire} = 2{,}0 \cdot 10^4$ V/m, $E_{baquelita} = 2{,}0 \cdot 10^4$ V/m

d) $E_{aire} = 5{,}0 \cdot 10^5$ V/m, $E_{baquelita} = 1{,}0 \cdot 10^5$ V/m

18.24.2. La caída de tensión, ΔV, en la placa de baquelita es de:

a) $\Delta V = 10$ V *b)* $\Delta V = 2{,}0$ V *c)* $\Delta V = 9{,}0$ V *d)* $\Delta V = 42$ V

18.24.3. En cuanto al desplazamiento eléctrico *D*:

a) El módulo del vector desplazamiento eléctrico aumenta al introducir la baquelita en el condensador.

b) El módulo del vector desplazamiento eléctrico disminuye al introducir la baquelita en el condensador.

c) El módulo del vector desplazamiento eléctrico es de $8{,}8 \cdot 10^{-10}$ *C*, y no cambia al introducir la baquelita en el condensador.

d) El módulo del vector desplazamiento eléctrico es de $8{,}8 \cdot 10^{-7}$ *C*/m², y no cambia al introducir la baquelita en el condensador.

SOLUCIONES

18.1. *b)*	**18.7.** *d)*	**18.12.3.** *d)*	**18.18.** *c)*
18.2. *b)*	**18.8.** *d)*	**18.12.4.** *b)*	**18.19.** *b)*
18.3.1. *c)*	**18.9.** *d)*	**18.12.5.** *b)*	**18.20.** *d)*
18.3.2. *a)*	**18.10.** *a)*	**18.13.** *d)*	**18.21.** *b)*
18.3.3. *c)*	**18.11.1.** *a)*	**18.14.1.** *c)*	**18.22.** *a)*
18.3.4. *b)*	**18.11.2.** *d)*	**18.14.2.** *c)*	**18.23.** *c)*
18.4. *d)*	**18.11.3.** *d)*	**18.15.** *c)*	**18.24.1.** *b)*
18.5. *c)*	**18.12.1.** *b)*	**18.16.** *d)*	**18.24.2.** *b)*
18.6.1. *a)*	**18.12.2.** *c)*	**18.17.** *a)*	**18.24.3.** *d)*
18.6.2. *a)*			

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **La Figura 18.32 muestra un sistema de condensadores de valores $C_1 = 4{,}0$ μF, $C_2 = 8{,}0$ μF, $C_3 = 12$ μF y $C_4 = 20$ μF. El sistema está alimentado con una batería de 21 V. Calcular:**

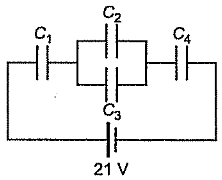


Figura 18.32

a) La capacidad equivalente C_{eq} del sistema.

b) La carga almacenada en el condensador C_1.

c) La caída de potencial en el condensador C_3.

Sol.: a) 2,9 μF; *b)* 60 μC; *c)* 3,0 V

2 **La Figura 18.33 muestra un sistema de condensadores alimentados por una batería de 12 V. Es conocido el valor del condensador C_4, $C_4 = 8{,}0$ μF, y algunas magnitudes eléctricas de los condensadores: $Q_4 = 48$ μC, $Q_3 = 36$ μC y $V_1 = 4{,}0$ *V*. Determinar:**

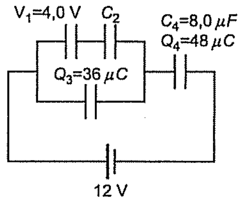


Figura 18.33

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga del condensador C_2.

c) La capacidad del condensador C_1.

d) La energía almacenada en el sistema.

Sol.: a) $C_{eq} = 4{,}0$ μF; *b)* $Q_2 = 12$ μC; *c)* $C_1 = 3{,}0$ μF; *d)* $U = 2{,}9 \cdot 10^2$ μJ

3 **Un condensador de caras plano paralelas tiene una separación entre armaduras $d = 1{,}0$ mm. El área de cada armadura es de 12 cm². Este condensador se pone en contacto con una batería de corriente continua de 12 V. Cuando el condensador está totalmente cargado se des-**

conecta el condensador de la batería y seguidamente se introduce un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 4{,}0$ que ocupa sólo la mitad del espacio entre placas. Determinar:

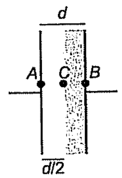


Figura 18.34

a) La carga Q almacenada en el condensador.

b) La capacidad final del condensador con el dieléctrico.

c) La caída de potencial en el dieléctrico, V_{CB}.

d) La variación de energía del sistema al introducir el dieléctrico.

Sol.: a) $Q = 0{,}13\ nC$; *b)* $C_{eq} = 14\ pF$; *c)* $V_{CB} = 1{,}5$ V; *d)* $\Delta U = -0{,}17\ nJ$

4 **Un condensador de placas paralelas separadas 5,0 mm, y capacidad $C_0 = 100\ nF$, se carga conectándolo a una batería de 30 V. Determinar:**

Figura 18.35

a) La carga del condensador.

b) El campo eléctrico entre las placas.

c) La energía almacenada en el condensador.

Una vez cargado, y sin desconectar la batería, se introducen a la vez dos dieléctricos entre las placas. Las permitividades relativas y grosores de los dieléctricos son $\varepsilon_{r1} = 4{,}0$, $d_1 = 2{,}0$ mm, $\varepsilon_{r2} = 3{,}0$, y $d_2 = 3{,}0$ mm respectivamente. Determinar:

d) La capacidad del condensador con los dieléctricos.

e) La carga libre en la placa del condensador.

f) La diferencia de tensión entre los extremos del dieléctrico de permitividad ε_{r1}.

Sol.: a) $Q_0 = 3{,}0\ \mu C$; *b)* $E = 6{,}0 \cdot 10^3$ V/m; *c)* $U = 45\ \mu J$; *d)* $C_F = 333\ nF$; *e)* $\sigma = 0{,}18\ \mu C/m^2$; *f)* $\Delta V = 10$ V.

5 **En el dibujo se presenta un conjunto de condensadores conectados a una batería de corriente continua. Los valores de las capacidades y batería son: $C_1 = 1{,}0 \cdot 10^2\ nF$, $C_2 = 50\ nF$, $C_3 = 50\ nF$, $C_4 = C_5 = 75\ nF$, $\varepsilon = 12$ V. Calcular:**

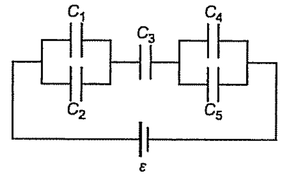


Figura 18.36

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga de cada condensador.

c) La caída de potencial de cada condensador.

Sin desconectar de la batería, se introduce baquelita, $\varepsilon_r = 5{,}0$, en el condensador C_3 ocupando totalmente el espacio entre placas. Calcular:

d) La carga y el potencial del condensador C_3.

Sol.: a) $C_{eq} = 30\ nF$; *b)* $Q_1 = 0{,}24\ \mu C$, $Q_2 = 0{,}12\ \mu C$, $Q_3 = 0{,}36\ \mu C$, $Q_4 = 0{,}18\ \mu C$, $Q_5 = 0{,}18\ \mu C$; *c)* $V_1 = 2{,}4\ V$, $V_2 = 2{,}4\ V$, $V_3 = 7{,}2\ V$, $V_4 = 2{,}4\ V$, $V_5 = 2{,}4\ V$; *d)* $Q'_3 = 0{,}69\ \mu C$, $V'_3 = 2{,}8\ V$.

6 **El sistema de la figura inferior está compuesto por ocho condensadores cuyas capacidades respectivas son: $C_1 = C_2 = 30\ \mu F$, $C_3 = 60\ \mu F$, $C_4 = 12\ \mu F$, $C_5 = 6{,}0\ \mu F$, $C_6 = 16\ \mu F$, $C_7 = 6{,}0\ \mu F$ y $C_8 = 2{,}0\ \mu F$. Todos los condensadores tienen una separación entre placas de 1,0 mm. Hallar:**

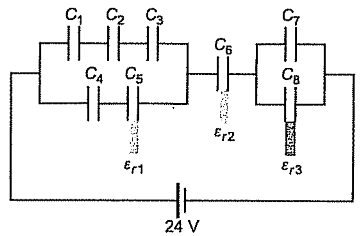


Figura 18.37

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga de los condensadores C_3, C_5, C_6 y C_7.

c) La diferencia de tensión entre placas de los condensadores C_2, C_4, C_6 y C_8.

d) El campo eléctrico en el interior del condensador C_6.

e) La densidad de energía almacenada en los condensadores C_1, C_5, C_6 y C_7.

Sin desconectar el sistema de la batería se introducen simultáneamente tres dieléctricos de permitividades relativas $\varepsilon_{r1} = 2{,}0$, $\varepsilon_{r2} = 1{,}5$ y $\varepsilon_{r3} = 3{,}0$ en los condensadores C_5, C_6 y C_8 respectivamente. Calcular:

f) La capacidad equivalente del sistema.

g) La carga y caída de potencial del condensador C_6.

Sol.: a) $C_{eq} = 4{,}0\ \mu F$; *b)* $Q_3 = 72\ \mu C$, $Q_5 = 24\ \mu C$, $Q_6 = 96\ \mu C$, $Q_7 = 72\ \mu C$; *c)* $V_2 = 2{,}4\ V$, $V_4 = 2{,}0\ V$, $V_6 = 6{,}0\ V$, $V_8 = 12\ V$; *d)* $E_6 = 6{,}0\ kV/m$; *e)* $\eta_1 = 25\ \mu J/m^3$, $\eta_5 = 71\ \mu J/m^3$, $\eta_6 = 0{,}16\ mJ/m^3$, $\eta_7 = 0{,}64\ mJ/m^3$; *f)* $C'_{eq} = 5{,}5\ \mu F$; *g)* $Q'_6 = 1{,}3 \cdot 10^2\ \mu C$, $V'_6 = 5{,}5\ V$

7 **Los condensadores C_1, C_2 y C_6 de la figura tienen una capacidad de 3,0 μF. La capacidad de los condensadores C_3, C_4 y C_5 es de 1,0 μF. El sistema está conectado a una tensión de 90 V. Calcular:**

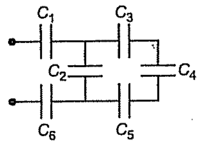


Figura 18.38

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga de cada uno de los condensadores.

c) La caída de potencial entre las placas de los condensadores C_1 y C_3.

Sin desconectar de la batería, se introduce entre las placas del condensador C_6 un dieléctrico de constante dieléctrica (permitividad relativa) 2,0. Calcular:

d) La carga de los condensadores C_1 y C_3.

e) La energía almacenada en los condensadores C_1 y C_3.

Sol.: a) $C_{eq} = 1{,}0\ \mu F$; *b)* $Q_1 = 93\ \mu C$, $Q_2 = 84\ \mu C$, $Q_3 = 9{,}3\ \mu C$, $Q_4 = 9{,}3\ \mu C$, $Q_5 = 9{,}3\ \mu C$, $Q_6 = 93\ \mu C$; *c)* $V_1 = 31\ V$, $V_3 = 8{,}5\ V$; *d)* $Q_1 = 1{,}1 \cdot 10^2\ \mu C$, $Q_3 = 10\ \mu C$; *e)* $U_1 = 2{,}1\ mJ$, $U_3 = 63\ \mu J$.

8 **Un condensador de placas paralelas que tiene una capacidad de 2,0 μF se conecta a una batería de 12 V.**

a) Hallar la carga que adquiere el condensador.

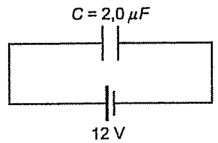


Figura 18.39

Una vez cargado el condensador se desconecta de la batería y se inserta entre sus placas una placa de dieléctrico de constante dieléctrica 3,0 que llena todo el espacio que hay entre dichas placas.

b) ¿Cuál será ahora la carga y la tensión entre las placas del condensador?

c) ¿En cuánto ha variado la energía del condensador al insertar el dieléctrico?

El condensador con el dieléctrico se conecta en paralelo a otro condensador de 4,0 μF que está descargado.

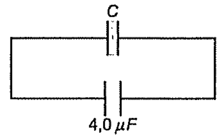


Figura 18.40

d) Calcular la carga y el potencial de cada condensador después de la unión.

e) ¿Cuál ha sido la variación de energía del sistema después de la unión?

Sol.: a) $Q = 24\ \mu C$; *b)* $Q = 24\ \mu C$, $V = 4{,}0\ V$; *c)* $\Delta U = -96\ \mu J$; *d)* $Q_1 = 14\ \mu C$, $Q_2 = 9{,}6\ \mu C$, $V_1 = V_2 = 2{,}4\ V$; *e)* $\Delta U = -19\ \mu J$

9 **En el sistema de la figura, las capacidades de los condensadores tienen los siguientes valores: $C_1 = 3{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$, $C_3 = 8{,}0\ \mu F$ y $C_4 = 12\ \mu F$. Todos los condensadores tienen una separación de 0,40 mm entre placas. Calcular:**

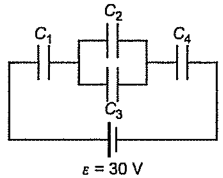


Figura 18.41

a) La capacidad equivalente del sistema.

b) La carga que suministra la batería al sistema de condensadores.

c) El campo eléctrico en el interior de cada uno de los condensadores.

Se desconecta la batería del sistema de condensadores. Se introduce en los condensadores C_1 y C_4 sendos dieléctricos, ocupando todo el espacio entre placas, de permitividad relativa $\varepsilon_{r1} = 4{,}0$ y $\varepsilon_{r4} = 1{,}5$ respectivamente. Calcular:

d) La capacidad equivalente.

e) La carga que tendrá ahora cada condensador.

f) El campo eléctrico en el interior de cada condensador.

g) La densidad de energía en los condensadores 3 y 4.

Sol.: *a)* $C_{eq} = 2{,}0\ \mu F$; *b)* $Q = 60\ \mu C$; *c)* $E_1 = 5{,}0 \cdot 10^4$ V/m, $E_2 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m, $E_3 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m, $E_4 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m; *d)* $C'_{eq} = 4{,}5\ \mu F$; *e)* $Q_1 = 60\ \mu C$, $Q_2 = 20\ \mu C$, $Q_3 = 40\ \mu C$, $Q_4 = 60\ \mu C$; *f)* $E'_1 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m, $E'_2 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m, $E'_3 = 1{,}3 \cdot 10^4$ V/m, $E'_4 = 8{,}3 \cdot 10^3$ V/m; *g)* $\eta_3 = 0{,}69$ mJ/m³, $\eta_4 = 0{,}46$ mJ/m³

10 **Las placas de un condensador de placas paralelas tienen un área de 0,30 m² y están separadas una distancia de 3,0 mm. Se conecta este condensador a una tensión de 30 V.**

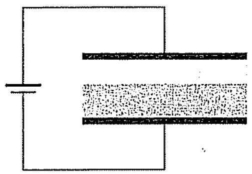


Figura 18.42

a) Calcular la capacidad y la carga de este condensador.

Sin desconectar de la fuente se llena el espacio entre placas con dos dieléctricos, uno de espesor 1,0 mm y constante dieléctrica 3,0, y el otro de 2,0 mm de espesor y constante dieléctrica 6,0. Calcular:

b) La capacidad equivalente del sistema.

c) La nueva carga del condensador.

d) El campo eléctrico en el interior del primer dieléctrico (espesor 1,0 mm y constante dieléctrica 3,0) y la diferencia de potencial entre sus extremos.

e) La energía almacenada en el condensador.

Sol.: *a)* $C_0 = 0{,}89\ nF$, $Q = 27\ nC$; *b)* $C_{eq} = 4{,}0\ nF$; *c)* $Q = 0{,}12\ \mu C$; *d)* $E = 1{,}5 \cdot 10^4$ V/m, $\Delta V = 15$ V; *e)* $U = 1{,}8\ \mu J$

11 **Un condensador de placas planoparalelas de 220 cm² de área, separadas 0,50 mm se conecta a una fuente de tensión de 15 V.**

a) ¿Qué carga tendrá almacenada este condensador?

Cuando el condensador está completamente cargado, se desconecta de la batería y se introducen entre las placas dos dieléctricos A y B de grosores $d_A = 0{,}20$ mm y $d_B = 0{,}30$ mm, y permitividades relativas $\varepsilon_A = 2{,}0$ y $\varepsilon_B = 5{,}0$. Calcular:

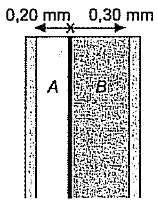


Figura 18.43

b) El campo eléctrico en el interior de cada uno de los dieléctricos.

c) La caída de tensión entre las placas del condensador.

d) La densidad de carga ligada que hay sobre la superficie del dieléctrico B.

e) La capacidad equivalente del condensador con los dos dieléctricos.

Sol.: *a)* $Q_0 = 5{,}8\ nC$; *b)* $E'_A = 15\ kV/m$, $E'_B = 6{,}0\ kV/m$; *c)* $\Delta V = 4{,}8$ V; *d)* $\sigma_{LB} = 0{,}21\ \mu C/m^2$, *e)* $C_F = 1{,}2\ nF$.

12 **Un condensador está formado por dos placas cuadradas de lado $L = 80$ mm, separadas una distancia $d = 6{,}0$ mm. Entre ellas se establece una diferencia de potencial de 240 V. Una vez cargado se desconecta de la batería. Se introduce entre las placas, y equidistante a ellas, una lámina de dieléctrico, de constante dieléctrica 5,0, de igual área y con un espesor $e = 4{,}0$ mm. Calcular:**

a) La carga almacenada en el condensador.

b) La capacidad del sistema en función de la distancia x que se ha introducido el dieléctrico.

c) La caída de potencial entre las armaduras del condensador, V', y entre las caras del dieléctrico, V_D'.

d) La energía almacenada en el condensador antes y después de introducir completamente el dieléctrico.

e) La densidad de carga ligada.

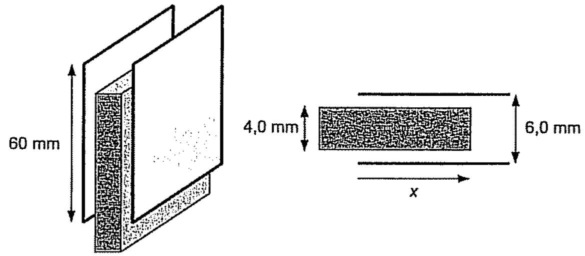


Figura 18.44

Sol.: *a)* $Q = 2{,}3\ nC$; *b)* $C_{eq} = \varepsilon_0 \cdot L\left(\dfrac{\varepsilon_r \cdot x}{\varepsilon_r \cdot (d - e) + e} + \dfrac{L - x}{d}\right)$; *c)* $V' = 112$ V, $V_D' = 32$ V; *d)* $U_0 = 0{,}28\ \mu J$, $U_f = 0{,}13\ \mu J$; *e)* $\sigma_L = 0{,}29\ \mu C/m^2$

CAPÍTULO 19

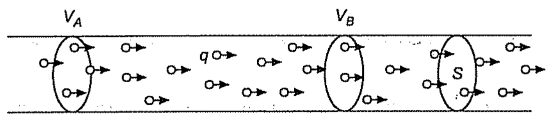
CORRIENTE CONTINUA

19.1. CORRIENTE ELÉCTRICA

Cuando entre dos puntos A y B de un conductor se mantiene una diferencia de potencial aparece un flujo neto de cargas en el interior del conductor, es decir, se genera una corriente eléctrica. La *intensidad de corriente I* en un conductor es la carga que atraviesa la sección del conductor en la unidad de tiempo.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad del SI de intensidad de corriente es el ampère (A).



Se define el sentido de la corriente eléctrica igual al sentido en que disminuye el potencial eléctrico. En consecuencia, el sentido de la intensidad es el sentido del movimiento que tendrían las cargas positivas. En un conductor metálico los portadores de carga son electrones y por tanto el sentido de la intensidad es el contrario al del movimiento de los electrones.

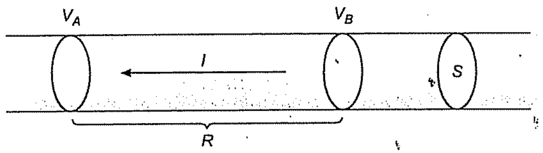
A escala microscópica la intensidad de corriente se puede expresar como:

$$I = qnv_dS$$

Siendo q la carga de los portadores de carga, n la densidad de portadores de carga, v_d la velocidad de desplazamiento o velocidad de deriva de los portadores de carga y S la sección del conductor.

19.2. LEY DE OHM Y RESISTENCIA ELÉCTRICA

La *ley de Ohm* establece que en muchos materiales, a temperatura constante, existe una relación de proporcionalidad entre la diferencia de tensión $V_B - V_A$ en dos puntos del material y la intensidad de corriente I en el material. La constante de proporcionalidad es la *resistencia eléctrica* entre estos dos puntos.



Los materiales que cumplen la ley de Ohm se denominan materiales óhmicos entre los cuales se encuentran la mayor parte de los metales.

La resistencia eléctrica de un cable de longitud l y sección S viene dada por:

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

Siendo ρ la resistividad del material.

19.3. LA ENERGÍA EN LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

LEY DE JOULE

Cuando una intensidad de corriente I circula por un conductor éste se calienta debido a las interacciones de los electrones de conducción con los iones de la red cristalina. Este calentamiento se conoce como *efecto Joule*. La rapidez con que la energía eléctrica se transforma en energía térmica es la potencia disipada en el conductor por efecto Joule, y viene dada por:

$$P = RI^2$$

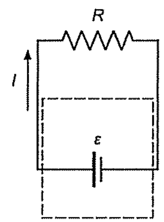
BATERÍAS Y FUERZA ELECTROMOTRIZ

Para mantener una corriente en un circuito es necesario un suministro constante de energía. En un circuito de corriente continua este suministro se consigue mediante una batería. Las baterías se caracterizan por su fuerza electromotriz o *fem* ε y su resistencia interna r.

La *fuerza electromotriz* ε es la energía que la batería suministra a la unidad de carga para que recorra el circuito. La potencia suministrada por la batería viene dada por:

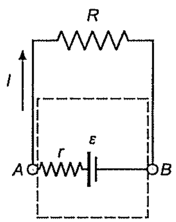
$$P = \varepsilon I$$

Una batería ideal, como la que muestra la figura, es aquella capaz de mantener en bornes una diferencia de tensión igual a su *fem* independientemente de la intensidad de corriente que circule por su interior. En este caso toda la potencia eléctrica suministrada por la batería se disipa en la resistencia R por efecto Joule.



Batería ideal

$$\varepsilon I = RI^2$$



Batería real

En las baterías reales se observa que la tensión en bornes de la batería decrece al aumentar la intensidad de corriente que suministran debido a que presentan una cierta resistencia interna r. En este caso la potencia suministrada por la batería se disipa por efecto Joule en la resistencia externa y en su propia resistencia interna.

$$\varepsilon I = RI^2 + rI^2 \Rightarrow \varepsilon = RI + rI$$

La diferencia de tensión en bornes de la batería es:

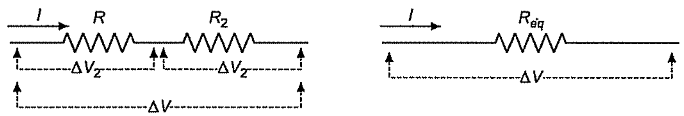
$$V_A - V_B = RI = \varepsilon - rI$$

Cuando la intensidad de corriente en el interior de la batería circula del polo negativo al positivo, la batería está proporcionando energía a las cargas del circuito y por tanto ella se está descargando. En circuitos con más de una batería puede darse el caso que una o más baterías se encuentren cargándose, es decir, absorbiendo energía de las cargas del circuito. En este caso la corriente en el interior de la batería circula del polo positivo al negativo.

19.4. ASOCIACIONES DE RESISTENCIAS

Las resistencias se pueden asociar en serie y en paralelo.

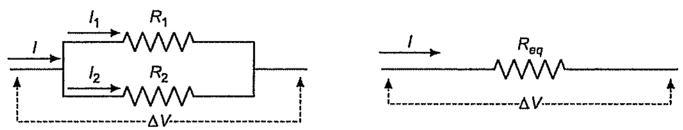
Dos o más resistencias se asocian en *serie* cuando la misma corriente I pasa por todas ellas. La resistencia equivalente R_{eq} de la asociación es aquella por la que pasa la misma corriente I manteniendo en sus bornes una caída de tensión igual a $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.



La resistencia equivalente de la asociación en serie de dos o más resistencias viene dada por:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + ...$$

Dos o más resistencias se asocian en *paralelo* cuando en sus bornes mantienen la misma caída de tensión ΔV. La resistencia equivalente R_{eq} de la asociación es aquella por la que pasa una corriente igual a $I = I_1 + I_2$ manteniendo en sus bornes la misma caída de tensión ΔV.



La resistencia equivalente de la asociación en paralelo de dos o más resistencias viene dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

19.5 REGLAS DE KIRCHHOFF

Las reglas de Kirchhoff son la concreción de los principios de conservación de la carga eléctrica y de la energía, a los circuitos eléctricos. Antes de enunciarlas conviene definir los conceptos de nudo, malla y rama.

Un *nudo* de un circuito es el punto donde confluyen tres o más conductores.

Una *malla* es cualquier circuito cerrado que podemos trazar en una red eléctrica. Una malla puede recorrerse, volviendo al punto de salida, sin pasar dos veces por el mismo punto.

Una *rama* es la parte de una malla comprendida entre dos nudos y que no posee en su interior ningún otro nudo.

El enunciado de las *reglas de Kirchhoff* es el siguiente:

Primera regla o regla de los nudos. La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades de corriente que salen del nudo.

Segunda regla o regla de las mallas. La suma algebraica de las caídas de tensión a lo largo de una malla del circuito es siempre igual a cero.

Existen varios métodos para calcular las intensidades de corriente en un circuito de corriente continua en el que se encuentran asociadas varias resistencias y baterías. Seguidamente se explicará un método basado en la aplicación de las reglas de Kirchhoff.

El procedimiento de aplicación es el siguiente:

a) Se dibujará el circuito y se asignará un nombre y sentido a la intensidad de corriente en cada una de sus ramas.

b) Se aplicará la regla de los nudos a todos los nudos del circuito menos uno. Se pueden escribir tantas ecuaciones linealmente independientes como nudos haya menos a uno.

c) Se aplicará la regla de las mallas tantas veces como sea necesario para obtener un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas. Referente a las mallas se pueden escribir tantas ecuaciones linealmente independientes como mallas haya menos una.

Al aplicar la regla de las mallas se deberá tener en cuenta que cuando se atraviesa una resistencia en el sentido de la corriente la tensión disminuye $-RI$, mientras que cuando se atraviesa en sentido contrario al de la corriente la tensión aumenta RI. Cuando se atraviesa una *fem* desde el polo negativo al positivo la tensión aumenta en ε, mientras que cuando se atraviesa de positivo a negativo la tensión disminuye $-\varepsilon$.

d) Se resolverá el sistema de ecuaciones.

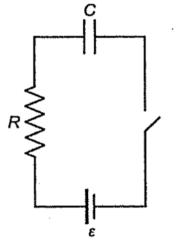
e) Las intensidades resultantes positivas son aquellas que tienen el mismo sentido que el inicialmente escogido, mientras que las negativas tienen sentido contrario.

19.6 CIRCUITO RC

El *circuito RC* es aquel en que se encuentran una resistencia y un condensador.

Consideremos el circuito RC de la figura conectado a una fuente de *fem* ε. El condensador inicialmente está descargado. En el instante de tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor y empieza a fluir carga de la batería al condensador hasta que este último se carga por completo. La carga del condensador varía desde $Q = 0$ hasta el valor final $Q_f = C\varepsilon$, según la expresión:

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



La *constante de tiempo* del circuito τ es igual al producto de la resistencia del circuito por la capacidad del condensador:

$$\tau = RC$$

Es preciso notar que en el instante de tiempo $t = 0$ la carga del condensador es cero y por tanto la caída de tensión entre sus placas también es cero, en este instante la caída de tensión en bornes de la resistencia es igual a ε.

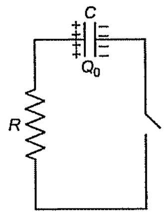
La intensidad de corriente en el circuito se obtiene aplicando:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \qquad I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Para valores de t suficientemente grandes, cuando el condensador se encuentra completamente cargado, cesa el flujo de carga y la intensidad de corriente se hace cero.

Consideremos ahora el circuito de la figura. En él se encuentra un condensador completamente cargado con carga Q_0 conectado a una resistencia R. En el instante de tiempo $t = 0$ se conecta el interruptor y el condensador se descarga a través de la resistencia. La carga del condensador irá disminuyendo desde el valor inicial Q_0 hasta hacerse finalmente cero. La expresión de la variación de la carga con el tiempo es:

$$Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$



La intensidad de corriente en el circuito puede hallarse haciendo:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} \qquad I(t) = \frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

De la expresión anterior se deduce que la intensidad de corriente del circuito varía desde el valor inicial $\frac{Q_0}{RC}$ hasta hacerse cero para tiempos grandes.

PROBLEMAS RESUELTOS

19.1. La intensidad de corriente en un cable de plata del calibre 10 (sección de 5,261 mm²) es de 3,00 A. Teniendo en cuenta que la densidad de portadores de carga en el cable es de $5{,}86 \cdot 10^{28}\ e^-/m^3$, determinar:

a) La velocidad de deriva de los electrones de conducción.

b) El tiempo medio empleado por un electrón de conducción en recorrer 20 cm de cable.

Solución

a) La intensidad de corriente del cable está relacionada con la densidad de portadores de carga n, la carga de los portadores de carga q, su velocidad de deriva y la sección del cable A, mediante la expresión:

$$I = q\, n\, v_d A$$

En consecuencia, la velocidad de deriva de los portadores de carga será:

$$v_d = \frac{I}{qnA};\ v_d = \frac{3{,}0\ \text{A}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5{,}86 \cdot 10^{28}\ e^-/\text{m}^3 \cdot 5{,}261 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 6{,}082 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}$$

La velocidad de deriva de los electrones de conducción en el cable es de $6{,}08 \cdot 10^{-5}$ m/s.

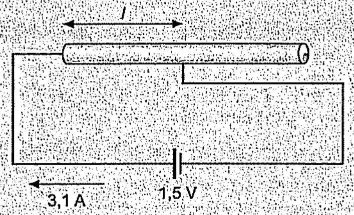
b) El tiempo medio empleado por un electrón de conducción en recorrer 20 cm de cable será:

$$t = \frac{d}{v_d} \qquad t = \frac{0{,}200\ \text{m}}{6{,}082 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}} = 3289\ \text{s}$$

Un electrón de conducción tardará, en promedio, 54 minutos y 49 segundos en recorrer 20 cm de cable.

19.2. Un cable de nicrom del calibre 14 (2,081 mm² de sección) se conecta a una batería de 1,5 V (véase figura). Calcular la distancia l a la que debe realizarse la conexión para que la corriente que lo atraviese sea de 3,1 A.

Dato: La resistividad del nicrom es $100 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.



Solución

La resistencia del circuito será:

$$R = \frac{\varepsilon}{I} \qquad R = \frac{1{,}5\ \text{V}}{3{,}1\ \text{A}} = 0{,}484\ \Omega$$

Esta resistencia puede expresarse como una función de la resistividad del nicrom ρ, la longitud de cable conectado l, y su sección A, como:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Despejando l de la expresión anterior se obtiene

$$l = \frac{RA}{\rho} \qquad l = \frac{0{,}484\ \Omega \cdot 2{,}081 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2}{100 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}} = 1{,}01\ \text{m}$$

La longitud de cable conectado deberá ser igual a 1,0 m.

19.3. La intensidad de corriente en un cable de cobre del calibre 10 (sección de 3,309 mm²) es de 4,0 A. Suponiendo que en promedio cada átomo de cobre proporciona 1,2 electrones de conducción, determinar:

a) La carga que atraviesa la sección del cable en un intervalo de tiempo de 30 s.

b) La densidad de portadores de carga del cobre.

c) La velocidad de deriva de los portadores de carga.

Datos: carga del electrón $e^- = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, masa molar del cobre $m = 63{,}5$ g/mol, densidad del cobre $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³, constante de Avogadro $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos/mol.

Solución

a) La intensidad de corriente es la carga que atraviesa la sección del cable en la unidad de tiempo. En consecuencia si la intensidad de corriente es de 4,0 A la carga que atraviesa la sección en 1,0 s es de 4,0 C, y en un intervalo de 30 s la carga será:

$$Q = 4{,}0\ \text{A} \cdot 30\ \text{s} = 120\ \text{C}$$

A lo largo de 30 s, 120 C de carga atraviesan la sección del cable.

b) La densidad de portadores de carga del cobre n se puede determinar a partir de la densidad del material, aplicando los siguientes factores de conversión:

$$n = \frac{8{,}9 \cdot 10^6\ \cancel{g}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{mol}}}{63{,}5\ \cancel{g}} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \cancel{\text{átomos}}}{\cancel{\text{mol}}} \cdot \frac{1{,}2\ \text{electrones de conducción}}{\cancel{\text{átomo}}}$$

$$n = 1{,}01 \cdot 10^{29}\ \frac{\text{electrones de conducción}}{\text{m}^3}$$

La densidad de portadores de carga del cobre es de: $1{,}0 \cdot 10^{29}\ \frac{e^-\ \text{conducción}}{\text{m}^3}$

c) La velocidad de deriva v_d está relacionada con la intensidad de corriente I mediante la siguiente expresión:

$$I = nqAv_d$$

Siendo n la densidad de portadores de carga, q la carga de los portadores y A la sección del cable.

Despejando v_d de la expresión anterior y sustituyendo por los correspondientes valores numéricos queda:

$$v_d = \frac{I}{nqA}; \quad v_d = \frac{4{,}0\ \text{A}}{1{,}01 \cdot 10^{29}\ \frac{e^-\ \text{conducción}}{\text{m}^3} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 3{,}309 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 7{,}48 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}$$

La velocidad de deriva de los electrones de conducción en este cable es de $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ m/s.

19.4. Por un cable de cobre del calibre 16 (área de 1,309 mm²) de 2,0 m de longitud circula una intensidad de corriente de 0,50 A. La resistividad del cobre es de $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Determinar la energía disipada en el cable por efecto Joule en 1,5 minutos.

Solución

La resistencia del cable es:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Siendo ρ la resistividad, l y S su longitud y sección respectivamente.

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene que la resistencia de este cable es:

$$R = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}\ \frac{2{,}0\ \text{m}}{1{,}309 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = 0{,}0260\ \Omega$$

La potencia disipada en el cable es:

$$P = RI^2 \qquad P = 0{,}0260\ \Omega\ (0{,}50\ \text{A})^2 = 6{,}50 \cdot 10^{-3}\ \text{W}$$

La energía disipada en 1,5 minutos (90 segundos) es:

$$Pt = 6{,}50 \cdot 10^{-3}\ \text{W}\ 90\ \text{s} = 0{,}585\ \text{J}$$

Al cabo de 1,5 minutos se han disipado en forma de calor 0,59 J.

19.5. Una batería de 8,00 V y resistencia interna 0,500 Ω se conecta a una resistencia de 100 Ω. Determinar:

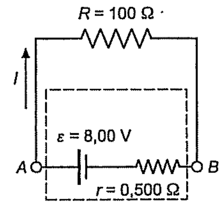
a) La intensidad de corriente que atraviesa la batería

b) La caída de tensión en bornes de la batería.

Solución

a) La intensidad de corriente se encontrará aplicando la regla de las mallas. Se recorrerá la malla del circuito en sentido horario:

$$\varepsilon - RI - rI = 0$$



Despejando la intensidad y sustituyendo por los valores numéricos queda:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \qquad I = \frac{8{,}00\ \text{V}}{100\ \Omega + 0{,}500\ \Omega} = 0{,}07960\ \text{A}$$

La intensidad de corriente es de 79,6 mA.

b) Para determinar la caída de tensión entre A y B partiremos del punto A que se encuentra a una tensión V_A y avanzaremos hacia B que se encuentra a una tensión V_B pasando por la resistencia R.

$$V_A - RI = V_B$$

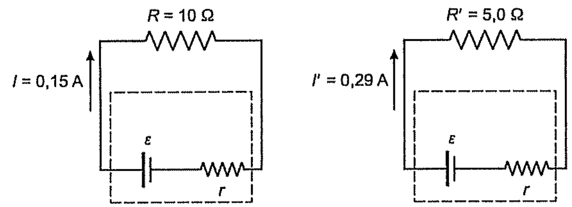
La diferencia de tensión en bornes de la batería queda:

$$V_A - V_B = RI \qquad V_A - V_B = 100\ \Omega \cdot 0{,}07960\ \text{A} = 7{,}96\ \text{V}$$

19.6. Cuando una batería de *fem* y resistencia interna desconocidas se conecta a una resistencia de 10 Ω suministra una intensidad de corriente de 150 mA, mientras que cuando se conecta a una resistencia de 5,0 Ω suministra una intensidad de 290 mA. Determinar la *fem* y resistencia interna de la batería.

Solución

Se aplicará la segunda regla de Kirchhoff a los dos circuitos de la figura recorriendo las mallas en sentido horario.



Para el primer circuito:

$$\varepsilon - RI - rI = 0 \tag{1}$$

Y para el segundo:

$$\varepsilon - R'I' - rI' = 0 \tag{2}$$

Restando la expresión (2) de (1) se obtiene:

$$-RI + R'I' - rI + rI' = 0$$

Despejando r de la expresión anterior y sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$r = \frac{R'I' - RI}{I - I'} \qquad r = \frac{5{,}0\ \Omega\ 0{,}29\ \text{A} - 10\ \Omega\ 0{,}15\ \text{A}}{0{,}15\ \text{A} - 0{,}29\ \text{A}} = 0{,}357\ \Omega$$

Despejando ε de (1) y sustituyendo por los valores numéricos:

$$\varepsilon = (R - r)\,I \qquad \varepsilon = (10\ \Omega - 0{,}357\ \Omega)\ 0{,}15\ \text{A} = 1{,}55\ \text{V}$$

La fuerza electromotriz de la batería es de 1,6 V y su resistencia interna 0,36 Ω.

19.7. Se dispone de cinco bombillas de 25 W a 110 V. Determinar la potencia disipada por efecto Joule cuando:

a) Se conectan en serie a una fuente de 110 V.
b) Se conectan en paralelo a una fuente de 110 V.

Solución

En primer lugar se determinará la resistencia de cada una de las bombillas.

Cuando una bombilla se conecta a 110 V la potencia disipada es de 25 W. La intensidad de corriente en la bombilla es:

$$I = \frac{P}{\Delta V} \tag{1}$$

Y su resistencia:

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en la expresión (2) se obtiene:

$$R = \frac{(\Delta V)^2}{P} \qquad R = \frac{(110\ \text{V})^2}{25\ \text{W}} = 484\ \Omega$$

a) Cuando las cinco bombillas se conectan en serie la resistencia equivalente del conjunto es:

$$R_{eq} = 5R \qquad R_{eq} = 5 \cdot 484\ \Omega = 2420\ \Omega$$

Y la potencia disipada por el conjunto es:

$$P' = I\,\Delta V = \frac{(\Delta V)^2}{R_{eq}} = \frac{(110\ \text{V})^2}{2420\ \Omega} = 5{,}00\ \text{W}$$

La potencia disipada por la asociación de bombillas en serie es de 5,0 W.

b) Cuando las cinco bombillas se conectan en paralelo su resistencia equivalente es:

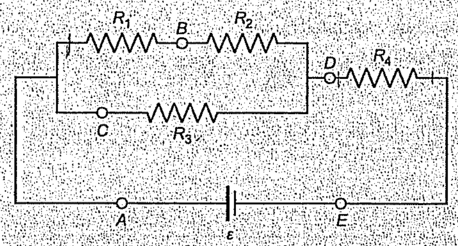
$$R'_{eq} = \frac{R}{5}; \quad R'_{eq} = \frac{484\ \Omega}{5} = 96{,}8\ \Omega$$

Y la potencia disipada por el conjunto es:

$$P'' = I\,\Delta V = \frac{(\Delta V)^2}{R_{eq}} = \frac{(110\ \text{V})^2}{96{,}6\ \Omega} = 125\ \text{W}$$

La potencia disipada por la asociación de bombillas en paralelo es de 130 W.

19.8. Considerar el circuito de la figura con $R_1 = 2{,}0$ kΩ, $R_2 = 4{,}0$ kΩ, $R_3 = 6{,}0$ kΩ, $R_4 = 2{,}0$ kΩ y $\varepsilon = 15$ V.



Determinar:

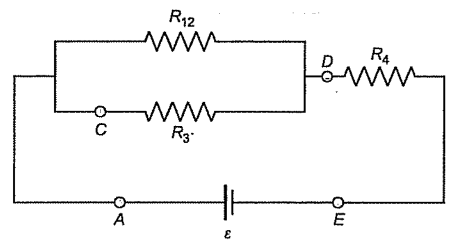
a) La resistencia equivalente del circuito.
b) La intensidad de corriente que pasa por cada uno de los puntos señalados en la figura.
c) La caída de tensión en los extremos de cada una de las resistencias.

Solución

a) Sea R_{12} la resistencia equivalente de la asociación en serie de las resistencias R_1 y R_2:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 2{,}0\ \text{k}\Omega + 4{,}0\ \text{k}\Omega = 6{,}0\ \text{k}\Omega$$

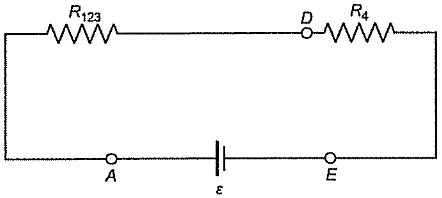
El circuito de la figura puede sustituirse por el siguiente circuito equivalente:



Seguidamente se calculará la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de R_{12} y R_3. Esta resistencia la denominaremos R_{123}.

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3}; \quad R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{123} + R_3}; \quad R_{123} = \frac{6{,}0\ \text{k}\Omega\ 6{,}0\ \text{k}\Omega}{6{,}0\ \text{k}\Omega + 6{,}0\ \text{k}\Omega} = 3{,}0\ \text{k}\Omega$$

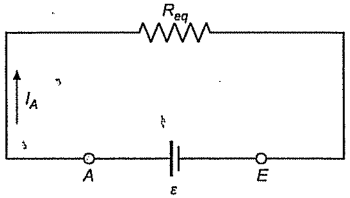
Ahora el circuito anterior puede sustituirse por el siguiente circuito equivalente:



La resistencia equivalente R_{eq} del circuito será el resultado de la asociación en serie de R_{123} y R_4.

$$R_{eq} = R_{123} + R_4 \qquad R_{eq} = 3{,}0\ \text{k}\Omega + 2{,}0\ \text{k}\Omega = 5{,}0\ \text{k}\Omega$$

b) La intensidad de corriente que pasa por el punto A se puede determinar haciendo:

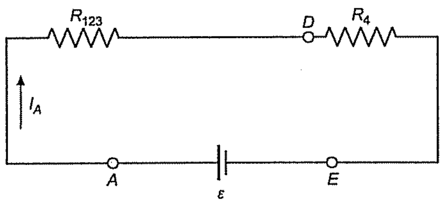


$$I_A = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} \qquad I_A = \frac{15\ \text{V}}{5{,}0\ \text{k}\Omega} = 3{,}0\ \text{mA}$$

Esta es la misma intensidad que circula por la asociación en serie de R_{123} y R_4.

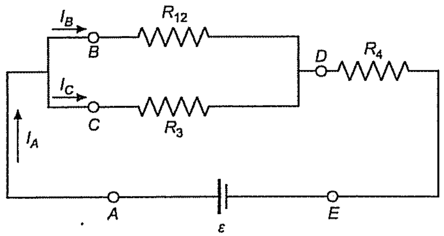
Las diferencias de tensión en los extremos de las resistencias se calculan con la ley de Ohm.

$$V_A - V_D = R_{123}\, I_A \qquad V_A - V_D = 3{,}0\ \text{k}\Omega\ 3{,}0\ \text{mA} = 9{,}0\ \text{V}$$
$$V_D - V_E = R_4\, I_A \qquad V_D - V_E = 2{,}0\ \text{k}\Omega\ 3{,}0\ \text{mA} = 6{,}0\ \text{V}$$



Es fácil comprobar que $V_A - V_D + V_D - V_E = 9{,}0\ \text{V} + 6{,}0\ \text{V} = 15\ \text{V} = \varepsilon$.

Para determinar las intensidades de corriente que pasan a través de las resistencias R_{12} y R_3 se tendrá en cuenta que la diferencia de tensión en sus bornes es $V_A - V_D = 9{,}0$ V.



Aplicando la ley de Ohm a cada una de ellas se obtiene:

$$I_B = \frac{V_D - V_A}{R_{12}} \qquad I_B = \frac{9{,}0\ \text{V}}{6{,}0\ \text{k}\Omega} = 1{,}5\ \text{mA}$$

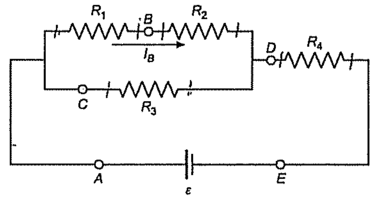
$$I_C = \frac{V_D - V_A}{R_3} \qquad I_C = \frac{9{,}0\ \text{V}}{6{,}0\ \text{k}\Omega} = 1{,}5\ \text{mA}$$

También se puede comprobar que la intensidad de corriente que pasa por el punto A es igual a la suma de las intensidades que pasan por los puntos B y C.

$$I_B + I_C = 1{,}5\ \text{mA} + 1{,}5\ \text{mA} = 3{,}0\ \text{mA} = I_A$$

Finalmente se hallará la caída de tensión en bornes de las resistencias R_1 y R_2 aplicando de nuevo la ley de Ohm:

$$V_A - V_B = R_1\, I_B \qquad V_A - V_B = 2{,}0\ \text{k}\Omega\ 1{,}5\ \text{mA} = 3{,}0\ \text{V}$$
$$V_B - V_D = R_2\, I_B \qquad V_B - V_D = 4{,}0\ \text{k}\Omega\ 1{,}5\ \text{mA} = 6{,}0\ \text{V}$$



En este caso también es muy fácil comprobar que la suma de estas dos caídas de tensión coincide con la tensión entre A y D.

$$V_A - V_B + V_B - V_D = 3{,}0\ \text{V} + 6{,}0\ \text{V} = 9{,}0\ \text{V} = V_A - V_D$$

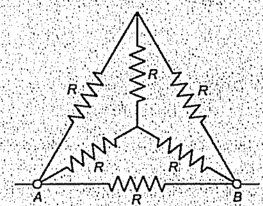
En resumen, las intensidades de corriente en los puntos señalados en la figura son:

$$I_A = I_D = I_E = 3{,}0\ \text{mA} \qquad I_B = I_C = 1{,}5\ \text{mA}$$

c) Las caídas de tensión en los extremos de cada una de las resistencias son:

En los extremos de la resistencia R_1: $V_{AB} = 3{,}0$ V
En los extremos de la resistencia R_2: $V_{BD} = 6{,}0$ V
En los extremos de la resistencia R_3: $V_{AD} = 9{,}0$ V
En los extremos de la resistencia R_4: $V_{DE} = 6{,}0$ V

19.9. Determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B de la figura.



Solución

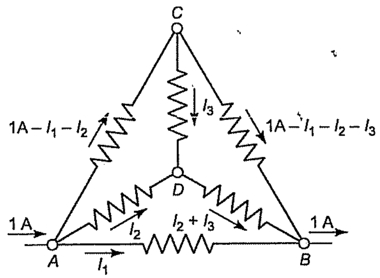
En este problema la asociación de resistencias no es puramente una asociación en serie o en paralelo. Para determinar la resistencia equivalente supondremos que por el punto A entra una intensidad de corriente de 1 A, y determinaremos la intensidad de corriente que pasa por cada una de las ramas del circuito aplicando las leyes de Kirchhoff. Una vez determinadas calcularemos la caída de tensión entre A y B, que a su vez puede expresarse como:

$$V_{AB} = R_{eq} \cdot 1\ \text{A}$$

Y de esta forma se deducirá la resistencia equivalente del circuito haciendo:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{1\ \text{A}}$$

Antes de aplicar la regla de las mallas asignaremos nombre y sentido a la intensidad de corriente en cada rama del circuito:



Seguidamente se aplica la regla de las mallas a:

Malla ABDA recorrida en sentido antihorario:

$$-R\,I_1 + R(I_2 + I_3) + R\,I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_1 = 2I_2 + I_3 \qquad (1)$$

Malla ABCA recorrida en sentido antihorario:

$$-R\,I_1 + R(1\ \text{A} - I_1 - I_2 - I_3) + R(1\ \text{A} - I_1 - I_2) = 0 \;\Rightarrow\; 3I_1 = 2\ \text{A} - 2I_2 - I_3 \qquad (2)$$

Malla ADCBA recorrida en sentido horario:

$$-R\,I_2 + RI_3 - R(1\ \text{A} - I_1 - I_2 - I_3) + RI_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2I_1 = 1\ \text{A} - 2I_3 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (3):

$$2(2I_2 + I_3) = 1\ \text{A} - 2I_3 \qquad 4I_2 + 4I_3 = 1\ \text{A} \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$3(2I_2 + I_3) = 2\ \text{A} - 2I_2 - I_3 \qquad 8I_2 + 4I_3 = 2\ \text{A} \qquad 4I_2 + 2I_3 = 1\ \text{A} \qquad (5)$$

Restando (4) y (5) se obtiene $2I_3 = 0$, y en consecuencia $I_3 = 0$.

Sustituyendo $I_3 = 0$ en (5) y despejando I_2 se obtiene $I_2 = 0{,}25$ A, y finalmente sustituyendo I_2 e I_3 en (1) se obtiene $I_1 = 0{,}50$ A.

La caída de tensión V_{AB} se puede expresar como:

$$V_{AB} = RI_1 = R \cdot 0{,}50\ \text{A} \qquad (6)$$

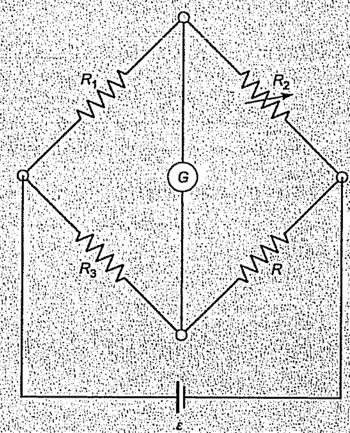
Y también como:

$$V_{AB} = R_{eq} \cdot 1\ \text{A} \qquad (7)$$

Igualando las expresiones (6) y (7) se obtiene $R_{eq} = 0{,}50 \cdot R$.

19.10. El puente de Wheatstone es un instrumento eléctrico inventado por Samuel Hunter Christie en 1833 y mejorado por Charles Wheatstone en 1843. Este instrumento se utiliza para medir resistencias desconocidas mediante el equilibrado del puente. El circuito del puente se presenta en la figura adjunta. Consta de tres resistencias conocidas R_1, R_2 y R_3, una de las cuales es ajustable (en la figura R_2), la resistencia R que se pretende medir, y un galvanómetro G. El conjunto se encuentra conectado a una *fem* ε. Se dice que el puente se encuentra equilibrado cuando la intensidad de corriente que pasa por el galvanómetro es cero.

Hallar la relación existente entre las cuatro resistencias del puente cuando éste se encuentra equilibrado.



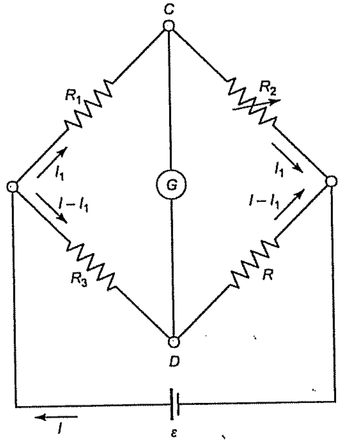
Solución

Cuando el puente está equilibrado la intensidad que pasa por el galvanómetro es cero, y en consecuencia la caída de tensión en sus bornes también es cero. En esta situación $V_C = V_D$ se pueden establecer las siguientes relaciones entre las caídas de tensión:

$$V_A - V_C = V_A - V_D \qquad (1)$$
$$V_C - V_B = V_D - V_B \qquad (2)$$

En la figura se ha asignado nombre y sentido a las intensidades de corriente cuando el puente se encuentra equilibrado. Rescribiendo las ecuaciones (1) y (2) en función de las resistencias e intensidades se obtiene:

$$R_1 I_1 = R_3\,(I - I_1) \qquad (3)$$
$$R_2 I_1 = R\,(I - I_1) \qquad (4)$$



Despejando $(I - I_1)$ de (3) y sustituyendo en (4) se obtiene:

$$R_2 I_1 = R\frac{R_1}{R_3} I_1$$

De donde se deduce la condición de equilibrio del puente:

$$R_2 R_3 = R R_1$$

La resistencia R que se pretende medir se determinará haciendo:

$$R = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

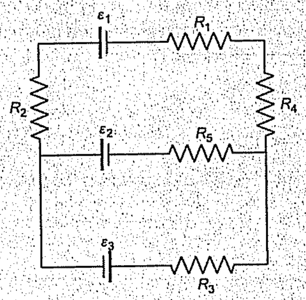
19.11. Considerar el circuito de corriente continua de la figura, con $R_1 = R_2 = R_3 = 1{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 3{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_5 = 2{,}0\ \text{k}\Omega$, $\varepsilon_1 = 2{,}0\ \text{V}$, $\varepsilon_2 = 1{,}0\ \text{V}$, $\varepsilon_3 = 6{,}0\ \text{V}$.

Determinar:

a) La intensidad de corriente en cada rama del circuito.

b) La potencia absorbida o cedida por las baterías.

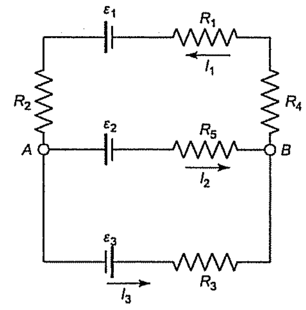
c) La potencia consumida en las resistencias.



Solución

a) Las intensidades de corriente se determinarán mediante las reglas de Kirchhoff. Para ello se empezará asignando un nombre y un sentido arbitrario a las intensidades en cada una de las ramas del circuito.

El circuito tiene dos nudos (identificados en la figura como A y B). Cuando la intensidad I_1 llega al nudo A, se ramifica en dos intensidades I_2 e I_3. Las intensidades I_2 e I_3 se reencuentran en el nudo B dando lugar, de nuevo a I_1.



La primera regla de Kirchhoff se aplicará al nudo A del circuito quedando:

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

Debido a que hay tres intensidades de corriente desconocidas y de momento sólo hemos escrito una ecuación, necesitaremos dos ecuaciones más que saldrán de aplicar la regla de las mallas.

Recorriendo la malla superior en sentido antihorario tenemos:

$$\varepsilon_1 - R_2 I_1 - \varepsilon_2 - R_5 I_2 - R_4 I_1 - R_1 I_1 = 0$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$2{,}0\ \text{V} - 1{,}0\ \text{k}\Omega\ I_1 - 1{,}0\ \text{V} - 2{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 - 3{,}0\ \text{k}\Omega\ I_1 - 1{,}0\ \text{k}\Omega\ I_1 = 0$$

Y agrupando términos queda:

$$1{,}0\ \text{V} - 5{,}0\ \text{k}\Omega\ I_1 - 2{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 = 0 \tag{2}$$

Recorriendo la malla inferior en sentido antihorario tenemos:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - R_3 I_3 + R_5 I_2 = 0$$

Sustituyendo por los valores numéricos se obtiene:

$$1{,}0\ \text{V} + 6{,}0\ \text{V} - 1{,}0\ \text{k}\Omega\ I_3 + 2{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 = 0$$

Y reagrupando términos:

$$7{,}0\ \text{V} - 1{,}0\ \text{k}\Omega\ I_3 + 2{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 = 0 \tag{3}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$1{,}0\ \text{V} - 5{,}0\ \text{k}\Omega\ (I_2 + I_3) - 2{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 = 0$$
$$1{,}0\ \text{V} - 7{,}0\ \text{k}\Omega\ I_2 - 5{,}0\ \text{k}\Omega\ I_3 = 0 \tag{4}$$

Multiplicando la ecuación (3) por -5 y sumando el resultado a (4):

$$-35\ \text{V} + 5{,}0\ \text{k}\Omega\, I_3 - 10{,}0\ \text{k}\Omega\, I_2 + 1{,}0\ \text{V} - 7{,}0\ \text{k}\Omega\, I_2 - 5{,}0\ \text{k}\Omega\, I_3 = 0$$

$$-34\ \text{V} - 17{,}0\ \text{k}\Omega\, I_2 = 0$$

Despejando I_2 se obtiene:

$$I_2 = \frac{34\ \text{V}}{17\ \text{k}\Omega} = -\,2{,}0\ \text{mA}$$

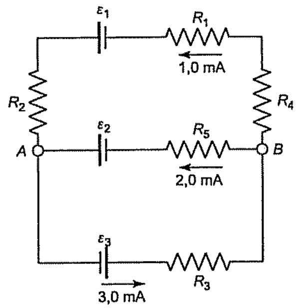
Sustituyendo I_2 en (4) y despejando I_3:

$$I_3 = \frac{15\ \text{V}}{5{,}0\ \text{k}\Omega} = 3{,}0\ \text{mA}$$

Y finalmente sustituyendo I_2 e I_3 en (1):

$$I_1 = -2{,}0\ \text{mA} + 3{,}0\ \text{mA} = 1{,}0\ \text{mA}$$

El signo negativo de la intensidad I_2 indica que el sentido de esta intensidad es el contrario del escogido al plantear el problema. En consecuencia las intensidades quedarán como se presenta en la siguiente figura.



b) En las tres baterías de este ejercicio la intensidad circula del polo negativo al positivo. Esto indica que las tres baterías están dando energía al circuito y que por tanto se están descargando.

La potencia suministrada por cada una de las baterías al circuito es:

$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 I_1 \qquad P_{\varepsilon_1} = 2{,}0\ \text{V} \cdot 1{,}0\ \text{mA} = 2{,}0\ \text{mW}$$
$$P_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 I_2 \qquad P_{\varepsilon_1} = 1{,}0\ \text{V} \cdot 2{,}0\ \text{mA} = 2{,}0\ \text{mW}$$
$$P_{\varepsilon_3} = \varepsilon_3 I_3 \qquad P_{\varepsilon_1} = 6{,}0\ \text{V} \cdot 3{,}0\ \text{mA} = 18\ \text{mW}$$

La potencia total que las baterías transfieren al circuito es:

$$P_\varepsilon = P_{\varepsilon_1} + P_{\varepsilon_2} + P_{\varepsilon_3} = 2{,}0\ \text{mW} + 2{,}0\ \text{mW} + 18\ \text{mW} = 22\ \text{mW}$$

c) La potencia disipada por efecto Joule en cada una de las resistencias es:

$$P_{R_1} = R_1 I_1^2 \qquad P_{R_1} = 1{,}0\ \text{k}\Omega \cdot (1{,}0\ \text{mA})^2 = 1{,}0\ \text{mW}$$
$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 \qquad P_{R_2} = 1{,}0\ \text{k}\Omega \cdot (1{,}0\ \text{mA})^2 = 1{,}0\ \text{mW}$$
$$P_{R_3} = R_3 I_3^2 \qquad P_{R_3} = 1{,}0\ \text{k}\Omega \cdot (3{,}0\ \text{mA})^2 = 9{,}0\ \text{mW}$$

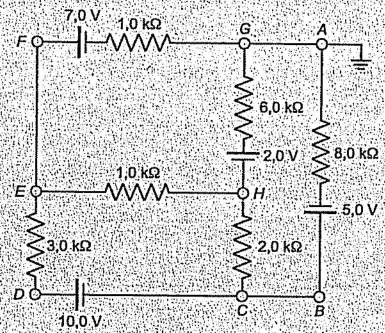
$$P_{R_4} = R_4 I_1^2 \qquad P_{R_4} = 3{,}0\ \text{k}\Omega \cdot (1{,}0\ \text{mA})^2 = 3{,}0\ \text{mW}$$
$$P_{R_5} = R_5 I_2^2 \qquad P_{R_5} = 2{,}0\ \text{k}\Omega \cdot (2{,}0\ \text{mA})^2 = 8{,}0\ \text{mW}$$

La potencia total disipada en las resistencias es:

$$P_R = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} = 1{,}0\ \text{mW} + 1{,}0\ \text{mW} + 9{,}0\ \text{mW} + 3{,}0\ \text{mW} + 8{,}0\ \text{mW} = 22\ \text{mW}$$

Se comprueba que la potencia total cedida por las baterías al circuito, se disipa en las resistencias por efecto Joule.

19.12. Considerar el circuito de la figura:



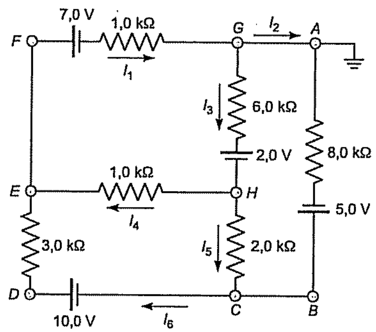
Determinar:

a) La intensidad de corriente en cada una de las ramas del circuito.

b) La tensión en el punto D teniendo en cuenta que en A hay una conexión a tierra y por tanto $V_A = 0$.

Solución

Resolveremos el circuito aplicando las reglas de Kirchhoff. Empezaremos asignando un nombre y sentido a la intensidad de corriente de cada rama del circuito.



En el circuito hay cuatro nudos situados en los puntos G, H, C y E. Por tanto aplicaremos la regla de los nudos en tres de ellos.

$$\text{Nudo G: } I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$
$$\text{Nudo H: } I_3 = I_4 + I_5 \qquad (2)$$
$$\text{Nudo C: } I_6 = I_5 + I_2 \qquad (3)$$

Para completar el sistema de ecuaciones nos faltan tres que escribiremos aplicando la regla de las mallas.

Malla FGHE recorrida en sentido horario:

$$-7{,}0\text{ V} - 1{,}0\text{ k}\Omega\, I_1 - 6{,}0\text{ k}\Omega\, I_3 - 2{,}0\text{ V} - 1{,}0\text{ k}\Omega\, I_4 = 0 \qquad (4)$$

Malla GABC recorrida en sentido horario:

$$-8{,}0\text{ k}\Omega\, I_2 + 5{,}0\text{ V} + 2{,}0\text{ k}\Omega\, I_5 + 2{,}0\text{ V} + 6{,}0\text{ k}\Omega\, I_3 = 0 \qquad (5)$$

Malla EHCD recorrida en sentido horario:

$$1{,}0\text{ k}\Omega\, I_4 - 2{,}0\text{ k}\Omega\, I_5 + 10\text{ V} - 3{,}0\text{ k}\Omega\, I_6 = 0 \qquad (6)$$

Tenemos planteado un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que rescribiremos de la siguiente forma (las resistencias se expresan en kΩ y las tensiones en V):

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (1)$$
$$I_3 - I_4 - I_5 = 0 \qquad (2)$$
$$I_2 + I_5 - I_6 = 0 \qquad (3)$$
$$-1{,}0\, I_1 - 6{,}0\, I_3 - 1{,}0\, I_4 = 9{,}0 \qquad (4)$$
$$8{,}0\, I_2 - 6{,}0\, I_3 - 2{,}0\, I_5 = 7{,}0 \qquad (5)$$
$$1{,}0\, I_4 - 2{,}0\, I_5 - 3{,}0\, I_6 = -10 \qquad (6)$$

Despejaremos I_1 de (1) y sustituiremos en la ecuación (4) dando lugar a

$$-1{,}0\, I_2 - 1{,}0\, I_3 - 6{,}0\, I_3 - 1{,}0\, I_4 = 9{,}0 \qquad -1{,}0\, I_2 - 7{,}0\, I_3 - 1{,}0\, I_4 = 9{,}0 \qquad (7)$$

Seguidamente despejaremos I_2 de (3) y sustituiremos en las ecuaciones (5) y (7) dando lugar a:

$$8{,}0\,(I_6 - I_5) - 6{,}0\, I_3 - 2{,}0\, I_5 = 7{,}0 \qquad 8{,}0\, I_6 - 10\, I_5 - 6{,}0\, I_3 = 7{,}0 \qquad (8)$$
$$-1{,}0\, I_6 + 1{,}0\, I_5 - 7{,}0\, I_3 - 1{,}0\, I_4 = 9{,}0 \qquad (9)$$

Seguidamente despejaremos I_3 de (2) y sustituiremos en las ecuaciones (8) y (9) dando lugar a:

$$8{,}0\, I_6 - 10\, I_5 - 6{,}0\, I_4 - 6{,}0\, I_5 = 7{,}0 \qquad 8{,}0\, I_6 - 16\, I_5 - 6{,}0\, I_4 = 7{,}0 \qquad (10)$$
$$-1{,}0\, I_6 + 1{,}0\, I_5 - 7{,}0\, I_4 - 7{,}0\, I_5 - 7{,}0\, I_4 = 9{,}0 \qquad -1{,}0\, I_6 - 8{,}0\, I_4 - 6{,}0\, I_5 = 9{,}0 \qquad (11)$$

Ya hemos conseguido reducir el sistema de ecuaciones inicial a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Las tres ecuaciones son (6), (10) y (11).

Ahora despejaremos I_6 de (11) y sustituiremos en (6) y (10) quedando:

$$1{,}0\, I_4 - 2{,}0\, I_5 - 3{,}0\,(-8{,}0\, I_4 - 6{,}0\, I_5 - 9{,}0) = -10 \qquad 25\, I_4 + 16\, I_5 = -37 \qquad (12)$$
$$8{,}0\,(-8{,}0\, I_4 - 6{,}0\, I_5 - 9{,}0) - 16\, I_5 - 6{,}0\, I_4 = 7{,}0 \qquad -70\, I_4 - 64\, I_5 = 79 \qquad (13)$$

Seguidamente multiplicaremos la ecuación (12) por 4 y le sumaremos la ecuación (13):

$$30\, I_4 = -69 \;\Rightarrow\; I_4 = \frac{-23}{10}$$

Sustituyendo I_4 en (12) y despejando I_5 se obtiene:

$$-25\,\frac{23}{10} + 16\, I_5 = -37 \;\Rightarrow\; I_5 = \frac{-37 + \dfrac{5 \cdot 23}{2}}{16} = \frac{41}{32}$$

Sustituyendo I_4 e I_5 en (2) y despejando I_3 se obtiene:

$$I_3 = \frac{-23}{10} + \frac{41}{32} \;\Rightarrow\; I_3 = -\frac{163}{160}$$

Sustituyendo I_4 e I_5 en (11) y despejando I_6 se obtiene:

$$I_6 = -9{,}0 + 8{,}0\,\frac{23}{10} - 6{,}0\,\frac{41}{32} \;\Rightarrow\; I_6 = \frac{137}{80}$$

Sustituyendo I_5 e I_6 en (3) y despejando I_2 se obtiene:

$$I_2 = -\frac{41}{32} + \frac{137}{80} \;\Rightarrow\; I_2 = \frac{69}{160}$$

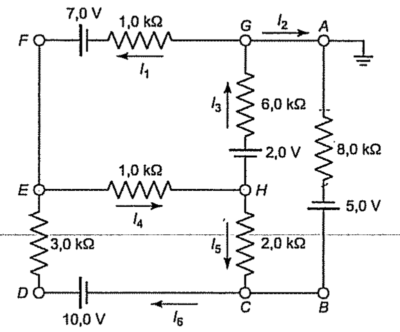
Sustituyendo I_2 e I_3 en (1) y despejando I_1 se obtiene:

$$I_1 = \frac{69}{160} + \frac{-163}{160} \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{-47}{80}$$

En resumen, las intensidades de corriente en el circuito son:

$I_1 = -0{,}60$ mA; $I_2 = 0{,}43$ mA; $I_3 = -1{,}0$ mA; $I_4 = -2{,}3$ mA; $I_5 = 1{,}3$ mA; $I_6 = 1{,}7$ mA

Atendiendo a los signos obtenidos, la dirección de las intensidades de corriente del circuito será la representada en la figura.



b) Para encontrar la tensión en D, teniendo en cuenta que el origen de potencial se encuentra en A, se calculará la caída de tensión entre A y D sumando las variaciones de potencial a lo largo de un camino cualquiera que una estos dos puntos. El camino escogido es el que pasa por los puntos ABCD.

$$V_A - 8{,}0\text{ k}\Omega\, I_2 + 5{,}0\text{ V} + 10\text{ V} = V_D \qquad V_D = -8{,}0\text{ k}\Omega\,\frac{69}{160}\text{ mA} + 15\text{ V} = 11{,}5\text{ V}$$

La tensión de D es $V_D = 12$ V.

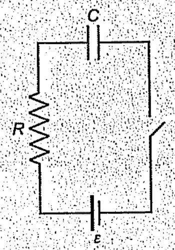
19.13. En el circuito RC de la figura la resistencia es de 3,0 kΩ, la capacidad del condensador de 20 μF y la *fem* de la batería 12 V. Determinar:

a) La constante de tiempo del circuito.

b) La carga que almacena el condensador cuando se encuentra completamente cargado.

c) La carga que almacena el condensador cuando ha transcurrido un tiempo igual a la constante de tiempo desde la conexión del circuito.

d) La energía suministrada por la batería y la disipada por la resistencia en el proceso de carga.



Solución

a) La constante de tiempo del circuito τ es:

$$\tau = RC \qquad \tau = 3{,}0 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 20 \cdot 10^{-6}\text{F} = 60 \text{ ms}$$

b) Cuando el condensador se encuentra completamente cargado la intensidad de corriente en el circuito se hace cero y la caída de tensión en las placas del condensador es ε. La carga final que almacena el condensador es:

$$Q_f = C\varepsilon \qquad Q_f = 20 \cdot 10^{-6}\text{F} \cdot 12\text{ V} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{C}$$

c) La carga del condensador aumenta según la expresión:

$$Q(t) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Cuando el tiempo de carga coincide con la constante de tiempo se obtiene:

$$Q(t=\tau) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = Q_f(1 - e^{-1}); \qquad Q(t=\tau) = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{C}\,(1 - e^{-1}) = 1{,}52 \cdot 10^{-4}\text{C}$$

La carga almacenada en el condensador en el instante de tiempo $t = \tau$ (posterior a la conexión del circuito) es de $1{,}5 \cdot 10^{-4}$C.

d) La potencia suministrada por la batería varía a lo largo del tiempo. En un instante t cualquiera del proceso de carga es:

$$P(t) = \varepsilon I(t)$$

Y la energía suministrada viene dada por:

$$U_{bat} = \int P(t)\,dt = \int \varepsilon I(t)\,dt$$

Teniendo en cuenta que la intensidad de corriente puede expresarse como:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

La energía suministrada por la batería queda:

$$U_{bat} = \varepsilon \int \frac{dQ}{dt}\,dt = \varepsilon \int_{Q_i=0}^{Q_f} dQ = \varepsilon\,Q_f$$

Sustituyendo por los correspondientes valores numéricos:

$$U_{bat} = 12\text{ V} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{C} = 2{,}88 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

La energía que al finalizar el proceso de carga almacena el condensador es:

$$U_{cond} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,Q_f \qquad U_{cond} = \frac{1}{2}\,12\text{ V} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{C} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

En consecuencia, la energía disipada en la resistencia por efecto Joule ha sido:

$$U_{res} = U_{bat} - U_{cond} = \varepsilon\,Q_f - \frac{1}{2}\,\varepsilon\,Q_f = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,Q_f; \qquad U_{res} = \frac{1}{2}\,12\text{ V} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{C} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

A lo largo del proceso de carga la batería ha suministrado 2,9 mJ de los cuales la mitad se ha disipado por efecto Joule en la resistencia y la otra mitad se ha almacenado en el condensador.

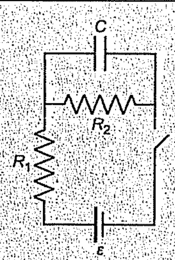
19.14. En el circuito de la figura el condensador se encuentra inicialmente descargado. Determinar:

a) La intensidad de corriente suministrada por la batería en el instante en que se cierra el circuito.

b) La intensidad de corriente suministrada por la batería cuando el condensador se encuentra completamente cargado.

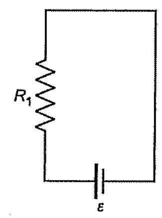
c) La carga que finalmente almacena el condensador.

Datos: $\varepsilon = 5{,}0$ V; $R_1 = 0{,}50$ kΩ; $R_2 = 1{,}0$ kΩ; $C = 10$ pF



Solución

a) En el instante en que se cierra el circuito, el condensador se encuentra completamente descargado y en consecuencia la caída de tensión en bornes del condensador es $V_C = Q/C = 0$. Como el condensador está en paralelo con la resistencia R_2, la caída de tensión en esta resistencia también será cero y la intensidad de corriente que circula por ella también. En consecuencia, el circuito inicial puede reducirse al siguiente circuito:

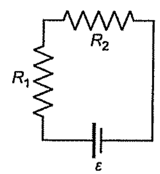


La intensidad de corriente suministrada por la batería es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} \qquad I = \frac{5{,}0\text{ V}}{0{,}50\text{ k}\Omega} = 10{,}0\text{ mA}$$

En el instante de la conexión del circuito la intensidad de corriente que suministra la batería es de 10 mA.

b) Cuando el condensador está completamente cargado la intensidad de corriente que llega a sus placas es cero. En consecuencia, el circuito inicial puede reducirse al siguiente circuito. Y la intensidad de corriente suministrada por la batería es:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} \qquad I = \frac{5{,}0\text{ V}}{1{,}50\text{ k}\Omega} = 3{,}33\text{ mA}$$

Cuando el condensador se encuentra completamente cargado la intensidad de corriente que suministra la batería es de 3,3 mA.

c) La carga que finalmente almacena el condensador se calculará haciendo:

$$Q = C\,V_C \qquad (1)$$

La caída de tensión entre sus placas coincide con la caída de tensión en bornes de la resistencia R_2.

$$V_C = V_{R2} = R_2\,I \qquad V_C = V_{R2} = 1{,}0\ \text{k}\Omega\ 3{,}33\ \text{mA} = 3{,}33\ \text{V}$$

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$Q = 10\ \text{pF} \cdot 3{,}33\ \text{V} = 33{,}3\ \text{pC}$$

La carga que finalmente almacena el condensador es de 33 pC.

CUESTIONES

19.1. Un hilo de cobre del calibre 10 (2,588 mm de diámetro) y resistividad $1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m tiene una resistencia interna de 0,32 Ω. La longitud del hilo es:

a) $4{,}0 \cdot 10^2$ m *b)* 31 m *c)* 99 m *d)* 65 m

Una corriente de 20 mA circula por un cable de cobre de 1,0 mm² de sección y de longitud 6,0 m. La resistividad del cobre es $1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m y su densidad de portadores de carga $8{,}4 \cdot 10^{28}$ electrones/m³.

19.2.1. La resistencia del cable es:

a) $2{,}8 \cdot 10^{-15}\ \Omega$ *b)* $2{,}8 \cdot 10^{-9}\ \Omega$ *c)* $1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \Omega$ *d)* 0,10 Ω

19.2.2. La caída de tensión en los extremos del cable es:

a) $5{,}6 \cdot 10^{-17}$ V *b)* $5{,}6 \cdot 10^{-11}$ V *c)* $2{,}0 \cdot 10^{-9}$ V *d)* $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ V

19.2.3. La energía disipada por efecto Joule en el cable a lo largo de 5,0 minutos es:

a) $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ J *b)* 12 mJ *c)* $1{,}2 \cdot 10^{-8}$ J *d)* $2{,}0 \cdot 10^{-10}$ J

19.2.4. Teniendo en cuenta que la carga del electrón es de $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, la velocidad de deriva de los electrones de conducción en el cable es:

a) $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ m/s

b) $3{,}0 \cdot 10^{-5}$ m/s

c) $3{,}0 \cdot 10^{5}$ m/s

d) La velocidad de deriva es la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

19.3. Cuando se asocian cuatro resistencias diferentes R_1, R_2, R_3 y R_4 en paralelo es correcto afirmar que:

a) La intensidad de corriente que pasa por cada resistencia es la misma.

b) La caída de tensión en bornes de cada resistencia es distinta.

c) La resistencia equivalente de la asociación es inferior al valor de la resistencia más pequeña de las cuatro.

d) La resistencia equivalente es la suma de las cuatro resistencias.

19.4. Cuando se asocian cuatro resistencias diferentes R_1, R_2, R_3 y R_4 en serie es correcto afirmar que:

a) La intensidad de corriente que pasa por cada resistencia es distinta.

b) La caída de tensión en bornes de cada resistencia es distinta.

c) La resistencia equivalente de la asociación es inferior al valor de la resistencia más pequeña de las cuatro.

d) La resistencia equivalente de la asociación es inferior al valor de la resistencia más grande de las cuatro.

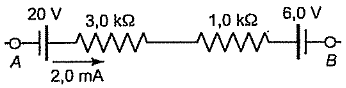
19.5. Una linterna lleva una bombilla de 1,0 W de potencia y funciona con una pila de 4,5 V. La intensidad de corriente que circula por el filamento de la bombilla es de 250 mA. La resistencia interna de la pila es:

a) 16 Ω *b)* 2,0 Ω *c)* 18 Ω *d)* 0

19.6. Una batería de 12,0 V tiene una resistencia interna de 0,200 Ω. Si la batería se carga con una corriente de 3,00 A, la caída de tensión en bornes de la batería es:

a) 12,6 V *b)* 11,4 V *c)* 11,6 V *d)* 12,0 V

19.7.1. En la figura se muestra la rama de un circuito:



La diferencia de tensión $V_A - V_B$ es igual a:

a) 6,0 V *b)* 18 V *c)* 22 V *d)* −6,0 V

19.7.2. Es correcto afirmar que:

a) La batería de 20 V se está cargando y absorbe una potencia de 40 mW del circuito.

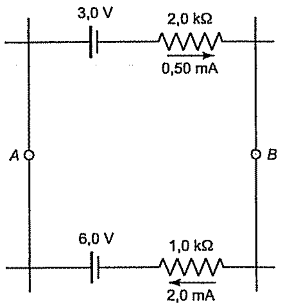
b) La batería de 6,0 V se está cargando y absorbe una potencia de 40 mW del circuito.

c) La batería de 20 V se está descargando y cede una potencia de 12 mW al circuito.

d) La batería de 6,0 V se está cargando y absorbe una potencia de 12 mW del circuito.

19.8. En la figura adjunta se representa una malla de un circuito. La diferencia de potencial $V_A - V_B$ es:

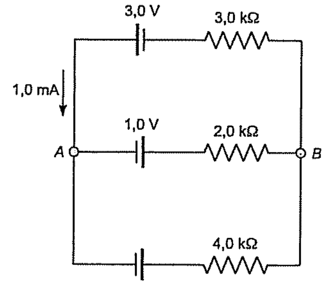
a) 5,0 V *b)* 4,0 V *c)* 1,0 V *d)* −1,0 V



19.9.1. Considerar el circuito de la figura.

La caída de tensión $V_A - V_B$ es igual a:

a) 6,0 V *b)* −6,0 V *c)* 0 *d)* 1,0 V



19.9.2. La corriente que circula por la batería de 1,0 V es:

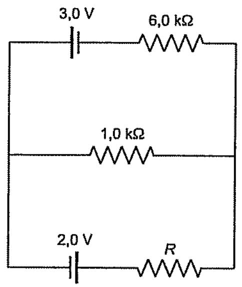
a) 0 *b)* 2,5 mA *c)* 3,5 mA *d)* 0,50 mA

19.9.3. La fuerza electromotriz de la batería es:

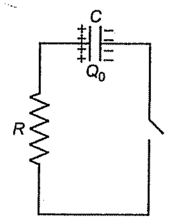
a) 2,0 V *b)* 6,0 V *c)* 4,0 V *d)* 3,0 V

19.10. Considerar el circuito de la figura. El valor de la resistencia R para que la corriente que pasa por la resistencia de 1,0 kΩ sea cero es:

a) 6,0 kΩ *b)* 4,0 kΩ *c)* 1,0 kΩ *d)* 7,0 kΩ



Un condensador se encuentra cargado con una carga $Q_0 = 6{,}0\ \mu C$ y conectado a una resistencia $R = 0{,}20$ kΩ. Cuando se conecta el circuito el condensador tarda 1,5 ms en pasar de la carga inicial a una carga de 2,2 μC.



19.11.1. La constante de tiempo del circuito es:

a) 1,5 ms *b)* 3,0 ms *c)* 0,75 ms *d)* 2,0 ms

19.11.2. La capacidad del condensador es:

a) 15 μF *b)* 7,5 μF *c)* 10 μF *d)* 380 μF

19.11.3. La intensidad de corriente que circula por la resistencia en el instante en que se conecta el circuito es:

a) 2,0 mA *b)* 1,0 mA *c)* 3,0 mA *d)* 4,0 mA

19.11.4. La energía disipada por efecto Joule en la resistencia a lo largo del proceso de descarga del condensador es:

a) 2,4 μJ *b)* 3,0 μJ *c)* 3,2 μJ *d)* 6,0 μJ

19.12. Un circuito RC está formado por una batería de corriente continua de 12 V que alimenta a una resistencia de 1,2 kΩ en serie con un condensador de 100 nF. Otro circuito RC que tiene la misma constante de tiempo que el anterior, está formado por un condensador de 48 nF en serie con una resistencia de valor:

a) 2,5 kΩ

b) Depende del valor de la batería.

c) 570 Ω

d) 2,4 kΩ

19.13. En el proceso de descarga de un condensador se puede afirmar que:

a) La intensidad de corriente crece exponencialmente.

b) La caída de tensión en placas del condensador decrece exponencialmente.

c) La capacidad del condensador crece exponencialmente.

d) La constante de tiempo es $1/RC$, siendo R la resistencia del circuito y C la capacidad del condensador.

SOLUCIONES

19.1. *a)*
19.2.1. *d)*
19.2.2. *d)*
19.2.3. *b)*
19.2.4. *a)*
19.3. *c)*
19.4. *b)*
19.5. *b)*
19.6. *a)*
19.7.1. *d)*
19.7.2. *d)*
19.8. *b)*
19.9.1. *c)*
19.9.2. *d)*
19.9.3. *a)*
19.10. *b)*
19.11.1. *a)*
19.11.2. *b)*
19.11.3. *d)*
19.11.4. *a)*
19.12. *a)*
19.13. *b)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Un cable de alta tensión está formado por 61 cables de cobre del calibre 8 (sección de 8,366 mm^2) trenzados. Teniendo en cuenta que la resistividad del cobre es de $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ωm, determinar:**

a) La resistencia de 1,0 km de cable de cobre.

b) La resistencia de 1,0 km de cable de alta tensión.

Sol.: *a)* 2,0 Ω; *b)* 33 mΩ

2. **La intensidad de corriente en un cable de oro del calibre 22 (sección de 0,3255 mm^2) es de 30 mA. Suponiendo que en promedio cada átomo de oro proporciona 1,3 electrones de conducción, determinar:**

a) La carga que atraviesa la sección del cable en un intervalo de tiempo de 10 s.

b) La densidad de portadores de carga del oro.

c) La velocidad de deriva de los portadores de carga.

Datos: carga del electrón $e^- = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, masa molar del oro $m = 197$ g/mol, densidad del oro $\rho = 19{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3, constante de Avogadro $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos/mol.

Sol.: *a)* 300 mC; *b)* $7{,}67 \cdot 10^{28}$ electrones/m^3; *c)* $7{,}51 \cdot 10^{-6}$ m/s

3. **Disponemos de dos baterías idénticas de *fem* ε y resistencia interna r. Calcular:**

a) La *fem* y resistencia interna de la batería equivalente de la asociación en serie de las baterías (la asociación de baterías en serie es cuando se unen el polo positivo de una con el negativo de la otra).

b) La *fem* y resistencia interna de la batería equivalente de la asociación en paralelo de las baterías (la asociación de baterías en paralelo es cuando se unen el polo positivo con el positivo y el polo negativo con el negativo de la otra).

Sol.: *a)* $\varepsilon_{eq} = 2\varepsilon$; $r_{eq} = 2r$; *b)* $\varepsilon_{eq} = \varepsilon$; $r_{eq} = r/2$

4. **Cuando conectamos una resistencia R a una batería de *fem* ε la intensidad de corriente es de 10 A. Si se conecta una resistencia de 2,0 Ω en serie con la resistencia R y el conjunto a la misma batería, la intensidad de corriente baja hasta 8,0 A. Determinar la resistencia R y la *fem* ε.**

Sol.: $R = 8{,}0$ Ω; $\varepsilon = 80$ V

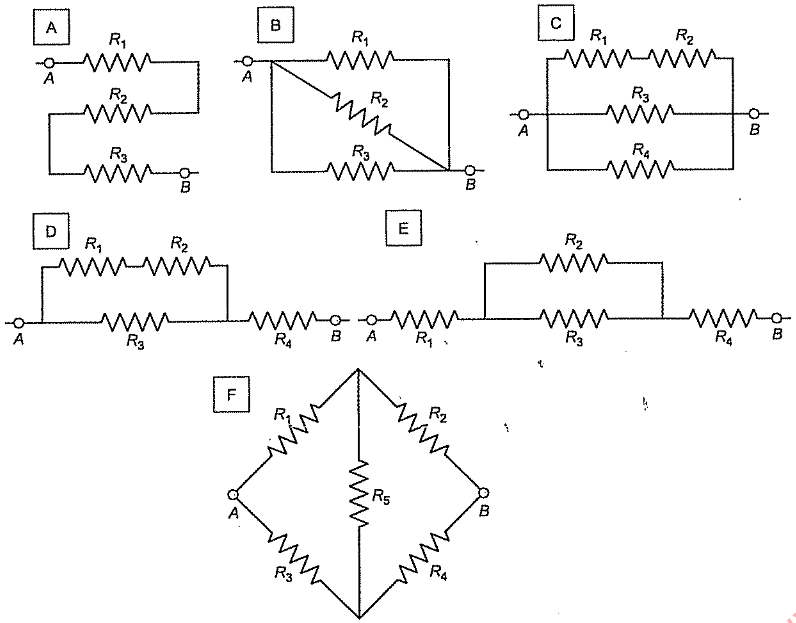
5. **Una batería de *fem* ε y resistencia interna r se conecta a una resistencia R. ¿Para qué valor de R la potencia disipada en esta resistencia es máxima?**

Sol.: $R = r$

6. **Por una batería de *fem* ε y resistencia interna r circula una intensidad de corriente de 4,00 A. La caída de tensión en bornes de la batería es de 11,8 V cuando la batería está descargándose y de 12,0 V cuando se está cargando. Determinar el valor de ε y r.**

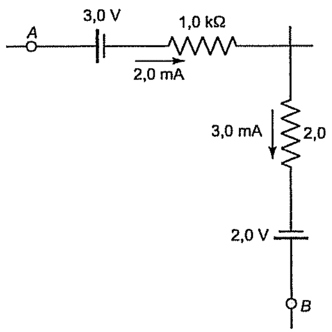
Sol.: $\varepsilon = 11{,}9$ V; $r = 25{,}0$ mΩ

7 **Determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B para las asociaciones de resistencias de la figura, siendo $R_1 = 1{,}0$ kΩ, $R_2 = 2{,}0$ kΩ, $R_3 = 3{,}0$ kΩ, $R_4 = 4{,}0$ kΩ y $R_5 = 5{,}0$ kΩ.**



Sol.: A: 6,0 kΩ, B: 0,55 kΩ, C: 1,1 kΩ, D: 5,5 kΩ, E: 6,2 kΩ, F: 2,1 kΩ.

8 **Considerar el fragmento de circuito que aparece en la figura. Determinar:**



a) La caída de tensión entre los puntos A y B ($V_A - V_B$).

b) La potencia absorbida o cedida por las baterías.

Sol.: *a)* $V_A - V_B = 1{,}0$ V

b) La batería de 3,0 V se está cargando y absorbe una potencia de 6,0 mW del circuito. La batería de 2,0 V se está descargando y cede una potencia de 6,0 mW al circuito.

9 **El indicador del nivel de gasolina de un automóvil es un voltímetro que detecta la tensión en bornes de una resistencia $R_{indicador} = 10$ Ω. Esta resistencia se encuentra conectada en serie a la batería del automóvil de *fem* 12 V y a una resistencia que varía linealmente con el nivel de gasolina en el depósito $R_{depósito}$. Cuando el depósito está completamente vacío: $R_{depósito} = 30$ Ω y cuando se encuentra completamente lleno: $R_{depósito} = 160$ Ω. Determinar la tensión en bornes de $R_{indicador}$ cuando el depósito se encuentra lleno hasta la mitad.**

Sol.: 1,3 V

10 **El motor de corriente continua de una máquina no funciona correctamente y un técnico debe decidir si el problema está en el motor, en la batería que lo alimenta o en los cables de conexión. El manual de instrucciones indica que la batería de 6,0 V no puede tener una resistencia interna superior a 8,0 mΩ y la resistencia de los cables no puede sobrepasar los 10 mΩ. Cuando el técnico enciende el motor mide una corriente de 40 A, 5,8 V en bornes de la batería y 0,50 V en los cables. Determinar:**

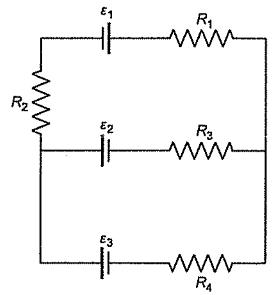
a) La resistencia interna de la batería.

b) La resistencia de los cables.

c) El componente que debe sustituir el técnico.

Sol.: *a)* 5,0 mΩ; *b)* 13 mΩ; *c)* Los cables

11 **Considerar el circuito de corriente continua de la figura, con $R_1 = R_2 = R_3 = 1{,}0$ kΩ, $R_4 = 1{,}5$ kΩ, $\varepsilon_1 = 3{,}0$ V, $\varepsilon_2 = 4{,}0$ V, $\varepsilon_3 = 6{,}0$ V, determinar:**



a) La intensidad de corriente en cada rama del circuito.

b) La potencia absorbida o cedida por las baterías.

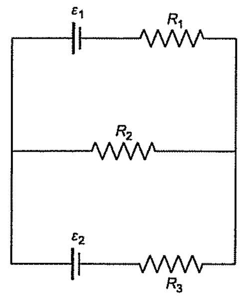
c) La potencia consumida en las resistencias

Sol.: *a)* La intensidad que pasa a través de la batería ε_1 es de 3,0 mA; la que pasa a través de ε_2 es de 1,0 mA; y por ε_3 pasan 2,0 mA.

b) Las tres baterías se están descargando. ε_1 cede al circuito una potencia de 9,0 mW; ε_2 una potencia de 4,0 mW y ε_3 una potencia de 12 mW.

c) $P(R_1) = 9{,}0$ mW; $P(R_2) = 9{,}0$ mW; $P(R_3) = 1{,}0$ mW; $P(R_4) = 6{,}0$ mW

12 **Considerar el circuito de corriente continua de la figura, con $R_1 = 2{,}0$ kΩ, $R_2 = 1{,}0$ kΩ, $R_3 = 0{,}25$ kΩ, $\varepsilon_1 = 1{,}0$ V y $\varepsilon_2 = 4{,}0$ V, determinar:**



a) La intensidad que circula por las resistencias del circuito.

b) La potencia absorbida o cedida por las baterías.

c) La potencia disipada en las resistencias.

Sol.: *a)* $I(R_1) = 1{,}0$ mA; $I(R_2) = 3{,}0$ mA; $I(R_4) = 4{,}0$ mA

b) ε_1 se está cargando absorbiendo una potencia de 1,0 mW del circuito; ε_2 se está descargando cediendo una potencia de 16 mW al circuito.

c) $P(R_1) = 2{,}0$ mW; $P(R_2) = 9{,}0$ mW; $P(R_3) = 4{,}0$ mW

13 **Una bombilla de 5,0 W está diseñada para funcionar con una tensión de 2,0 V. La bombilla se conecta en paralelo a una resistencia R y el conjunto en serie a una resistencia de 1,0 Ω. Determinar el valor de la resistencia R para que la bombilla funcione en las condiciones del diseño cuando se utiliza una batería de 6,0 V para alimentar el circuito.**

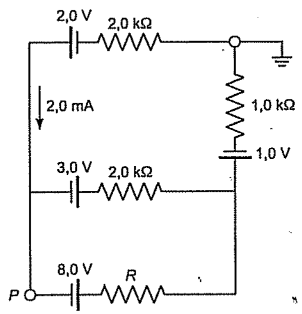
Sol.: $R = 1{,}3$ Ω

14 **Considerar el circuito de corriente continua de la figura. Determinar:**

a) El valor de la resistencia *R*.

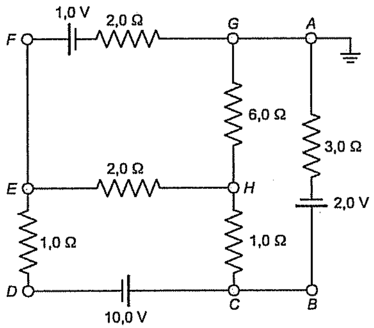
b) El potencial al que se encuentra el punto P.

Sol.: a) $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$; *b)* $V_P = -2{,}0\ \text{V}$



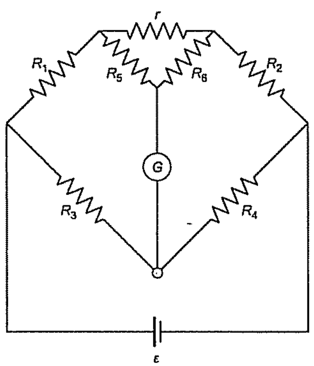
15 **Considerar el circuito de la figura. Determinar la tensión en los puntos indicados en la figura.**

Sol.: $V_A = 0{,}0$; $V_B = V_C = 1{,}15\ \text{V}$; $V_D = 0{,}15\ \text{V}$; $V_E = V_F = 0{,}46\ \text{V}$; $V_G = 0{,}0\ \text{V}$; $V_H = 0{,}55\ \text{V}$



16 **El puente de Kelvin es un instrumento eléctrico que habitualmente se utiliza para medir resistencias muy pequeñas. Cuando el puente se encuentra balanceado la corriente que pasa por el galvanómetro es cero. Demostrar que una condición de balance independiente del valor de la resistencia *r* es que:**

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6}$$



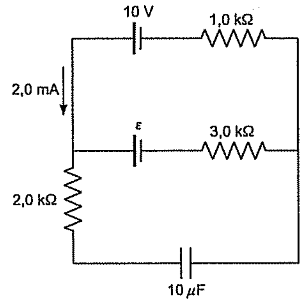
17 **Considerar el circuito de la figura y determinar para el régimen estacionario:**

a) La fuerza electromotriz de la batería ε.

b) La potencia que la batería ε absorbe o cede al circuito.

c) La carga que alcanza el condensador.

Sol.: a) 2,0 V; *b)* la batería ε absorbe una potencia de 4,0 mW del circuito; *c)* 80 μC



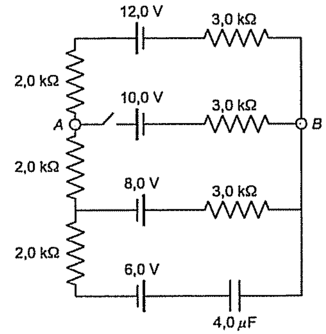
18 **Considerar el circuito de la figura y determinar para el régimen estacionario:**

a) La intensidad de corriente que circula por la pila de 12 V.

b) La diferencia de tensión $V_A - V_B$.

c) La carga del condensador.

Sol.: a) 2,0 mA; *b)* 2,0 V; *c)* 16 μC

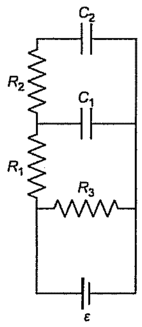


19 **Considerar el circuito de la figura con $\varepsilon = 10$ V, $R_1 = 2{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 1{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 2{,}0\ \text{k}\Omega$, $C_1 = 100$ nF y $C_2 = 67$ nF. Determinar para el régimen estacionario:**

a) La intensidad de corriente que suministra la batería.

b) La carga de los condensadores.

Sol.: a) 5,0 mA; *b)* $Q_1 = 1{,}0\ \mu\text{C}$; $Q_2 = 0{,}67\ \mu\text{C}$



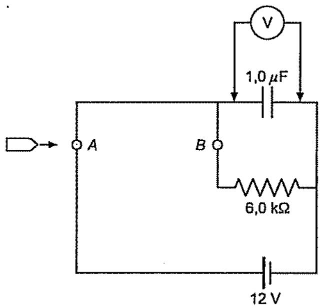
(20) **Para medir la velocidad de una bala se utiliza un circuito RC unido a una batería de *fem* 12 V y a un voltímetro. Antes de disparar la bala se carga el condensador mediante el circuito de la figura. Cuando se dispara la bala, ésta alcanza el punto A y rompe el cable, con lo cual se desconecta la batería y el condensador empieza a descargarse a través de la resistencia. Cuando la bala llega al punto *B* rompe un segundo cable e interrumpe la descarga del condensador. En este momento el voltímetro indica que la tensión entre las placas del condensador es de 1,0 V. Teniendo en cuenta que la distancia entre los puntos *A* y *B* es de 2,0 m y suponiendo que la bala no ha modificado su velocidad como consecuencia de los choques con los hilos conductores, determinar:**

a) La carga que inicialmente tiene el condensador.

b) La velocidad de la bala.

c) La intensidad de corriente en el circuito cuando la bala se encuentra a mitad de camino entre A y B.

Sol.: a) 12 μC; *b)* 0,13 km/s; *c)* 0,58 mA



CAPÍTULO 20

CAMPO MAGNÉTICO

20.1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento popular relaciona el campo magnético con los imanes, que son fuentes de estado sólido. Los imanes tienen la característica de ofrecer un valor de campo magnético que no es regulable. Sin embargo no son la única fuente de campo magnético. A principios del siglo XIX, Oersted, un investigador danés, descubrió que una corriente eléctrica era capaz de generar un campo magnético y que el valor de campo magnético dependía del valor de la corriente.

Este descubrimiento permitió el control del campo magnético y su aplicación en la transformación de energía (motores, generadores…) tal y como ahora la conocemos. El presente tema va a tratar la generación de campos magnéticos y sus efectos. Siempre en ausencia de materiales ferromagnéticos.

En este tema se van a tratar los campos magnéticos creados por corrientes y se realizarán diversos cálculos de campos magnéticos. En el capítulo siguiente se va a estudiar el efecto que un campo magnético tiene sobre cargas en movimiento, tanto cargas libres en aire o vacío como cargas móviles en un conductor.

En el desarrollo de este tema van a ser fundamentales las representaciones vectoriales en tres dimensiones. Para facilitar esos dibujos o representaciones, se va seguir el convenio en el que la dimensión definida por la dirección perpendicular al papel (en sentido hacia dentro del papel o hacia fuera del papel) es el siguiente:

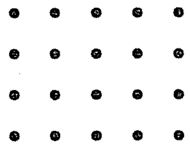


Figura 20.1. Campo vectorial en dirección perpendicular al papel con sentido hacia fuera del papel

Figura 20.2. Campo vectorial en dirección perpendicular al papel con sentido hacia dentro del papel

Es preciso tener presente que a continuación se va a utilizar en numerosas ocasiones el producto vectorial, que ya se utilizó en el Capítulo 8.

Si el lector ha iniciado el libro por los temas de electricidad, y no conoce en qué consiste el producto vectorial, se le aconseja hacer un pequeño paréntesis y realizar una lectura del Capítulo 8 para familiarizarse con esta operación vectorial.

20.2. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA

La expresión que permite determinar el campo magnético creado por un elemento de corriente en un punto cualquiera del espacio es la Ley de Biot y Savart.

Un elemento de corriente infinitesimal crea un campo magnético, a una distancia r, en un punto P del espacio según la expresión:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

La unidad de campo magnético en el Sistema Internacional es el Tesla [T]. El Tesla es una unidad muy grande, por ello, en ocasiones, en textos técnicos se utiliza otra unidad mucho más pequeña que el Tesla como es el Gauss [G]. La relación entre estas unidades es: $1{,}0\ T = 1{,}0 \cdot 10^4\ G$

μ_0: es la permeabilidad magnética en el vacío. El valor y las unidades de μ_0 en el Sistema Internacional son: $\frac{\mu_0}{4\pi} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\frac{T \cdot m}{A}$ o bien: $\mu_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\frac{T \cdot m}{A}$

$d\vec{l}$: es el vector definido por el tamaño del elemento de corriente cuya dirección y sentido es el de la corriente eléctrica que circula por ese elemento.

r: es la distancia entre el elemento de corriente y el punto (P) donde se quiere calcular el campo magnético creado.

$\hat{r}$: es el vector unitario que especifica la dirección y el sentido del vector que va del elemento de corriente, $d\vec{l}$, al punto, P, donde se quiere calcular el campo magnético.

Al obtenerse a partir de un producto vectorial, el campo magnético $d\vec{B}$ creado es un vector cuya dirección es perpendicular al plano definido por los vectores $d\vec{l}$ y $\hat{r}$: y su sentido el resultante de aplicar la regla de la mano derecha (ver Figura 20.3). Se deduce fácilmente que si los vectores $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ son paralelos, su producto vectorial será nulo y no se creará campo magnético.

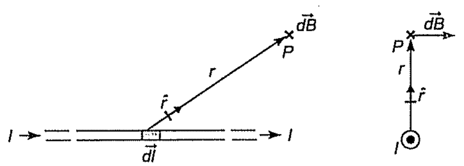


Figura 20.3. Vista lateral (izquierda) y vista frontal (derecha) del elemento de corriente, y campo magnético creado (en verde).

20.3. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO

La expresión que permite determinar el campo magnético creado por una carga en movimiento en un punto cualquiera del espacio es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Donde:

q: es el valor de la carga que está en movimiento.

$\vec{v}$: es el vector velocidad de la carga q.

r: es la distancia entre la posición de la carga y el punto, P, donde se quiere calcular el campo magnético creado.

$\hat{r}$: es el vector unitario que especifica la dirección y el sentido del vector que va de la carga q al punto, P, donde se quiere calcular el campo magnético.

20.4. LEY DE AMPÈRE

La ley de Ampère relaciona la circulación de campo magnético a través de una curva cerrada C con las intensidades de corriente, que la superficie, cuyo contorno es la curva C, atraviesa. Es una expresión análoga a la ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas}$$

El primer miembro de la ecuación anterior es el recorrido de campo magnético B a través de la curva cerrada C. El segundo miembro es proporcional a la suma de las corrientes que atraviesan cualquier superficie cuyo contorno es la curva C. Se dice entonces que la curva C *enlaza* estas corrientes.

La ley de Ampère es válida sólo para corrientes estacionarias. En el caso de distribuciones de corriente con una gran simetría, la ley de Ampère permite calcular el campo magnético que dichas distribuciones de corriente crean en todos los puntos del espacio.

De todas formas la ley de Ampère no se utiliza exclusivamente para calcular campos magnéticos creados por distribuciones de corriente.

En la Figura 20.4 se muestra una curva cerrada (C) de la que se indican unos pocos elementos de longitud $d\vec{l}$ y el campo magnético $\vec{B}$ existente en cada uno de ellos. Se muestran 8 hilos de corriente con sus respectivos sentidos. De las 8 corrientes, la curva cerrada C las enlaza a todas excepto a I_2 e I_4.

Si se aplica la ley de Ampère sobre la curva C se obtiene que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas} = \mu_0 \cdot (I_1 - I_3 + I_5 - I_6 + I_7 - I_8 - I_9)$$

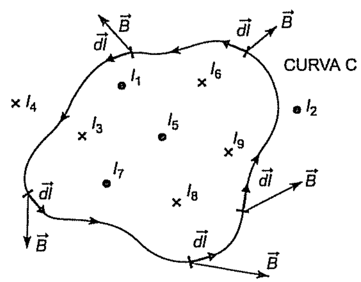


Figura 20.4

Se puede observar que según la ley de Ampère la circulación de campo magnético a lo largo de una curva cerrada C sólo depende de las corrientes que atraviesan la superficie definida por la curva C, aunque hay que tener presente que el campo magnético $\vec{B}$ depende de todas las corrientes y no sólo de las que atraviesan la superficie.

El signo de las corrientes depende del sentido de cada una respecto al sentido de circulación a lo largo de la curva C (antihorario).

PROBLEMAS RESUELTOS

20.1. Un pequeño elemento de corriente de 1,0 mm de longitud es paralelo al eje x y tiene su origen en el punto $P_0 = (6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m})$. La corriente que pasa por el elemento de longitud es $I = 50$ mA en el sentido definido por la dirección positiva del eje x. Determinar el campo magnético creado por el elemento de corriente en los puntos:

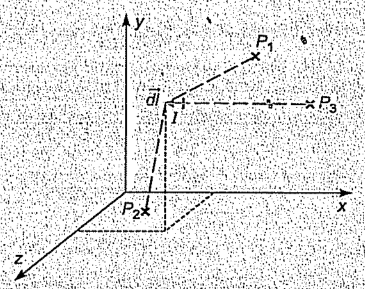


Figura 20.5

a) $P_1 = (6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, -4{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m})$.

b) $P_2 = (6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 12 \cdot 10^{-2}\,\text{m})$.

c) $P_3 = (12{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}, 6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m})$.

Solución

Para determinar el campo magnético creado por el elemento de corriente se va a utilizar la ley de Biot y Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

En este caso, $d\vec{l} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\,\hat{i}$, $I = 50 \cdot 10^{-3}\,A$. Las distancias y vectores unitarios dependen de cada punto.

a) Para calcular el campo creado en el punto P_1, hay que determinar los valores de r y su vector unitario (ver Figura 20.6):

$$r_1 = 10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

$$\hat{r}_1 = -\hat{k}$$

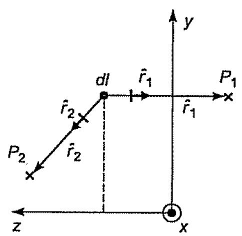


Figura 20.6

Sea $d\vec{B}_1$ el campo creado en el punto P_1:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_1}{r_1^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,A \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_1}{(10 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}$$

Donde el producto vectorial $d\vec{l} \times \hat{r}_1$ tiene un valor:

$$d\vec{l} \times \hat{r}_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,m\,\hat{j}$$

Así:

$$d\vec{B}_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,A \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{(10 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}\,\hat{j} = 0{,}50 \cdot 10^{-9}\,T\hat{j} = 0{,}50\,nT\hat{j}$$

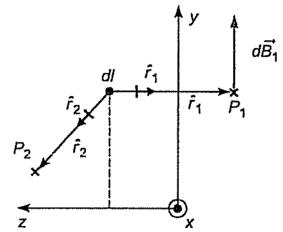


Figura 20.7

b) Para calcular el campo creado en el punto P_2, hay que determinar los valores de r_2 y su vector unitario (ver Figura 20.7). r_2 es la distancia entre los puntos P_0 y P_2:

$$r_2 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2} = \sqrt{(6{,}0 - 6{,}0)^2 + (2{,}0 - 10)^2 + (12 - 6{,}0)^2} \cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8{,}0)^2 + (6{,}0)^2} \cdot 10^{-2}\,\text{m} = \sqrt{64 + 36} \cdot 10^{-2}\,\text{m} = \sqrt{100} \cdot 10^{-2}\,\text{m} = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\,\text{m}$$

Para determinar el vector unitario $\hat{r}_2$, calcularemos antes el vector $\vec{r}_2$ definido por los puntos P_0 y P_2:

$$\vec{r}_2 = -8{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\,\hat{j} + 6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\,\hat{k}$$

Y así:

$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-8{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\,\hat{j} + 6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\,\hat{k}}{1{,}0 \cdot 10^{-1}\,\text{m}} = -8{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{j} + 6{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{k}$$

Sea $d\vec{B}_2$ el campo creado en el punto P_2:

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_2}{r_2^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}\,A \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_2}{(10 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}$$

$$d\vec{B}_2 = 0{,}50 \cdot 10^{-6}\,\frac{T}{m} \cdot (d\vec{l} \times \hat{r}_2) = 0{,}50 \cdot 10^{-6}\,\frac{T}{m} \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \hat{i} \times [-8{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{j} + 6{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{k}])$$

En esta ocasión es más complicado realizar el producto vectorial que en el apartado a). Se hace imprescindible el cálculo por determinante:

$$d\vec{l} \times \hat{r}_2 = (1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \hat{\imath}) \times (-8{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{\jmath} + 6{,}0 \cdot 10^{-1}\,\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} & 0 & 0 \\ 0 & -8{,}0 \cdot 10^{-1} & 6{,}0 \cdot 10^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot (-8{,}0 \cdot 10^{-1}) \cdot \hat{k} - 6{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \hat{\jmath} = -6{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{\jmath} - 8{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}$$

$$d\vec{l} \times \hat{r}_2 = -6{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{\jmath} - 8{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}$$

Así:

$$d\vec{B}_2 = 0{,}50 \cdot 10^{-6} \frac{T}{m} \cdot [-6{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{\jmath} - 8{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}]$$

$$d\vec{B}_2 = -3{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot T \cdot \hat{\jmath} - 4{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot T \cdot \hat{k}$$

El módulo es $dB_2 = 0{,}50\ nT$, el mismo que en el apartado *a)* ya que los puntos P_1 y P_2 equidistan de P_0. La diferencia entre ambos apartados radica en la dirección y sentido del campo magnético.

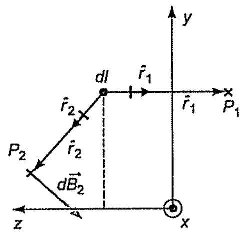


Figura 20.8

c) Para calcular el campo creado en el punto P_3, hay que determinar los valores de r_3 y su vector unitario $\hat{r}_3$:

$$r_3 = 10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$\hat{r}_3 = \hat{\imath}$$

De esta forma:

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_3}{r_3^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot \mathrm{m}}{A} \frac{50 \cdot 10^{-3} A \cdot d\vec{l} \times \hat{r}_3}{}$$

$$d\vec{B}_3 = 0{,}50 \cdot 10^{-6} \frac{T}{\mathrm{m}} \cdot (d\vec{l} \times \hat{r}_3) = 0{,}50 \cdot 10^{-6} \frac{T}{\mathrm{m}} \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot \hat{\imath} \times \hat{\imath}) = 0$$

20.2. Determinar el campo magnético creado por una espira de corriente circular de radio R y corriente I:

a) En un punto de su eje alejado una distancia x de su centro.

b) En el centro de la espira.

Nota: no se deben tener en cuenta los tramos rectilíneos de la Figura por los que entra y sale la corriente de la espira.

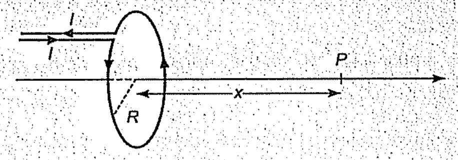


Figura 20.9

Solución

a) Se va a determinar el campo magnético creado por la espira circular en un punto del eje de la espira aplicando el principio de superposición. Esto es, se va a determinar el campo magnético creado por un pequeño elemento de la espira en el punto P y a continuación se va a sumar para el resto de elementos que componen la espira.

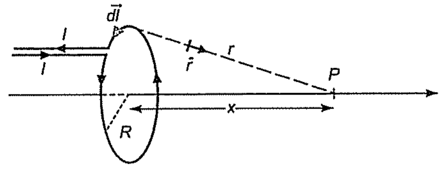


Figura 20.10

Se elige el elemento de corriente $d\vec{l}$ señalado en la figura. Este elemento de corriente está alejado una distancia r del punto P. El vector unitario entre el elemento de corriente $d\vec{l}$ y el punto P es $\hat{r}$.

Si se realiza un corte perpendicular a la espira que contenga tanto su eje como el elemento de corriente $d\vec{l}$, se obtiene la Figura 20.11:

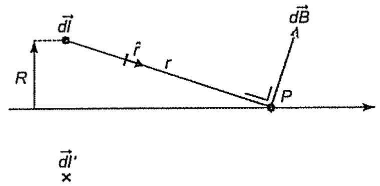


Figura 20.11

En ella se muestra los elementos de corriente superior, $d\vec{l}$, e inferior, $d\vec{l}'$, indicando sus respectivos sentidos de corriente, saliente al papel en el elemento superior y entrante al papel en el elemento inferior.

También se muestra el vector campo magnético, $d\vec{B}$, creado por el elemento $d\vec{l}$ en el punto P. Para determinar el vector $d\vec{B}$ hay que calcular su módulo, dirección y sentido.

La dirección y el sentido se obtienen por aplicación de la ley de Biot y Savart; conocidas las direcciones y sentidos de los vectores $\vec{dl}$ y $\hat{r}$, la dirección y el sentido de $\vec{dB}$ se obtienen resolviendo el producto vectorial $\vec{dl}$ y $\hat{r}$.

Para determinar el módulo de $\vec{dB}$:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2}\, dl \cdot 1 \cdot \text{sen } \alpha$$

Donde dl es el módulo del vector $\vec{dl}$, el vector unitario tiene evidentemente un módulo 1 y α es el ángulo que forman los vectores $\vec{dl}$ y $\hat{r}$. Como $\vec{dl}$ es perpendicular al plano del papel y $\hat{r}$ está incluido en este plano, ambos vectores son perpendiculares y forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes (90°).

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2}\, dl$$

A continuación tomamos el elemento de corriente $\vec{dl}'$ simétrico al anterior.

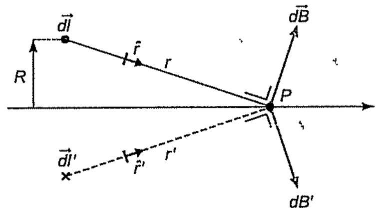


Figura 20.12

La componente «y» del campo magnético, debido al elemento $\vec{dl}$, es opuesta a la del campo debido al elemento $\vec{dl}$, por tanto ambas se cancelarán.

Para calcular el campo magnético total creado por toda la espira en el punto P, hay que sumar todos los campos creados por todos los elementos de corriente en los que se puede descomponer la espira circular:

$$\vec{B}_T = \int d\vec{B}$$

Esta suma es una suma vectorial y, por tanto, ha de sumarse para cada una de las componentes de los vectores.

La suma se puede simplificar mucho si se tiene presente que cada $\vec{dB}$ tiene su simétrico, en consecuencia se cancelarán las componentes perpendiculares al eje y se sumarán las componentes paralelas al eje:

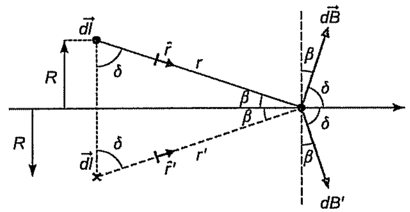


Figura 20.13

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \int dB_x = \int dB \cdot \text{sen } \beta$$

En la figura anterior se puede comprobar que:

$$\text{sen } \beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Por tanto:

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \int_{\text{Espira}} dB_x = \int_{\text{Espira}} dB \cdot \text{sen } \beta = \int_{\text{Espira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}\, dl$$

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \int_{\text{Espira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dl$$

La distancia r de cada elemento de corriente al punto P es una constante y puede sacarse de la integral:

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\text{Espira}} dl$$

Donde $\int_{\text{Espira}} dl$ es la suma de todos los elementos de longitud, que en conjunto conforman la espira de corriente de radio R:

$$\int_{\text{Espira}} dl = 2\pi R$$

Así:

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, 2\pi R$$

$$B\,(x)_{\text{TOTAL}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La dirección del campo magnético es la del eje horizontal. Si se trata del eje de abscisas, el campo magnético es:

$$\vec{B}\,(x)_{\text{TOTAL}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, \hat{i}$$

Si la corriente de la espira circulara en sentido opuesto al indicado en el enunciado, el campo magnético resultante tendría el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario.

b) En el centro de la espira, $x = 0$. Por tanto basta con sustituir el valor $x = 0$ en el resultado del apartado anterior para calcular el campo en el centro de la espira:

$$\vec{B}\,(0) = \frac{\mu_0 IR^2}{2 \cdot (R^2)^{\frac{3}{2}}}\, \hat{i} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\,R^3}\, \hat{i}$$

$$\vec{B}\,(0) = \frac{\mu_0 I}{2\,R}\, \hat{i}$$

20.3. Un hilo conductor rectilíneo transporta una corriente I. Un punto P se encuentra alejado una distancia R del hilo. Determinar:

a) El campo magnético creado por la corriente en P si el hilo tiene una longitud L.

b) El campo magnético creado por la corriente en P si el hilo es tan largo que se puede considerar infinito.

Solución

a) La figura inferior muestra un elemento diferencial alejado una distancia r del punto P en el que se quiere calcular el campo magnético B.

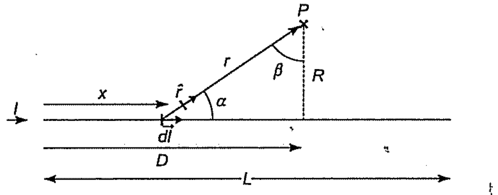


Figura 20.14

Calcularemos en primer lugar el diferencial de campo magnético, $d\vec{B}$, creado por el $d\vec{l}$ escogido. El vector $d\vec{B}$ es un vector y para su determinación, hay que calcular su módulo, dirección y sentido.

La dirección y el sentido se obtienen a partir del producto vectorial $d\vec{l} \times \hat{r}$. Si se hace una vista en la que la corriente sea perpendicular hacia fuera del papel, se obtiene:

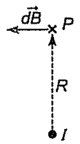


Figura 20.15

Se calcula el módulo teniendo en cuenta que $d\vec{l} = dx\,\hat{i}$:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\, dl \cdot 1 \cdot \text{sen}\,\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\,\text{sen}\,\alpha\, dx$$

Donde α es el ángulo formado entre los vectores $d\vec{l}$ y $\hat{r}$.

El campo magnético total en P será la suma de todos los $d\vec{B}$ creados por los diferentes $d\vec{l}$ que constituyen todo el conductor. Como todos los $d\vec{l}$ crean un campo magnético con la misma dirección y sentido, bastará con determinar el módulo B:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\,\text{sen}\,\alpha\, dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\text{sen}\,\alpha}{r^2}\, dx$$

La integral contiene tres variables dependientes: r, α y x. Es fácil comprobar en las figuras anteriores que para cada dl, hay diferentes valores de r y de α. Se puede resolver cómodamente si se tiene en cuenta que:

$$tg\alpha = \frac{R}{D - x} \quad \Rightarrow \quad D - x = R \cdot \cot g\alpha$$

$$dx = \frac{R}{\text{sen}^2\,\alpha}\, d\alpha$$

Sustituyendo en la integral:

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\text{sen}\,\alpha}{r^2}\, dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\text{sen}\,\alpha}{\left(\dfrac{R}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2}\left(\frac{R}{\text{sen}^2\,\alpha}\, d\alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\text{sen}^3\,\alpha}{R^2}\,\frac{R}{\text{sen}^2\,\alpha}\, d\alpha$$

Al integrar para todo el conductor, el ángulo α varía entre un valor inicial α_i y un valor final α_f:

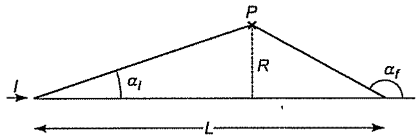


Figura 20.16

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \frac{\text{sen}\,\alpha}{R}\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \text{sen}\,\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[-\cos\,\alpha\right]_{\alpha_i}^{\alpha_f} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot(-\cos\,\alpha_f + \cos\,\alpha_i)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot(\cos\,\alpha_i - \cos\,\alpha_f)$$

b) Si el conductor es tan largo que se puede considerar infinito, se puede hacer entonces la aproximación $\alpha_i = 0$ radianes y $\alpha_f = 0$ radianes. En estas condiciones:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot(\cos 0 - \cos\,\pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot 2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

20.4. Un hilo conductor rectilíneo transporta una corriente I. Un punto P se encuentra alejado una distancia d del hilo.

a) En un plano perpendicular al hilo de corriente (considerado ya infinito), escoger 12 puntos equidistantes entre sí y al hilo conductor. Dibujar el campo magnético en cada uno de ellos y extrapolar el resultado para dibujar una línea de campo magnético.

Hacer un cálculo numérico si:

b) El hilo es finito de longitud $L = 40$ cm y transporta una corriente de 10 A. El punto P se halla en la mediatriz del hilo y alejado una distancia $R = 2{,}0$ cm.

c) El hilo es infinito y transporta una corriente de 10 A. El punto P está alejado una distancia $R = 2{,}0$ cm.

Solución

a) La figura muestra el plano que contiene los 12 puntos equidistantes al conductor de corriente. La corriente es perpendicular al plano y hacia fuera del papel:

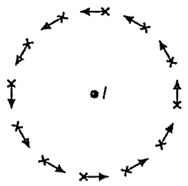


Figura 20.17

Si se extrapola para todos los puntos de este plano equidistantes a la corriente, se obtiene una línea de campo magnético:

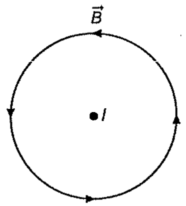


Figura 20.18

b) Si el conductor es de $L = 40$ cm de longitud y el punto P se encuentra en la mediatriz del conductor alejado una distancia $R = 2{,}0$ cm, los ángulos α_i y α_f tendrán unos valores:

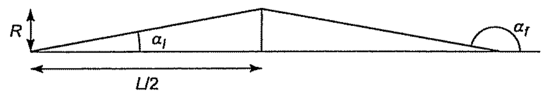


Figura 20.19

$$tg\ \alpha_i \ \frac{R}{\frac{L}{2}} = \frac{2{,}0 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0{,}10$$

$$\alpha_i = 0{,}10 \text{ rad} = 5{,}7°$$

Para calcular α_f se puede comprobar que, en este caso, $\alpha_f + \alpha_i = \pi$ rad. Por tanto:

$$\alpha_f = \pi - \alpha_i = \pi - 0{,}10 \text{ rad} = -3{,}0 \text{ rad} = 174{,}3°$$

$$B\,(2{,}0 \text{ cm}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos \alpha_i - \cos \alpha_f) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos 5{,}7° - \cos 174{,}3°)$$

$$B\,(2{,}0 \text{ cm}) = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot \text{m}}{A} \cdot \frac{10\,A}{2{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot 1{,}99 = 99{,}5 \cdot 10^{-6}\,T$$

$$B\,(2{,}0 \text{ cm}) = 99{,}5\ \mu T$$

c) En este caso, la diferencia respecto al apartado anterior es que el conductor es infinito:

$$B\,(2{,}0 \text{ cm}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot \text{m}}{A} \cdot \frac{10\,A}{2{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 100 \cdot 10^{-6}\,T$$

$$B\,(2{,}0 \text{ cm}) = 1{,}0 \cdot 10^{2}\ \mu T$$

20.5. Determinar el campo magnético creado por una espira conductora cuadrada de lado $L = 10$ cm en su centro. La corriente que circula por esta espira es 5,0 A.

Solución

La Figura 20.20 muestra la espira cuadrada y los sentidos de la corriente en cada lado.

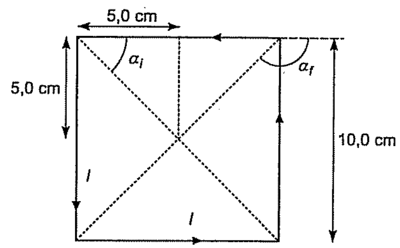


Figura 20.20

La espira se puede descomponer en cuatro tramos rectilíneos de 10 cm de longitud. El campo en el centro de la espira será cuatro veces el campo creado por uno de los tramos rectilíneos: $B_T = 4\,B_C$.

Para calcular el campo creado por uno de los tramos, se puede observar en la figura que la distancia desde el conductor al centro es de 5,0 cm y que los ángulos tienen los valores $\alpha_i = \pi/4$ radianes (45°) y $\alpha_f = 3\pi/4$ radianes (135°).

$$B_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, L/2} \cdot (\cos \alpha_i - \cos \alpha_f) = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot \text{m}}{A} \cdot \frac{5{,}0\,A}{5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$B_C = 14 \cdot 10^{-6}\,T$$

$$B_T = 4 \cdot B_C = 4 \cdot 14 \cdot 10^{-6}\,T = 57 \cdot 10^{-6}\,T$$

$$B_T = 57\ \mu T$$

20.6. Dos hilos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos se hallan separados una distancia 2D. Por los conductores pasan unas corrientes I_1 e I_2. Determinar:

a) El campo magnético en un punto P de la mediatriz de la línea que une los dos conductores.

b) Realizar un cálculo numérico con los datos: $2D = 12$ cm, $I_1 = I_2 = 5{,}0$ A, $y = 8{,}0$ cm.

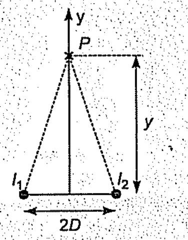


Figura 20.21

Solución

El campo magnético en el punto P se debe a la contribución de los campos creados por cada uno de los conductores rectilíneos.

Las distancias a la que se encuentran del punto P los conductores 1 y 2 son r_1 y r_2 respectivamente.

La dirección y sentido que cada uno de los conductores crea en el punto P se puede observar en la Figura 20.22:

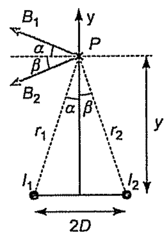


Figura 20.22

Calculemos el campo total, B_T, en el punto P:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Los módulos de los campos magnéticos B_1 y B_2 en el punto P son:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}$$

Para hacer la suma de los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$, vamos a descomponerlos en los ejes de abscisas y coordenadas. Si se tiene en cuenta la figura superior, como $r_1 = r_2$, los ángulos α y β son iguales. De esta forma, se obtiene:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\cos\alpha\,\hat{i} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\cos\alpha\,\hat{i} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

Sumando los dos campos:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\cos\alpha\,\hat{i} + \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}}\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{B}_T = -\frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}}\,\hat{i} + \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi\sqrt{D^2 + y^2}} \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 + y^2}}\,\hat{j}$$

$$\vec{B}_T = -\frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi (D^2 + y^2)}\,y\,\hat{i} + \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi (D^2 + y^2)}\,D\hat{j}$$

b) Si se conocen los datos numéricos: $2D = 12$ cm, $I_1 = I_2 = 5{,}0$ A, $y = 8{,}0$ cm, el campo magnético total toma un valor:

$$\vec{B}_T = -\frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2\pi (D^2 + y^2)}\,y\,\hat{i} = -2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\frac{T \cdot \text{m}}{A} \cdot \frac{10\,A}{(6{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 + (8{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\,\hat{i}$$

$$\vec{B}_T = -1{,}6 \cdot 10^{-5}\,T\,\hat{i} = -16\,\mu T\,\hat{i}$$

Al ser las corrientes del mismo valor, las componentes verticales se cancelan y sólo restan las componentes horizontales.

20.7. Determinar el campo magnético creado por una placa plana conductora, que se puede considerar infinita, en un punto P situado a una distancia D del conductor. La densidad lineal de corriente, λ, del conductor es constante ($\lambda = dI/dx$).

Solución

La placa conductora se puede entender como un continuo de hilos conductores rectilíneos, paralelos entre sí, e infinitos con una corriente $dI = \lambda \cdot dx$:

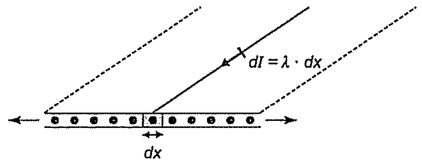


Figura 20.23

Para calcular el campo magnético creado por esta placa en un punto P, se va a determinar antes el campo magnético creado por una de estas corrientes rectilíneas de valor dI en el punto P.

La Figura 20.24 muestra una vista frontal de la placa, de la cual sólo se observan las corrientes salientes. Se toma un elemento de corriente de anchura dx que se encuentra a una distancia r del punto P.

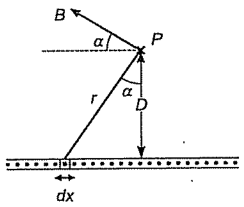


Figura 20.24

El módulo del campo magnético creado por el elemento de corriente en el punto P es:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2\,\pi\,r}$$

Al considerarse infinita la placa conductora, cualquier elemento de corriente tendrá su simétrico respecto de la línea perpendicular a la placa que pasa por P:

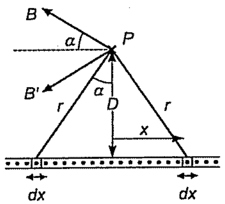


Figura 20.25

El cálculo del campo magnético creado por estos dos elementos de corriente es idéntico al realizado en el Ejercicio 20.6. Como la corriente de ambos es la misma, el campo magnético sólo tendrá componente horizontal:

$$d\vec{B}_T = -\frac{\mu_0\, dI}{\pi\, r^2}\, D\,\hat{i}$$

Este resultado es sólo válido para los puntos que se encuentren por encima de la placa. Si el punto P estuviera por debajo de la placa, el campo magnético debido a estos dos elementos de corriente sería:

$$d\vec{B}_T = \frac{\mu_0\, dI}{\pi\, r^2}\, D\,\hat{i}$$

Una vez conocidas la dirección y el sentido del campo magnético en función de donde se encuentre el punto P, vamos a determinar el módulo de este campo magnético.

Si la posición horizontal de los elementos de corriente, respecto de la vertical del punto P, es x:

$$dB_T = -\frac{\mu_0\, dI}{\pi\,(x^2 + D^2)}\, D$$

El campo creado por la placa es la suma de los campos creados por todos los elementos de corriente:

$$B_T = \int dB_T = -\int_0^{\infty} \frac{\mu_0\, dI}{\pi\,(x^2 + D^2)}\, D = -\int_0^{\infty} \frac{\mu_0\,\lambda\, D}{\pi\,(x^2 + D^2)}\, dx = -\frac{\mu_0\,\lambda\, D}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + D^2)}$$

$$B_T = -\frac{\mu_0\,\lambda\, D}{\pi}\left[\frac{1}{D}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{D}\right)\right]_0^{\infty} = -\frac{\mu_0\,\lambda\, D}{\pi}\left[\frac{1}{D}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{1}{2}\,\mu_0\,\lambda$$

$$B_T = -\frac{1}{2}\,\mu_0\,\lambda\,\hat{i}$$

20.8. Comprobar la ley de Ampère calculando la circulación de campo magnético a través de la curva C. Por el centro geométrico del sistema pasa, perpendicular al plano de la curva C y hacia fuera, una corriente rectilínea I tan larga que se puede considerar infinita.

Nota: La curva C está compuesta por dos tramos curvilíneos de radios R y r unidos entre sí por otros dos tramos rectos radiales.

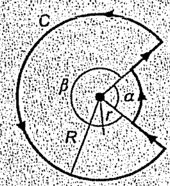


Figura 20.26

Solución

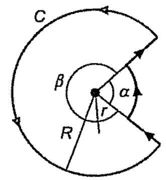
Vamos a comprobar la ley de Ampère calculando la circulación de campo magnético a través de una curva cerrada C. La circulación del campo magnético a través de una curva cerrada C se expresa:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

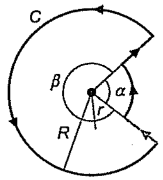
El tramo de corriente es rectilíneo e infinito. Las líneas de campo magnético generadas serán circunferencias concéntricas con el conductor. Si la corriente es saliente al papel (Figura 20.26), las líneas de campo magnético tienen sentido antihorario.

Ahora vamos a determinar la circulación de campo magnético. Para ello se va a descomponer la curva C en cuatro tramos:

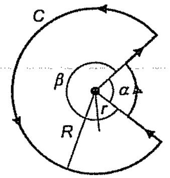
1: parte de una circunferencia de radio R que abarca un arco de ángulo β:



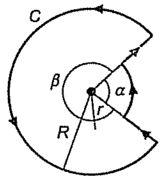
2: tramo rectilíneo que conecta el trozo de circunferencia de radio R al tramo de circunferencia de radio r.



3: parte de una circunferencia de radio r que abarca un arco de ángulo α:



4: tramo rectilíneo que conecta el trozo de circunferencia de radio r al tramo de circunferencia de radio R.



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

Seguidamente se evalúan cada uno de los cuatro términos del segundo miembro:

$$\text{Tramo 1: } \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} \underset{(1)}{=} \int_1 B\cdot dl = \int_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\int_1 dl \underset{(2)}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\beta$$

(1): El campo magnético es paralelo, punto a punto, a la curva del tramo 1 y así el producto escalar pasa a ser un producto de módulos.
(2): La longitud de este tramo es el de un arco de radio R y ángulo β, $l_1 = R\beta$.

$$\text{Tramo 2: } \int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

En este tramo, cualquier elemento de longitud es perpendicular al campo magnético y su producto escalar es nulo. El tramo es radial mientras que las líneas de campo magnético son circunferencias.

$$\text{Tramo 3: } \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} \underset{(1)}{=} \int_3 B\cdot dl = \int_3 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_3 dl \underset{(2)}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\alpha$$

(1): El campo magnético es paralelo, punto a punto, a la curva del tramo 3 y así el producto escalar pasa a ser un producto de módulos.
(2): La longitud de este tramo es el de un arco de radio r y ángulo α, $l_3 = r\alpha$.

$$\text{Tramo 4: } \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

En este tramo, al igual que en el 2, cualquier elemento de longitud es perpendicular al campo magnético y su producto escalar es nulo.
Así:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\beta + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\beta+\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(2\pi)$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

20.9. Determinar, aplicando la ley de Ampère, el campo magnético creado por una bobina ideal de N espiras, de radio R, y longitud ℓ por la que pasa una intensidad de corriente I.

Solución

La ley de Ampère relaciona el recorrido de campo magnético a través de una curva cerrada con las corrientes enlazadas por esa curva.

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas}$$

A pesar de que no se conoce el campo magnético, es conveniente tener una idea de cómo son las líneas de campo creado por una bobina para elegir mejor la curva C.

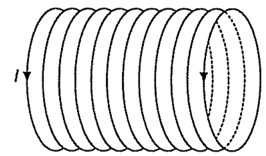


Figura 20.27

La bobina está compuesta por N espiras. El campo magnético que genera una espira aislada es:

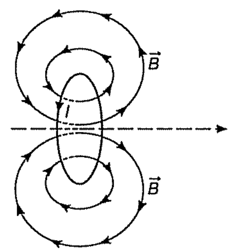


Figura 20.28

Si se unen varias espiras idénticas, el campo magnético confinado en el interior se va uniformizando y aumentando. Si el número de espiras es suficientemente elevado, pasa a ser paralelo al eje de las espiras. Por el contrario, en el exterior, los campos se van cancelando por lo que, si el número de espiras es grande, se puede considerar nulo.

En la Figura 20.29 se observa un corte de una bobina por la que pasa una corriente I y el campo magnético que ésta crea:

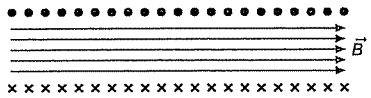


Figura 20.29

Se debe tener presente que las espiras de una bobina se encuentran siempre muy unidas unas a otras. La separación de las espiras en la Figura 20.29 es para tener una mayor claridad en la explicación del problema.

Los puntos y cruces son las corrientes salientes o entrantes al papel de las espiras que constituyen la bobina. El campo magnético creado es uniforme. Para un campo magnético con esta distribución en el espacio, es conveniente escoger una curva cerrada C cuya simetría sea similar al propio campo magnético:

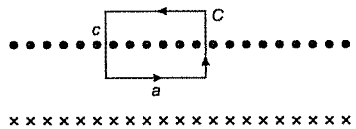


Figura 20.30

Apliquemos a continuación la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas}$$

Al igual que en el Ejercicio 20.8, se va a descomponer la curva cerrada C en cuatro tramos rectos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

El tramo 1 es la línea horizontal que se encuentra en el interior de la bobina.
El tramo 2 es la línea vertical derecha que sale desde el interior de la bobina.
El tramo 3 es la línea horizontal que se encuentra en el exterior de la bobina.
El tramo 4 es la línea vertical izquierda que entra desde el exterior de la bobina para conectar con el tramo 1.

$$\text{Tramo 1: } \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} \underset{(1)}{=} \int_1 B \cdot dl \underset{(2)}{=} \int_1 dl = Ba$$

(1): El campo magnético es paralelo en todos los puntos al tramo 1 y así el producto escalar pasa a ser un producto de módulos.
(2): El campo magnético B es constante a lo largo de todo este tramo.

$$\text{Tramo 2: } \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

En este tramo, cualquier elemento de longitud es perpendicular al campo magnético y su producto escalar es nulo.

$$\text{Tramo 3: } \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

En el exterior de la bobina podemos aplicar la aproximación de que el campo magnético es nulo:

$$\text{Tramo 4: } \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

En este tramo, al igual que en el 2, cualquier elemento de longitud es perpendicular al campo magnético y su producto escalar es nulo.

Así:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba$$

Por otro lado, el segundo miembro de la ley de Ampère es:

$$\mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas} = \mu_0 \left(\frac{Na}{\ell}\right) I$$

Donde el término $\frac{Na}{\ell}$ es el número de espiras enlazadas por la curva C.

Igualando los dos miembros de la ley de Ampère:

$$Ba = \mu_0 \left(\frac{Na}{\ell}\right) I = \mu_0\, n\, aI$$

$$B = \mu_0\, n\, I$$

Donde $n = \frac{N}{\ell}$ es el número de espiras por unidad de longitud de una bobina.

20.10. Determinar, aplicando la ley de Ampère, el campo magnético en el interior de un conductor rectilíneo e infinito por el que pasa una corriente I. El conductor tiene una sección circular de radio R.

Solución

A continuación se muestra una sección del conductor infinito rectilíneo. Dada la simetría del problema, se escoge una curva cerrada C que es una circunferencia de radio r ($r < R$).

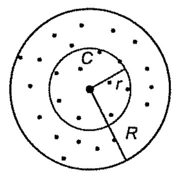


Figura 20.31

Se puede suponer que, en el interior del conductor, las líneas del campo magnético también serán circunferencias concéntricas con el centro en el eje del conductor.

A continuación se evaluarán los dos miembros de la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \underset{(1)}{=} \oint_C B \cdot dl \underset{(2)}{=} B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r$$

(1): El campo magnético es paralelo a los puntos de la curva C. Así el producto escalar se reduce a un producto de módulos.

(2): Dada la simetría del problema, se puede suponer que el campo magnético tiene el mismo valor en toda la curva C.

Para evaluar el segundo miembro, supondremos que la corriente está uniformemente distribuida por toda la sección del conductor. O lo que es lo mismo, la densidad de corriente es constante en el conductor.

$$\mu_0 \cdot \sum I_{enlazadas} = \mu_0 \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right) I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

Igualando los dos miembros se obtiene:

$$B\, 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

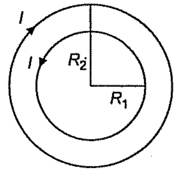
Se puede observar que el campo magnético aumenta linealmente con el radio hasta llegar al borde del conductor ($r = R$), en el que se obtiene el valor ya conocido de campo magnético creado por una corriente infinita:

$$B(r = R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

CUESTIONES

FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO

20.1. Considerar dos espiras de corriente circulares y concéntricas. Por las dos circula la misma intensidad de corriente I, tal y como indica la figura. El campo magnético en el centro de las espiras tendrá un módulo y dirección:



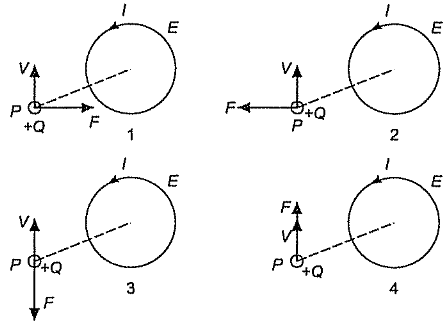
a) $B = \mu_0 \cdot I/2 \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$ perpendicular al plano del papel y saliendo de él.

b) $B = \mu_0 \cdot I/2 \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ perpendicular al plano del papel y saliendo de él.

c) $B = \mu_0 \cdot I/2 \cdot (1/R_1 - 1/R_2)$ perpendicular al plano del papel y entrando hacia el papel.

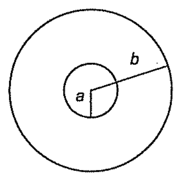
d) $B = \mu_0 \cdot I/2 \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ perpendicular al plano del papel y entrando hacia el papel.

20.2. En el punto P se encuentra una carga positiva, $+Q$, que se mueve hacia arriba con una velocidad V dentro del campo magnético creado por la espira E de la figura, recorrida por una corriente I en sentido antihorario. El gráfico que representa correctamente la fuerza magnética que actúa sobre la carga es:



a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4

20.3. Un cable coaxial largo está constituido por un conductor cilíndrico de radio a y una corteza cilíndrica conductora de radio b concéntricos entre sí. El conductor central lleva una corriente I, el conductor exterior proporciona el camino de retorno. Es cierto afirmar que:



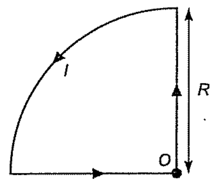
a) El campo magnético es $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ para los puntos que se encuentran a una distancia r del eje del cable ($a < r < b$) y $B = 0$, si $r > b$.

b) El campo magnético es $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ para los puntos que cumplen $r < b$, y $B = 0$, si $r > b$, siendo r la distancia al eje del cable.

c) El campo magnético es $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ para los puntos que cumplen $r > b$, y $B = 0$ si $r < b$, siendo r la distancia al eje del cable.

d) El campo magnético es $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ para los puntos que cumplen $r < a$, y $B = 0$ si $r > a$, siendo r la distancia al eje del cable.

20.4. Una espira, por la que circula una intensidad de corriente I en sentido antihorario, tiene la forma de un cuarto de circunferencia, tal y como se ve en el dibujo. El valor y la dirección del campo magnético en el punto O es:



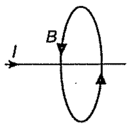
a) $B = \mu_0 \cdot I/(2 \cdot R)$, perpendicular al plano del papel y saliendo de él.

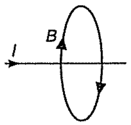
b) $B = \mu_0 \cdot I/(8 \cdot R)$, perpendicular al plano del papel y saliendo de él.

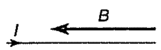
c) $B = \mu_0 \cdot I/(2 \cdot R)$, perpendicular al plano del papel y entrando hacia el papel.

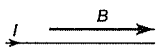
d) $B = \mu_0 \cdot I/(\pi \cdot R)$, perpendicular al plano del papel y saliendo de él.

20.5. Indicar la dirección correcta del campo magnético B generado por el hilo de corriente infinito de la figura:

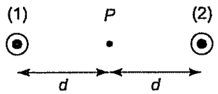
a)


b)


c)


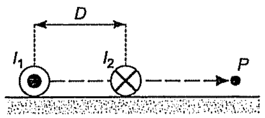
d)


20.6. Dos alambres rectilíneos muy largos, situados perpendicularmente al plano del papel, conducen unas corrientes eléctricas respectivas I_1 e I_2 en el mismo sentido, papel afuera. El campo magnético en el punto P será nulo:



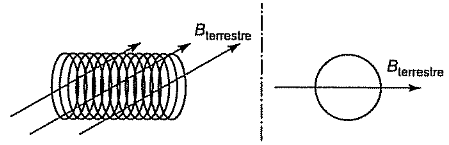
a) Nunca. *b)* Si $I_1 < I_2$. *c)* Si $I_1 > I_2$. *d)* Si $I_1 = I_2$.

20.7. Dos hilos conductores paralelos, que se pueden considerar infinitos, se encuentran separados una distancia $D = 20$ cm. Por los hilos conductores pasan corrientes en sentidos opuestos tal y como indica el dibujo. La corriente I_1 es de 1,6 A. A 80 cm a la derecha de I_1 se encuentra el punto P, donde el campo magnético B es nulo. La corriente I_2 tiene un valor:



a) $I_2 = 0,60$ A *b)* $I_2 = 1,6$ A *c)* $I_2 = 2,1$ A *d)* $I_2 = 1,2$ A

20.8. Una bobina de $2,0 \cdot 10^3$ espiras y 10 cm de longitud está colocada en un laboratorio de forma que su eje es perpendicular al campo magnético terrestre. Si el valor del campo magnético terrestre en el laboratorio tiene un valor de $2,6 \cdot 10^{-2}$ mT, determinar la corriente que debe pasar por la bobina para que el campo magnético total en su interior esté formando un ángulo de 45° con el eje de la bobina.



a) $I = 1,0$ mA

b) No se puede calcular sin conocer el sentido de la corriente.

c) $I = 1,0$ A

d) $I = 1,0$ μA

20.9.1. Dos bobinas concéntricas tienen la misma longitud $l = 16$ cm. Los radios y número de espiras de las bobinas son $R_1 = 3,0$ cm, $R_2 = 1,0$ cm, $N_1 = 2,0 \cdot 10^3$ y $N_2 = 4,0 \cdot 10^3$ respectivamente. Por la bobina 1 pasa una corriente $I_1 = 0,10$ A. El módulo del campo magnético creado por la bobina 1 es:

a) 0 *c)* 16 mT

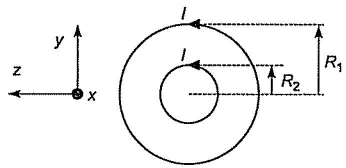
b) 0,25 mT *d)* 1,6 mT

20.9.2. Si los campos creados por las bobinas son de sentidos opuestos y el campo magnético en el eje del sistema es nulo, ¿cuál es el valor de la corriente de la bobina 2, I_2?

a) 0 *c)* 0,10 A

b) 50 mA *d)* 0,20 A

20.10. En el dibujo se muestran dos bobinas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$), por las que pasa la misma corriente $I = 50$ mA. Ambas bobinas tienen la misma longitud, 10 cm, y el número de espiras de cada una es $N_1 = 2,0 \cdot 10^3$ y $N_2 = 4,0 \cdot 10^3$. En el dibujo se muestra la sección de un corte transversal de las bobinas donde se puede ver el sentido de circulación de la corriente, que es en sentido antihorario. Es correcto afirmar que:



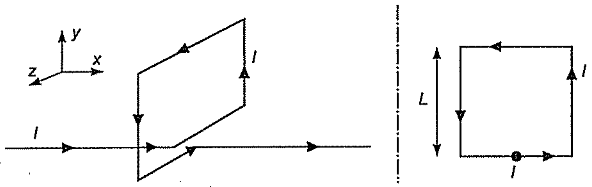
a) El módulo del campo magnético generado por la bobina de radio R_1 es $1,3 \cdot 10^{-5}$ T.

b) El campo magnético en el interior de la bobina de radio R_2 es $B = 3,8$ mT $\hat{i}$.

c) El campo que crean ambas bobinas es en dirección $-\hat{i}$.

d) El campo magnético es más intenso en el espacio entre las dos bobinas.

20.11. El dibujo muestra un hilo de corriente muy largo que tiene un lazo cerrado en forma de espira cuadrada de lado L. Por el conductor circula una corriente I. La espira cuadrada es paralela al plano yz y el hilo de corriente es paralelo al eje x.



El campo magnético en el centro de la espira tiene un valor:

a) Nulo.

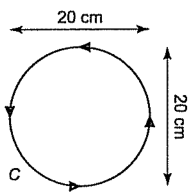
b) $\vec{B} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\mu_0\cdot I}{\pi L}\,\hat{i} + \dfrac{\mu_0 I}{\pi L}\,\hat{k}$

c) $\vec{B} = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi L}\,\hat{j}$

d) $\vec{B} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\mu_0\cdot I}{\pi L}\,\hat{j} - \dfrac{\mu_0 I}{\pi L}\,\hat{k}$

LEY DE AMPÈRE. CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS

20.12. La forma real de una línea de campo magnético constante de valor $1{,}0\cdot10^{-5}$ T, es la curva C que se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de la intensidad de corriente que atraviesa el área encerrada por la curva?



a) 5,0 A

b) 2,5 A

c) 10 A

d) No se puede calcular.

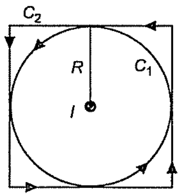
20.13. I es una corriente continua de 1,5 A, que pasa perpendicular al plano que define tanto la circunferencia C_1 como el cuadrado C_2. De C_1 y C_2 es correcto afirmar que:

a) Podemos determinar el campo magnético en cualquiera de los puntos de C_1 o C_2 y su valor es $\mu_0\cdot I/(2\cdot\pi\cdot R)$.

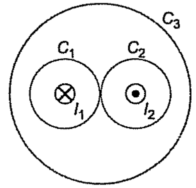
b) El campo magnético es diferente en cada punto de C_1 y en cada punto de C_2.

c) La ley de Ampère aplicada a C_1 y C_2 dará un resultado idéntico.

d) La ley de Ampère aplicada a C_1 y C_2 dará un resultado diferente.



20.14.1. La figura muestra dos hilos conductores indefinidos situados perpendicularmente al plano del papel. También se indican tres caminos cerrados a través de los cuales se aplicará la ley de Ampère. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



a) $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\,(I_1 - I_2)$

b) $\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\,I_1$

c) $\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\,(I_1 + I_2)$

d) $\oint_{C_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

20.14.2. ¿Cuál de los siguientes caminos nos permitirá encontrar el campo total creado por los dos conductores?

a) C_1 *b)* C_2 *c)* C_3 *d)* Ninguno de los tres.

20.15. Al calcular la circulación del vector campo magnético a lo largo de una línea cerrada, C, se obtiene $\oint_C \vec{B}\,d\vec{l} = 0$, sin embargo, estamos seguros de que la superficie encerrada por la línea, C, a lo largo de la que hemos calculado la circulación está atravesada por corrientes eléctricas, luego:

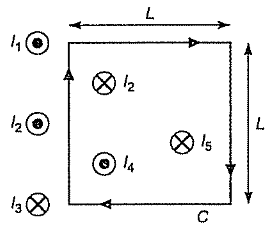
a) El resultado no es correcto.

b) Este resultado sólo es válido cuando la línea a lo largo de la que se calcula la circulación no encierra corrientes.

c) El resultado anterior puede ser correcto ya que si de las corrientes enlazadas por la curva C, las que la atraviesan en un sentido, sumadas, dan el mismo valor que la suma de las que la atraviesan en sentido opuesto, el resultado de la circulación de campo magnético a través de la curva C, efectivamente es nulo.

d) Este resultado es correcto, ya que la circulación de B es siempre cero con tal de que se calcule a lo largo de una línea cerrada.

20.16. En el sistema de la figura se muestran 6 hilos conductores rectilíneos muy largos por los que circulan intensidades: $I_1 = I_2 = I_3 = 3{,}0$ A, $I_4 = I_5 = I_6 = 2{,}0$ A. Enlazadas por C se encuentran I_2, I_4 e I_5. Respecto a la línea cerrada C, se puede afirmar que:



a) $B = \dfrac{\mu_0 (I_2 + I_5 - I_4)}{2\,\mu\,\mathrm{L}}$

b) B depende sólo de I_2, I_4, I_5.

c) B depende sólo de I_1, I_6, I_3.

d) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 3{,}0\ \mu_0$

20.17. Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico macizo de 0,50 mm de radio y por una capa conductora cilíndrica concéntrica de 2,0 mm de radio. Por el hilo interior circula una corriente de 2,0 A en un cierto sentido y por la capa cilíndrica circula la misma corriente en sentido opuesto. Determinar el valor numérico de la circulación de campo magnético para un camino cerrado circular de radio $r = 1{,}0$ mm concéntrico con el sistema.

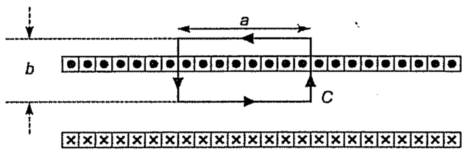
a) 0

b) $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ T · m

c) $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ T · m

d) $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T · m

20.18. La figura muestra el corte de una bobina de 40 cm de longitud, compuesta de 8 000 espiras. Por la bobina pasa una corriente de 0,50 A. Hallar la circulación de campo magnético a través de la curva C. $a = 20$ cm y $b = 8{,}0$ cm.



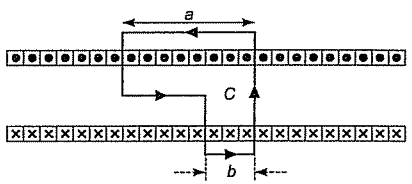
a) $2{,}5 \cdot 10^{-3}\ T\,\mathrm{m}$

b) $2{,}5\ T\,\mathrm{m}$

c) $1{,}0 \cdot 10^{-4}\ T\,\mathrm{m}$

d) No se puede calcular.

20.19. La figura muestra el corte de una bobina de 20 cm de longitud, compuesta de 800 espiras. Por la bobina pasa una corriente de $2{,}0 \cdot 10^2$ mA. Hallar la circulación de campo magnético a través de la curva C. $a = 12$ cm y $b = 4$ cm.



a) No se puede calcular porque faltan datos de la curva C.

b) $16 \cdot 10^{-3}\ T\,\mathrm{m}$

c) $80 \cdot 10^{-6}\ T\,\mathrm{m}$

d) $9{,}6 \cdot 10^{-3}$

SOLUCIONES

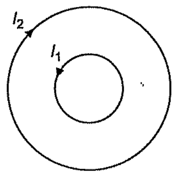
20.1. *a)*
20.2. *a)*
20.3. *a)*
20.4. *b)*
20.5. *a)*
20.6. *d)*
20.7. *d)*
20.8. *a)*
20.9.1. *d)*
20.9.2. *b)*
20.10. *b)*
20.11. *b)*
20.12. *a)*
20.13. *c)*
20.14.1. *b)*
20.14.2. *d)*
20.15. *c)*
20.16. *d)*
20.17. *b)*
20.18. *a)*
20.19. *c)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Determinar, utilizando la ley de Ampère, el módulo del campo magnético creado por una placa plana conductora, que se puede considerar infinita, en un punto P situado a una distancia D del conductor. La densidad lineal de corriente, λ, del conductor es constante ($\lambda = dI/dx$).**

   Sol.: $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$

2. **Una espira de radio $R_1 = 1{,}0$ mm tiene una corriente de 2,0 A.**



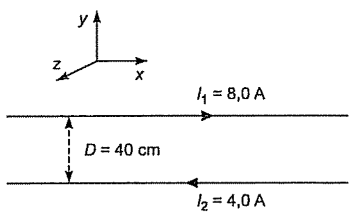
   a) Calcular el campo magnético creado por esta espira en su centro.

   Se coloca concéntrica a la anterior otra espira de 3,0 mm de radio con una corriente de 6,0 A pero en sentido opuesto a la primera espira.

   b) Calcular el campo magnético en el centro del sistema.

   Sol.: *a)* $B = 1{,}3$ m*T*; *b)* 0

3. **El dibujo muestra dos hilos conductores que se pueden considerar infinitos. Ambos conductores son coplanarios, y se encuentran contenidos en el plano xy tal y como muestra el dibujo. El eje z es perpendicular a esta hoja y hacia afuera. Determinar:**

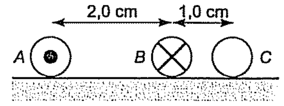


   a) El vector campo magnético en un punto, equidistante a los dos conductores, y en el plano que contienen los conductores.

   b) Teniendo en cuenta sólo el plano que contiene los conductores, ¿a qué distancia del conductor por el que pasa la corriente I_1, se cumple que el campo magnético creado por ambos conductores tiene el mismo módulo, dirección y sentido?

   Sol.: *a)* $B = -1{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}\ k$; *b)* a 27 cm

4. **Tres conductores rectilíneos muy largos, paralelos entre sí, están en el suelo. La separación entre A y B es de 2,0 cm, y entre B y C 1,0 cm. Las corrientes que pasan por A y B son de 12 A y 8,0 A respectivamente (el sentido es el marcado en el dibujo):**

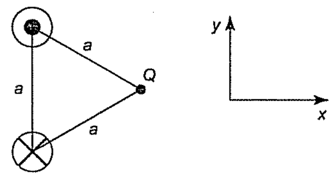


   a) ¿Cuál es el módulo del campo magnético que crean los conductores A y B en el punto medio entre ambos conductores?

   b) ¿Cuál es el valor y el sentido de la intensidad de corriente de C para que el campo magnético en el punto medio entre los conductores A y B sea nulo?

   Sol.: *a)* $B = 0{,}40$ mT; *b)* $I_C = 40$ A en el mismo sentido que el conductor A

5. **Dos hilos conductores rectos y paralelos transportan corrientes iguales ($I = 2{,}0$ mA). Los sentidos de las corrientes son opuestos, perpendiculares al plano del papel, uno hacia fuera y otro hacia dentro. Calcular:**



   a) El campo magnético que crea el conductor superior en el punto Q.

   b) El campo magnético que crea el conductor inferior en el punto Q.

   c) El campo magnético total en el punto Q.

   Dato: $a = 0{,}10$ mm.

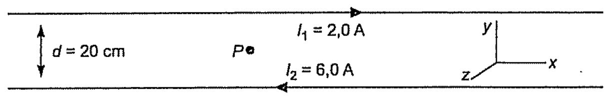
   Sol.: *a)* $B = 2{,}0\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \hat{i} + 3{,}5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \hat{j}$
   b) $B = 2{,}0\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \hat{i} - 3{,}5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \hat{j}$
   c) $B_T = 4{,}0\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \hat{i}$

6. **Considerar dos hilos de corriente infinitos y paralelos entre sí separados una distancia $d = 20$ cm. Por uno de los hilos circula una intensidad de corriente $I_1 = 2{,}0$ A y por el otro $I_2 = 6{,}0$ A, en los sentidos que indica la figura. Calcular:**

   a) El campo magnético creado por el conductor 1 en los puntos donde se halla el conductor 2.

   b) El campo magnético en un punto P equidistante de los dos conductores.

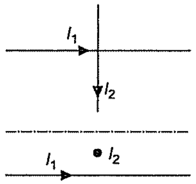
   c) La distancia del cable 1, en el plano que contiene los dos cables, en la que el campo magnético total es nulo. Indicar, también, si los puntos en los que el campo magnético es nulo se hallan por encima o por debajo del conductor 1.



Sol.: *a)* $B = -2{,}0\ \mu T\ k$; *b)* $B = -16\ \mu T\ k$; *c)* a 10 cm por encima del conductor 1 (alejándose del conductor 2)

7 Por dos cables rectilíneos que se pueden considerar infinitos pasan corrientes I_1 e I_2. Los cables están colocados en cruz, pero sin cortarse, como indica la figura adjunta. La separación entre los cables en el punto de máxima proximidad es de 8,0 mm.

Nota: La corriente I_1 tiene un valor de 6,0 A y su dirección y sentido es $\hat{i}$. La corriente I_2 tiene un valor de 4,0 A, su dirección y sentido es $-\hat{j}$.



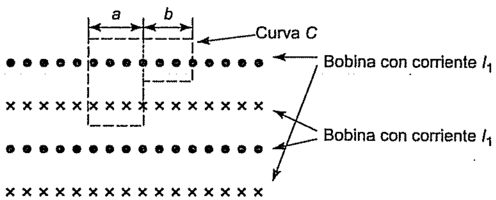
a) Calcular el campo magnético en un punto P de la línea, que siendo perpendicular a la corriente I_1 pasa por I_2. P se encuentra a 4,0 mm de ambos conductores.

b) Calcular el campo magnético en un punto Q de la línea, que siendo perpendicular a la corriente I_1 pasa por I_2. Q se encuentra a 12 mm por encima de la corriente I_1.

c) Calcular el campo magnético en un punto R de la línea, que siendo perpendicular a la corriente I_1 pasa por I_2. R se encuentra a 4 mm y 12 mm por debajo de I_1 e I_2 respectivamente.

Sol.: *a)* $B_P = 200\ \mu T\ \hat{i} - 300\ \mu T\ \hat{j}$
b) $B_Q = -200\ \mu T\ \hat{i} - 100\ \mu T\ \hat{j}$
c) $B_R = 67\ \mu T\ \hat{i} + 300\ \mu T\ \hat{j}$

8 El dibujo esquematiza dos bobinas, una incluye a otra. Las dos bobinas tienen una longitud de 25 cm. La bobina exterior tiene $2{,}0 \cdot 10^4$ espiras y por ella pasa una corriente de 1,0 A. La bobina interior tiene $5{,}0 \cdot 10^3$ espiras y por ella pasa también una corriente de 1,0 A.



Determinar:

a) El módulo y sentido del campo magnético en el eje del sistema de las bobinas.

b) El módulo y sentido del campo magnético en el espacio comprendido entre bobinas.

La curva C es un trapecio en el que $a = b = 5{,}0$ cm. Determinar:

c) La circulación de campo magnético sobre la curva C.

Sol.: *a)* $B_{eje} = 75$ mT con sentido hacia la derecha; *b)* $B = 0{,}10\ T$ con sentido hacia la derecha; *c)* $8{,}8 \cdot 10^{-3}\ T \cdot m$

CAPÍTULO 21

FUERZAS DE CAMPO MAGNÉTICO

21.1. FUERZAS SOBRE CORRIENTES Y CARGAS LIBRES EN MOVIMIENTO

Un campo magnético ejerce fuerzas sobre corrientes o sobre cargas libres en movimiento. Esta fuerza se denomina fuerza de Lorentz. Las expresiones que permiten determinar la fuerza de Lorentz son:

a) Fuerza sobre una carga libre en movimiento:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Donde:

q es la carga.
v es el vector velocidad de la carga.

En la Figura 21.1 se observa la dirección y el sentido de la fuerza que sufre la carga en movimiento en función de su signo.

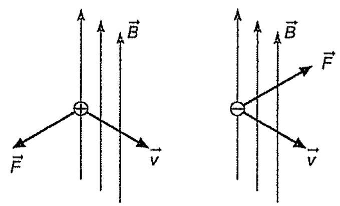


Figura 21.1

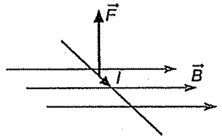


Figura 21.2

b) Fuerza sobre un conductor rectilíneo:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Donde:

I es la corriente que pasa por el conductor.
$\vec{l}$ es el vector cuya dirección y sentido es el de la corriente. Su módulo es la longitud del elemento.

MOVIMIENTO DE UNA CARGA EN EL SENO DE UN CAMPO MAGNÉTICO

Si una carga en movimiento entra en una zona del espacio en la que hay un campo magnético perpendicular al movimiento, ésta sufre una fuerza cuyo módulo es:

$$F = qvB$$

Esta fuerza es normal a la velocidad, por tanto origina un cambio en la dirección del movimiento.

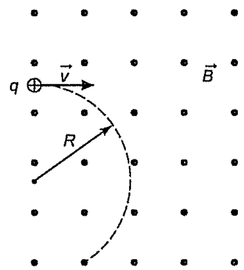


Figura 21.3

Si se aplica la segunda ley de Newton sobre la carga, se obtiene:

$$F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R} \qquad qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

R es el radio de la trayectoria que sigue la carga q.
El periodo, T, que tarda una carga en dar una revolución completa en el seno de un campo magnético es:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad T = \frac{2\pi \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m\, v}{qBv}$$

$$T = 2\pi\frac{m}{qB}$$

La frecuencia de rotación del movimiento es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

SELECTOR DE VELOCIDADES

Un selector de velocidades es un instrumento en el que coexisten un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí de forma que las fuerzas eléctrica y magnética sobre cargas en movimiento estén en oposición.

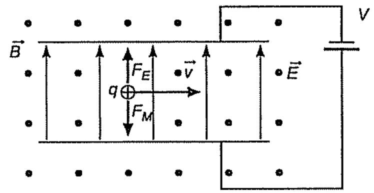


Figura 21.4

El selector de velocidades permite discriminar la velocidad de las cargas que lo atravesarán sin variar su trayectoria. Sobre aquellas cargas en las que las fuerzas magnética y eléctrica sean idénticas en módulo, la fuerza neta será nula y pasarán por el selector sin desviarse de su trayectoria inicial. Si $F_M = F_e$, podemos escribir:

$$qvB = qE$$

$$v = \frac{E}{B}$$

Este resultado es independiente del valor y del signo de la carga y es válido siempre que la fuerza gravitatoria sea despreciable.

ESPECTRÓMETRO DE MASAS

El espectrómetro de masas es un dispositivo experimental que empezó a utilizarse a principios del siglo XX. Permitió demostrar la existencia de isótopos en los elementos químicos y el porcentaje de cada isótopo.

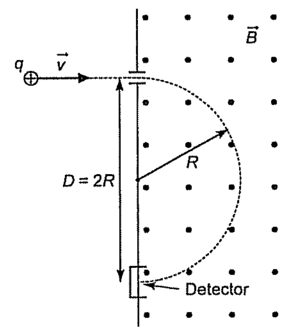


Figura 21.5

En el espectrómetro se introducen partículas de idéntica carga y velocidad pero diferente masa. El interior del espectrómetro se encuentra a muy baja presión y hay un campo magnético uniforme perpendicular a la dirección de desplazamiento de las cargas.

Las cargas, después de describir una trayectoria de semicircunferencia, colisionan contra un detector.

La diferencia de masa hará que las partículas describan una trayectoria de diferente radio y colisionen en diferentes posiciones en el detector.

Para diferentes isótopos con idéntica velocidad y desplazándose en el seno del mismo campo magnético, la distancia D comprendida entre la entrada al espectrómetro y el punto de colisión en el detector depende de sus masas:

$$D = \frac{2v}{qB} \cdot m$$

EFECTO HALL

Un campo magnético aplicado sobre un conductor con corriente provoca la aparición de una diferencia de potencial entre las caras del conductor.

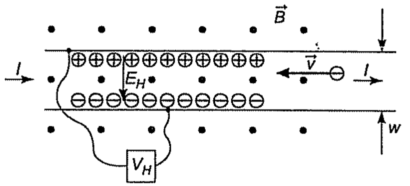


Figura 21.6

Si la cinta tiene un espesor w, el potencial, V_H, tiene un valor:

$$V_H = E_H \cdot w = v_d \cdot B \cdot w$$

Donde v_d es la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga libre en el conductor. Si en un conductor es conocida su anchura w y el valor de v_d, la expresión anterior permite determinar campos magnéticos desconocidos midiendo la tensión Hall entre las caras del conductor:

$$B = \frac{V_H}{v_d \cdot \omega}$$

21.2. MOMENTO DE FUERZA SOBRE UNA ESPIRA CON CORRIENTE

Una espira con corriente inmersa en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme se encuentra en equilibrio traslacional ya que la fuerza total aplicada sobre la espira es nula:

$$\vec{F}_T = \sum \vec{F}_i = 0$$

En cambio sufre un par de torsión o momento de fuerza $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = I \cdot A \cdot \hat{n} \times \vec{B}$$

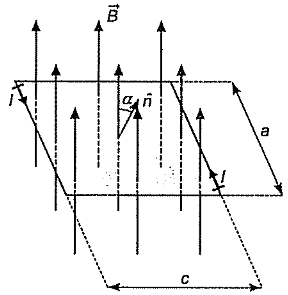


Figura 21.7

En módulo:

$$\tau = I \cdot A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

donde:

I es la corriente que pasa por la espira.

A es el área de la espira ($A = a \cdot c$).

α es el ángulo entre los vectores $\hat{n}$ y $\vec{B}$.

$\hat{n}$ es el vector unitario que identifica el plano de la espira. Su dirección es perpendicular al plano de la espira y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha. Esto es, al curvar los dedos alrededor de las espiras de forma que apunten en el sentido de la corriente, el pulgar señala la dirección y sentido de $\hat{n}$.

Si en lugar de una sola espira hay una bobina compuesta por N espiras, el momento de fuerza sufrido por la bobina es:

$$\vec{\tau} = N \cdot I \cdot A \cdot \hat{n} \times \vec{B}$$

Y en módulo:

$$\tau = N \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Se define el momento dipolar magnético $\vec{m}$:

$$\vec{m} = N \cdot I \cdot A \cdot \hat{n}$$

En función del momento dipolar magnético, el momento de fuerza se expresa:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

El efecto del momento de fuerza es el de orientar el momento magnético $\vec{m}$ en la dirección de $\vec{B}$.

21.3. FUERZAS ENTRE CORRIENTES

Las corrientes se ejercen fuerzas, de atracción o repulsión, entre sí. Dos corrientes en el mismo sentido se atraen mientras que dos corrientes con sentidos opuestos se repelen.

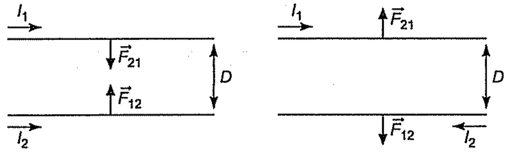


Figura 21.8

La interacción entre corrientes puede interpretarse como la interacción entre un campo magnético y una corriente.

La Figura 21.9 es una vista frontal de dos corrientes infinitas, rectilíneas y paralelas con el mismo sentido separadas una distancia D. En ella se muestra el campo magnético, $\vec{B}_1$, que la corriente I_1 crea sobre la corriente I_2 y la dirección y sentido de la fuerza aplicada sobre el conductor 2, $\vec{F}_{12}$.

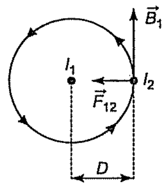


Figura 21.9

El campo creado por la corriente rectilínea e infinita I_1 a una distancia D es:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D}$$

Aplicando la expresión de la fuerza de Lorentz se obtiene la fuerza que la corriente I_1 crea sobre I_2 ($\vec{F}_{12}$):

$$\vec{F}_{12} = I_2 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_1$$

La Figura 21.10 es una vista superior de las dos corrientes, el campo magnético creado por la corriente I_1 y la fuerza aplicada sobre la corriente I_2.

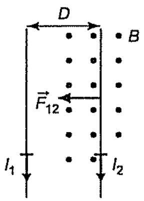


Figura 21.10

El módulo de la fuerza $\vec{F}_{12}$ es:

$$F_{12} = I_2 \cdot l \cdot B = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D} \cdot \text{sen}\,(\pi/2) = l \cdot \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi D}$$

Como el cable conductor de las corrientes es infinito, $l = \infty$, la fuerza sería infinita. Para salvar esto, se calcula la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F_{12}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2}{D}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

21.1. Una carga puntual $q = 2{,}0 \cdot 10^2\ \mu C$ tiene una masa $m = 6{,}0 \cdot 10^{-6}\ g$. Se mueve con una velocidad $v = 4{,}0 \cdot 10^2$ m/s $\hat{\imath}$ y entra en una región del espacio en la que se establece en un preciso instante un campo magnético $B = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ T $\hat{\jmath}$. Determinar:

a) La fuerza magnética que se aplica sobre la carga en el instante en el que se establece el campo magnético.

b) El radio de la trayectoria descrita por la carga.

c) Las revoluciones que dará la carga en un segundo.

Solución

a) La fuerza magnética sobre la carga en movimiento es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\ C \cdot (4{,}0 \cdot 10^2 \text{ m/s } \hat{\imath}) \times (5{,}0 \cdot 10^{-3}\ T \hat{\jmath})$$

$$\vec{F} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\ C \cdot 2{,}0\ \frac{\text{m} \cdot \text{T}}{\text{s}}\ \hat{k} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ N\ \hat{k}$$

$$\vec{F} = 4{,}0 \cdot 10^2\ \mu N\ \hat{k}$$

b) El radio de la trayectoria descrita por la carga es:

$$R = \frac{m\,v}{qB} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-9}\text{ kg} \cdot 4{,}0 \cdot 10^2\text{ m/s}}{2{,}0 \cdot 10^{-4}\ C \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ T} = 2{,}4\text{ m}$$

c) Las revoluciones que da la carga por segundo son la frecuencia de rotación:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-4}\ C \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ T}{2\pi \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-9}\text{ kg}} = 27\ Hz$$

Lo cual indica que en un segundo la carga realiza 27 revoluciones.

21.2. Una carga puntual $q = 2{,}0 \cdot 10^2\ \mu$C tiene una masa $m = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ mg. Se mueve con una velocidad $v = 4{,}0 \cdot 10^2$ m/s $\hat{\imath}$ + $3{,}0 \cdot 10^2$ m/s $\hat{\jmath}$ y entra en una región del espacio en la que se establece en un preciso instante un campo magnético $B = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ T $\hat{\jmath}$. Determinar:

a) La fuerza magnética que se aplica sobre la carga en el instante en el que se establece el campo magnético.

b) La trayectoria subsiguiente de la carga.

Solución

a) La fuerza magnética sobre la carga en movimiento es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\, C \cdot (4{,}0 \cdot 10^{2}\, m/s\, \hat{i} + 3{,}0 \cdot 10^{2}\, m/s\, \hat{j}) \times (5{,}0 \cdot 10^{-3}\, T\, \hat{j})$$

$$\vec{F} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\, C \cdot 2{,}0\, \frac{\mathrm{m \cdot T}}{\mathrm{s}}\, \hat{k} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\, N\, \hat{k}$$

$$\vec{F} = 4{,}0 \cdot 10^{2}\, \mu N\, \hat{k}$$

Resultado que coincide con el del apartado *a)* del Ejercicio 21.1.

Una carga cuya velocidad sea paralela al campo magnético no sufre fuerza alguna. La diferencia entre este ejercicio y el 21.1 radica en que en esta ocasión la velocidad de la carga tiene una componente paralela al campo magnético. ¿Qué efecto tiene la presencia de esta componente paralela al campo magnético?, veámoslo en el apartado siguiente.

b) Al introducirse la carga en el seno del campo magnético, ésta sufre una fuerza que hace cambiar la dirección y el sentido de la componente de la velocidad que es perpendicular a $\vec{B}$ ($\vec{v}_{\perp}$ en el dibujo inferior), pero no de la componente de la velocidad paralela a $\vec{B}$ ($\vec{v}_{\parallel}$ en el dibujo inferior).

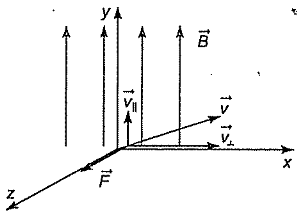


Figura 21.11

Si la componente de la velocidad paralela al campo magnético se mantiene constante, habrá un movimiento uniforme en su dirección. Por otro lado, la fuerza magnética provoca un movimiento circular:

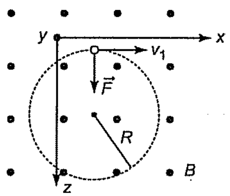


Figura 21.12

El radio de esta trayectoria circular es:

$$R = \frac{m\,v}{qB} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{2}\,\mathrm{m/s}}{2{,}0 \cdot 10^{-4}\, C \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\, T} = 2{,}4\ \mathrm{m}$$

Donde sólo se ha tenido en cuenta la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético.

La composición del movimiento circular con el movimiento uniforme es un movimiento helicoidal, donde se puede definir un *paso de hélice* (*h*), que es la distancia recorrida en la dirección del campo magnético en el tiempo en que la carga da una revolución completa, es decir, en un periodo:

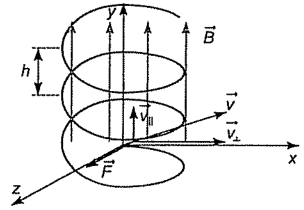


Figura 21.13

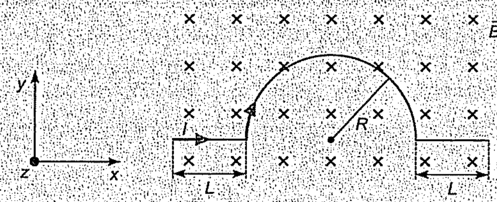
Para determinar el paso de hélice, tendremos en cuenta que la componente de la velocidad paralela al campo magnético es la componente *y*:

$$h = v_y \cdot T$$

$$h = v_y \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \frac{3{,}0 \cdot 10^{2}\, m/s\; 2\pi \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg}}{2{,}0 \cdot 10^{-4}\, C \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\, T}$$

$$h = 11\ \mathrm{m}$$

21.3. Un conductor está compuesto por dos tramos rectilíneos de longitud L unidos entre sí por un tercer tramo en forma de semicircunferencia de radio R. El conjunto está inmerso en el seno de un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, perpendicular al plano definido por el conductor. Determinar la fuerza magnética aplicada sobre el conductor.



Solución

Sobre los tramos rectilíneos, la fuerza que hace el campo magnético tiene la dirección y el sentido resultante de aplicar la regla de la mano derecha:

$$\vec{F}_1 = I\vec{L} \times \vec{B} = IL\,\hat{i} \times (-B\,\hat{k}) = ILB\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_3 = I\vec{L} \times \vec{B} = IL\,\hat{i} \times (-B\,\hat{k}) = ILB\,\hat{j}$$

Para hallar la fuerza sobre el tramo curvilíneo, se va a calcular primero la fuerza aplicada sobre un pequeño elemento de corriente:

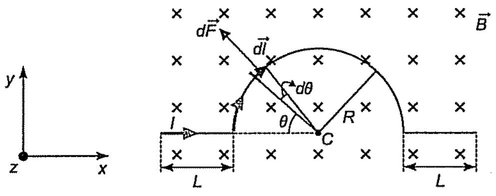


Figura 21.15

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

El módulo de la fuerza aplicada sobre un elemento de corriente $d\vec{l}$ es:

$$dF = I \cdot dl \cdot B$$

Si se tiene en cuenta que $dl = R \cdot d\theta$, entonces:

$$dF = I \cdot R \cdot d\theta \cdot B$$

Dada la simetría del elemento conductor curvilíneo, cualquier elemento de corriente tiene un simétrico respecto de la vertical que pasa por el centro C. Dicha simetría hace que se cancelen las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sobre el tramo curvilíneo.

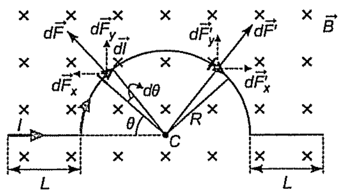


Figura 21.16

La fuerza total sobre el tramo curvilíneo será la suma de las componentes verticales:

$$F_2 = \int dF_y = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} IRB \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = 2\, IRB \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = 2\, IRB\, [-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$F_2 = 2\, IRB$$

Y su dirección y sentido es:

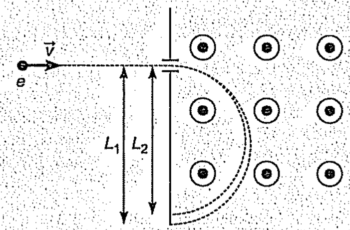
$$\vec{F}_2 = 2\, IRB\, \hat{j}$$

Para finalizar, la fuerza total sobre todo el conductor es:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = ILB\,\hat{j} + 2\, IRB\,\hat{j} + ILRB\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_T = I\,(2L + 2R)\, B\,\hat{j}$$

21.4. En un espectrómetro de masas entran dos tipos de iones con igual carga $(+e)$ y energía cinética $E_c = 1{,}2$ *ke*V. En el espectrómetro hay un campo magnético B de valor 0,80 T perpendicular a la velocidad de desplazamiento de los iones. Éstos impactan en una película detectora después de describir media circunferencia en dos posiciones diferentes: $L_1 = 77{,}22$ mm y $L_2 = 75{,}16$ mm.



a) Calcular la velocidad con la que entran cada uno de los dos tipos de iones en el espectrómetro.

b) Calcular la masa de cada uno de los tipos de iones.

c) Calcular el tiempo t que tarda cada tipo de partícula en describir la media circunferencia.

Se desea que entren al espectrómetro solamente los iones de menor masa, para ello se coloca un selector de velocidades en la entrada del mismo. Si el campo magnético en el selector tiene la misma dirección y sentido que en el espectrómetro y su valor es de 0,20 T:

d) Hallar el valor y la dirección del campo eléctrico que debe haber entre placas del condensador.

Solución

a) Velocidad de los iones:

El radio de la trayectoria de los iones en el espectrómetro es: $R = \dfrac{mv}{eB}$. Si se sustituye la masa en función de la energía cinética: $m = \dfrac{2 \cdot E_c}{v^2}$.

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{\dfrac{2 \cdot E_c}{v^2}\, v}{eB} = \frac{2E_c}{eBv}$$

$$v = \frac{2E_c}{eBv} \begin{cases} v_1 = \dfrac{2E_c}{eBR_1} = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0{,}80\, T \cdot 77{,}22 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{m}} = 3{,}88 \cdot 10^4 \text{ m/s} \\[2ex] v_2 = \dfrac{2E_c}{eBR_2} = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0{,}80\, T \cdot 75{,}16 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{m}} = 3{,}99 \cdot 10^4 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$v_1 = 3{,}9 \cdot 10^4 \text{ m/s} \qquad v_2 = 4{,}0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

b) La masa de cada uno de los iones es:

$$m = \frac{2 \cdot E_c}{v^2} \begin{cases} m_1 = \dfrac{2 \cdot E_c}{v_1^2} = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{(3{,}88 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2} = 2{,}55 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \\ m_2 = \dfrac{2 \cdot E_c}{v_2^2} = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{(3{,}99 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2} = 2{,}41 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \end{cases}$$

$$m_1 = 2{,}6 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \qquad m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

c) El tiempo que los iones tardan en describir media circunferencia es:

$$t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{m_1}{eB} = \pi \frac{2{,}55 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0{,}80\, T} = 6{,}26 \cdot 10^{-6}\, s = 6{,}3\, \mu s$$

$$t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{m_2}{eB} = \pi \frac{2{,}41 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0{,}80\, T} = 5{,}92 \cdot 10^{-6}\, s = 5{,}9\, \mu s$$

$$t_1 = 6{,}3\, \mu s \qquad t_2 = 5{,}9\, \mu s$$

d) Los iones de menor masa tienen una velocidad $v = 3{,}99 \cdot 10^4$ m/s.

Los iones que atraviesan un selector de velocidad sin desviarse de su trayectoria cumplen la siguiente relación entre su velocidad y los campos eléctricos y magnéticos del selector:

$$v = \frac{E}{B}$$

Por tanto, el campo eléctrico del selector debe tener un valor:

$$E = v\, B = 3{,}99 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 0{,}20\, T = 7{,}98 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$E = 8{,}0 \text{ kV/m}$$

El campo eléctrico es perpendicular al vector velocidad y al campo magnético. Su dirección y sentido se indica en la Figura 21.18:

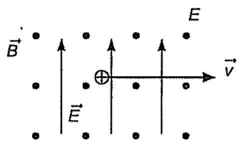


Figura 21.18

21.5. Una bobina cuadrada de lados $a = 8{,}0$ cm y $b = 10$ cm por la que pasa una corriente I = 50 mA, se halla contenida en el plano *yz*. La bobina tiene $8{,}0 \cdot 10^2$ espiras y se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme $B = 0{,}40 \text{ T}\, \hat{i} + 0{,}30 \text{ T}\, \hat{j}$.

Determinar:

a) El módulo del momento magnético de la espira.

b) El módulo del momento de fuerza que actúa sobre la bobina.

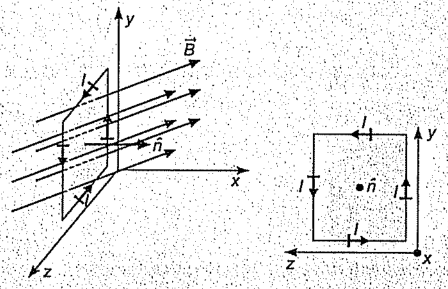


Figura 21.19

Solución

a) El módulo del momento magnético *m* de la espira es:

$$\text{m} = N \cdot I \cdot A = 8{,}0 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} A \cdot (8{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m})$$

$$m = 0{,}32 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

b) El módulo del momento de fuerza, $\vec{\tau} = \vec{m} \times B$, es:

$$\tau = N \cdot I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \text{sen}\, \alpha$$

Donde α es el ángulo formado entre el campo magnético y el vector que define el plano de la bobina. En este caso, es el ángulo definido entre los vectores $\hat{i}$ y $\vec{B}$.
El ángulo entre el vector $\hat{i}$ y $\vec{B}$ es: 0,643 rad = 37°
Por tanto:

$$\tau = N \cdot I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \text{sen}\, \alpha$$

$$\tau = 8{,}0 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3} A \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0{,}50\, T \cdot \text{sen } 37°$$

$$\tau = 9{,}6 \cdot 10^{-2}\, Nm$$

21.6. Por una bobina cuadrada de 4,0 cm de lado que tiene 50 espiras pasa una corriente de 80 mA. La bobina se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme de 0,50 T tal y como muestra la Figura 21.20.

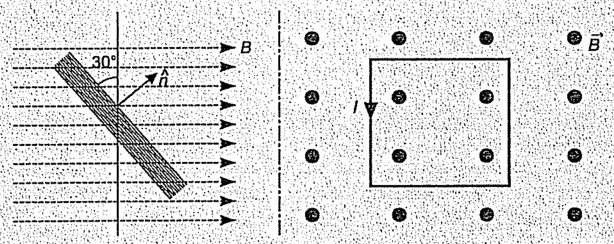


Figura 21.20

Determinar:

a) El par de fuerza sobre una de las espiras de la bobina.

b) El módulo momento magnético de la bobina.

c) El módulo del par de fuerza aplicado sobre la bobina y el sentido de giro de la bobina.

Solución

a) El momento de fuerza aplicado sobre una de las espiras es:

$$\tau = I \cdot A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Es fácil comprobar que el ángulo formado entre el vector B y el vector unitario definido por las espiras es de 30°:

$$\tau = 80 \cdot 10^{-3} A \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 0{,}50\ T \cdot \text{sen}\ 30°$$

$$\tau = 32 \cdot 10^{-6}\ \text{Nm}$$

b) El módulo del momento magnético de la bobina es:

$$\text{m} = N \cdot I \cdot A$$

$$\text{m} = 50 \cdot 80 \cdot 10^{-3} A \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\text{m} = 6{,}4 \cdot 10^{-3} A \cdot \text{m}^2$$

c) El módulo del par de fuerza aplicado sobre la bobina es:

$$\tau_{Bobina} = N \cdot \tau_{espira}$$

$$\tau_{Bobina} = 50 \cdot 32 \cdot 10^{-6} Nm$$

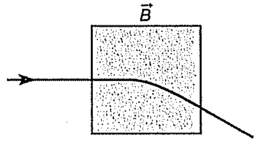
$$\tau_{Bobina} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} Nm$$

Tomando como referencia el dibujo de la izquierda de la Figura 21.20, la bobina gira en sentido horario, de forma que el vector $\hat{n}$ se orienta paralelo a $\vec{B}$.

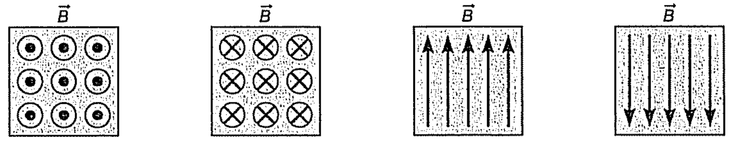
CUESTIONES

FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE CARGAS PUNTUALES

21.1. Un haz de protones tiene una trayectoria de izquierda a derecha. Al pasar por una zona del espacio en la que hay un campo magnético $\vec{B}$ constante, su trayectoria se curva, tal y como se indica en la figura. La dirección del campo magnético $\vec{B}$ es:



a) *b)* *c)* *d)*



21.2.1. Un protón ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) con velocidad $\vec{v} = 3{,}0 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\ \hat{\imath}$ entra en una zona del espacio en la que hay un campo magnético $\vec{B} = 0{,}40\text{T}\ \hat{k}$. La fuerza que experimentará el protón al entrar en la zona con campo magnético será:

a) $1{,}9 \cdot 10^{-17}\ \text{N}\ \hat{\jmath}$ *c)* Cero.

b) $-1{,}9 \cdot 10^{-17}\ \text{N}\ \hat{\jmath}$ *d)* $1{,}9 \cdot 10^{-17}\ \text{N}\ \hat{\imath}$

21.2.2. La trayectoria que describirá este protón será:

a) Helicoidal.

b) Circular en un plano paralelo al plano xy.

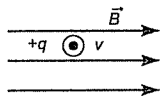
c) Circular en un plano paralelo al plano xz.

d) Recta en la dirección del eje x.

21.3. Una carga de $2{,}0 \cdot 10^2\ \mu$C, $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ g de masa y módulo de velocidad $v = 5{,}0 \cdot 10^4$ m/s se introduce en una zona del espacio en la que hay un campo magnético de 0,50 T que es perpendicular al vector velocidad. El radio de la trayectoria que describe la carga es:

a) 10 km *b)* 10 m *c)* 0 *d)* 10 mm

21.4. Una carga eléctrica $+q$ se mueve perpendicularmente al plano del papel y hacia fuera en un campo magnético $\vec{B}$ según muestra la figura. La fuerza magnética que actúa sobre la carga:



a) Tiene un módulo $F = qvB$ y está dirigida hacia arriba.

b) Es nula.

c) Tiene un módulo $F = qvB$ y está dirigida hacia abajo.

d) Tiene un módulo $F = qvB$ y está dirigida hacia la izquierda.

21.5. Dos partículas cargadas se mueven en un campo magnético con trayectorias circulares de radios iguales. Es correcto afirmar que:

a) Las partículas tienen la misma carga.

b) Las partículas tienen la misma velocidad.

c) Las partículas tienen la misma masa.

d) Si las partículas tienen la misma relación masa/carga, tienen la misma velocidad.

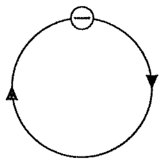
21.6.1. Una carga q de 10 μC se desplaza con velocidad $\vec{v} = 1{,}0 \cdot 10^4$ m/s $\hat{i}$. Si en la zona del espacio donde se mueve la carga se aplica un campo magnético $\vec{B} = 0{,}10$ T $\hat{j}$, el módulo de la fuerza que sufriría la carga tendría un valor:

a) $F = 0$ *b)* $F = 1{,}0 \cdot 10^4$ N *c)* $F = 1{,}0$ N *d)* $F = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ N

21.6.2. La fuerza que sufriría la carga q sería paralela al vector:

a) $\hat{k}$ *b)* $\hat{i}$ *c)* $-\hat{i}$ *d)* j

21.7. Un electrón se mueve en campo magnético $\vec{B}$ describiendo una trayectoria circular situada en el plano de la figura en el sentido de las agujas del reloj. El campo magnético $\vec{B}$ debe:



a) Ser constante y perpendicular al plano del papel y dirigido papel adentro.

b) Ser constante y perpendicular al plano del papel y dirigido papel afuera.

c) Tener dirección variable de forma que en cada punto la fuerza que actúa sobre el electrón sea perpendicular a la trayectoria.

d) Tener un valor intenso al principio y estar dirigido papel afuera para que el electrón comience a girar y luego se anule.

21.8. Un electrón que se desplaza con velocidad v, entra en una región del espacio donde hay un campo magnético B constante. El electrón realiza un movimiento helicoidal. Es correcto afirmar que:

a) Los vectores v y B son paralelos.

b) Los vectores v y B son perpendiculares.

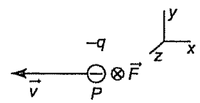
c) El vector v debe tener una componente en la dirección del campo magnético B, y una componente en la dirección perpendicular a ésta.

d) Es imposible que un electrón dentro de un campo magnético describa una trayectoria helicoidal.

21.9. Un protón ($m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg) tiene una velocidad $v = 6{,}0 \cdot 10^7$ m/s. La carga se mueve transversalmente (perpendicularmente) respecto a un campo de 1,5 T. El radio de la trayectoria descrita por la partícula es:

a) $R = 2{,}5$ m *b)* $R = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ m *c)* $R = 8{,}3 \cdot 10^4$ m *d)* $R = 0{,}40$ m

21.10. En el punto P se encuentra una carga negativa $-q$ que se mueve, dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B}$, con la velocidad v indicada en la figura. Sobre la carga actúa un fuerza magnética, $\vec{F}$, perpendicular al plano del papel y dirigida papel adentro. El vector unitario que define la dirección y el sentido del campo magnético es:



a) $\hat{j}$ *b)* $-\hat{j}$ *c)* $\hat{k}$ *d)* $-\hat{k}$

21.11.1. Un electrón ($q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) se mueve con velocidad $\vec{v} = 2{,}0 \cdot 10^5$ m/s $\hat{i}$ en el seno de un campo magnético $\vec{B} = 0{,}50$ T $\hat{k}$. La fuerza que el campo magnético hace sobre el electrón es igual a:

a) $-1{,}6 \cdot 10^{-14}$ N $\hat{j}$ *c)* 0

b) $1{,}6 \cdot 10^{-14}$ N $\hat{j}$ *d)* $1{,}6 \cdot 10^{-14}$ N $\hat{i}$

21.11.2. La energía cinética del electrón:

a) Disminuirá porque la fuerza que hace el campo magnético sobre el electrón lo frenará y reducirá su velocidad.

b) Variará, pero con los datos del problema no podemos afirmar si aumentará o disminuirá.

c) Se mantendrá constante.

d) Aumentará porque la fuerza que hace el campo magnético acelerará el electrón y su velocidad aumentará.

21.12. Es cierto que un campo magnético uniforme, desde el punto de vista energético:

a) Puede incrementar la energía cinética de una partícula cargada.

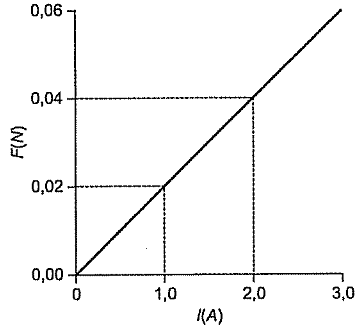
b) Puede disminuir la energía cinética de una partícula cargada.

c) No altera en absoluto la energía cinética de la partícula.

d) Lleva asociado una energía potencial magnética.

FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO SOBRE CORRIENTES

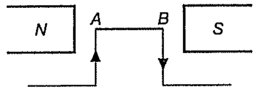
21.13. Una experiencia de laboratorio consiste en colocar un hilo de longitud 0,10 m perpendicularmente a las líneas de campo de un campo magnético uniforme, hacer pasar distintas corrientes por el hilo y medir las distintas fuerzas que actúan sobre el hilo. Al representar los valores de F frente a I se obtiene la gráfica de la figura. De la gráfica se obtiene el módulo del campo magnético B que resulta ser:



a) 0,20 T *c)* $20 \cdot 10^{-3}$ T

b) 0,10 T *d)* Con esta experiencia no puede hallarse el módulo de $\vec{B}$.

21.14. Un conductor AB, cuya longitud es $L = 25$ cm, y por el que circula una corriente de $I = 3{,}0$ A, se encuentra colocado en un campo magnético uniforme $B = 0{,}20$ T, existente entre los polos de un electroimán. La fuerza magnética que actúa sobre el conductor:



a) Es nula.

b) Vale $F = 0{,}15$ N y está dirigida el lado superior del papel.

c) Vale $F = 0{,}15$ N y está dirigida el lado inferior del papel.

d) Vale $F = 0{,}50$ N y está dirigida el lado superior del papel.

SELECTOR DE VELOCIDADES

21.15. Una carga de $-1{,}0 \cdot 10^2$ μC atraviesa, sin desviar su trayectoria, un selector de velocidades constituido por un campo eléctrico y un campo magnético cruzados 90° convenientemente. Sus valores son: $E = 1{,}0 \cdot 10^4$ V/m, $B = 0{,}20$ T. La velocidad de la carga es:

a) $v = 5{,}0 \cdot 10^4$ m/s *c)* $v = 1{,}0 \cdot 10^2$ m/s

b) $v = 2{,}0 \cdot 10^3$ m/s *d)* $v = 0$

21.16. De un selector de velocidades salen iones positivos a una velocidad de $1{,}0 \cdot 10^5$ m/s $\hat{\imath}$. El campo eléctrico en el interior del selector es de $1{,}0 \cdot 10^4$ N/C $\hat{\jmath}$. El valor del campo magnético del selector será:

a) -10 T $\hat{\jmath}$ *b)* 10 T $\hat{k}$ *c)* $-0{,}10$ T $\hat{\jmath}$ *d)* 0,10 T $\hat{k}$

21.17. Un electrón cuya velocidad es $\vec{v} = 4{,}0 \cdot 10^7$ m/s $\hat{\jmath}$ penetra en una región donde hay un campo eléctrico $\vec{E} = -1{,}0 \cdot 10^4$ V/m $\hat{k}$ y otro magnético del que se desconoce su módulo y dirección. ¿Cuál debe ser el valor del campo magnético capaz de lograr que el electrón mantenga el movimiento horizontal en presencia de ambos campos?

a) $\vec{B} = -2{,}5 \cdot 10^{-4}$ T $\hat{\imath}$ *c)* $\vec{B} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ T $\hat{\imath}$

b) $\vec{B} = 4{,}0 \cdot 10^3$ T $\hat{\imath}$ *d)* $\vec{B} = -4{,}0 \cdot 10^3$ T $\hat{\imath}$

21.18. Un selector de velocidad está formado por dos placas paralelas de 2,0 mm de separación con una diferencia de potencial de 1,6 kV. Perpendicular al campo eléctrico establecido entre placas y a la dirección del desplazamiento de los iones que pasan por el selector hay un campo magnético de 0,40 T. Respecto a los iones que pasan por el selector podemos afirmar que:

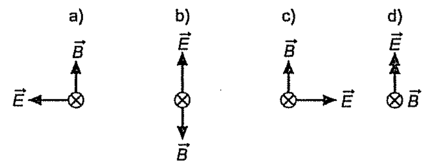
a) Todos los iones que pasan por el selector adquieren una velocidad $v = 2{,}0 \cdot 10^6$ m/s.

b) Si los iones tienen diferente masa, el cambio en su trayectoria dependerá del valor de su masa.

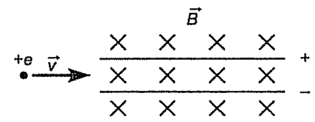
c) Los iones con velocidad $v = 2{,}0 \cdot 10^6$ m/s no desviarán su trayectoria.

d) Todos los iones con velocidad superior a $v = 2{,}0 \cdot 10^6$ m/s no se desviarán al pasar por el selector.

21.19. Un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ actúan sobre un protón que se mueve perpendicularmente al plano del papel y papel adentro. Para que el protón no modifique su trayectoria, el campo eléctrico y el campo magnético deben estar dirigidos:



21.20. En la figura se muestra una partícula de masa m, velocidad v y carga e que pasa por un selector de velocidades sin variar su trayectoria. Si a continuación se hacen pasar partículas que tuviesen carga de un electrón:



a) No sufrirían variación de trayectoria.

b) No sufrirían variación de trayectoria únicamente si tienen la misma masa.

c) Se desplazarían hacia arriba

d) Al tener la carga diferente signo, la fuerza eléctrica F_E cambia de sentido y tendrá el mismo que la fuerza magnética F_B.

21.21. Un selector de velocidades, para las partículas que lo atraviesen, es aquel sistema en el que:

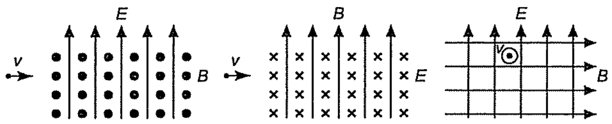
a) Las cargas con idéntica energía, independientemente de su carga y masa, lo atraviesan sin variar su trayectoria.

b) Las cargas con idéntica velocidad, independientemente de su carga y masa, lo atraviesan sin variar su trayectoria.

c) Las cargas con idéntica carga, independientemente de su velocidad y masa, lo atraviesan sin variar su trayectoria.

d) Las cargas con idéntica masa, independientemente de su carga y energía, lo atraviesan sin variar su trayectoria.

21.22. Un selector de velocidades es aquel sistema formado por un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí. Pero no todo sistema de campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí constituyen un selector de velocidades. De los siguientes sistemas, indicar cuál no es un selector de velocidad:



a) *b)* *c)* *d)* Ninguno de los anteriores.

ESPECTRÓMETRO DE MASAS

21.23.1. Una muestra que contiene tres isótopos de hidrógeno se inyecta en un espectrómetro de masas. La muestra la forman $^1H^+$ con masa $m_1 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $^2H^+$ con masa $m_2 = 3{,}35 \cdot 10^{-27}$ kg y $^3H^+$ con masa $m_3 = 5{,}02 \cdot 10^{-27}$ kg. La velocidad es la misma, $v = 5{,}0 \cdot 10^4$ m/s, para los tres tipos de iones. Respecto a los radios de curvatura de las trayectorias de los iones, es correcto afirmar que:

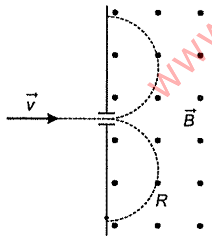
a) $r_1 = r_2 = r_3$ *b)* $r_1 < r_2 < r_3$ *c)* $r_1 > r_2 > r_3$ *d)* $r_2 < r_1 < r_3$

21.23.2. Respecto a los periodos de rotación de los iones, es correcto afirmar que:

a) $T_1 = T_2 = T_3$ *b)* $T_1 < T_2 < T_3$ *c)* $T_1 > T_2 > T_3$ *d)* $T_2 < T_1 < T_3$

21.24.1. Un espectrómetro de masas se prepara para que entren dos tipos de partículas con idéntica energía. Inicialmente se introducen partículas con carga positiva (e) y a continuación se repite la experiencia con partículas de carga negativa ($-e$). Las cargas positivas tienen diferente masa que las negativas.

En el espectrómetro hay un campo magnético B de valor 0,80 T perpendicular a la velocidad de desplazamiento de los iones. Las trayectorias de cada partícula serán:



a) De idéntico radio y hacia abajo.

b) De diferente radio, la carga positiva hacia arriba y la negativa hacia abajo.

c) De idéntico radio y hacia arriba.

d) De diferente radio, la carga positiva hacia abajo y la negativa hacia arriba.

21.24.2. El tiempo t que tarda cada tipo de partícula en describir la media circunferencia hasta colisionar con el detector del espectrómetro es:

a) Idéntico para ambas partículas.

b) Mayor para el de mayor masa.

c) Dependerá de la velocidad de cada carga.

d) Menor para el de mayor masa.

21.25. Si una partícula con la carga de un protón y masa $m = 75{,}2 \cdot 10^{-26}$ kg al entrar en el espectrómetro (en el que hay un campo B de 0,80 T) describe una circunferencia de radio $R = 37{,}6$ mm, la velocidad con la que ha entrado al espectrómetro es:

a) $v = 6{,}4 \cdot 10^7$ m/s *c)* $v = 8{,}0 \cdot 10^3$ m/s

b) $v = 1{,}3 \cdot 10^5$ m/s *d)* $v = 6{,}4 \cdot 10^3$ m/s

PAR DE FUERZA SOBRE ESPIRAS

21.26. Una bobina cuadrada de 4,0 cm de lado tiene 50 espiras. La corriente que pasa por la bobina es de 80 mA. El módulo del momento magnético $\vec{m}$ de la bobina es:

a) 0 *b)* $6{,}4 \cdot 10^{-3}$ A · m² *c)* $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ A · m² *d)* 64 A · m²

21.27.1. El momento magnético de una espira rectangular es $\vec{m} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ A · m² $\hat{j}$. Si se coloca la espira en el interior de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 0{,}15$ T $\hat{i} + 0{,}23$ T $\hat{j}$, el valor de la fuerza resultante que actúa sobre la espira es:

a) No hay suficientes datos para realizar el cálculo.

b) 0

c) $6{,}9 \cdot 10^{-4}$ N $\hat{k}$

d) $-3{,}8 \cdot 10^{-4}$ N $\hat{k}$

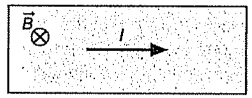
21.27.2. El momento de fuerza que actua sobre la espira es:

a) 0 *c)* $-3{,}8 \cdot 10^{-4}$ N · m $\hat{k}$

b) $-5{,}7 \cdot 10^{-4}$ N · m $\hat{k}$ *d)* No hay suficientes datos para realizar el cálculo.

EFECTO HALL

21.28. Consideremos una placa situada en el interior de un campo magnético, a través de la cual circula una intensidad de corriente I tal y como indica la figura. Es correcto afirmar que:



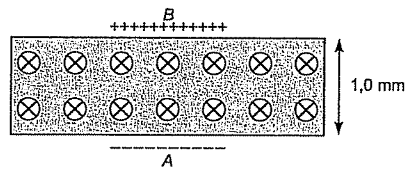
a) Los portadores de carga siempre se situarán en la parte superior de la placa.

b) Solamente cuando los portadores de carga sean positivos se situarán en la parte inferior de la cinta.

c) Solamente cuando los portadores de carga sean negativos se situarán en la parte superior de la cinta.

d) Los portadores de carga nunca se situarán en la parte superior de la placa.

21.29. En el interior de un campo magnético constante ($B = 0{,}10$ T), hay una cinta metálica de 1,0 mm de espesor por la que pasa una corriente. Si entre los puntos A y B hay una diferencia de potencial $V_B - V_A = 3{,}45$ nV, se puede afirmar que:



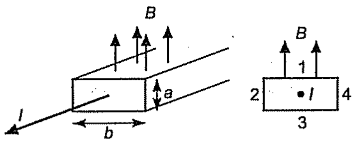
a) La intensidad circula de izquierda a derecha y los portadores de carga se mueven con velocidad $v = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ m/s.

b) La intensidad circula de izquierda a derecha y los portadores de carga se mueven con velocidad $v = 2{,}8 \cdot 10^4$ m/s.

c) La intensidad circula de derecha a izquierda y los portadores de carga se mueven con velocidad $v = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ m/s.

d) La intensidad circula de derecha a izquierda y los portadores de carga se mueven con velocidad $v = 2{,}8 \cdot 10^4$ m/s.

21.30. En la figura se muestra un conductor a través del cual circula una intensidad de corriente I. El conductor está en el interior de un campo magnético de valor $B = 0{,}40$ T. Si los portadores de carga del conductor son negativos:



a) Se creará una diferencia de potencial entre los puntos 1 y 3, $V_1 > V_3$.

b) Se creará una diferencia de potencial entre los puntos 1 y 3, $V_1 < V_3$.

c) Se creará una diferencia de potencial entre los puntos 2 y 4, $V_2 > V_4$.

d) Se creará una diferencia de potencial entre los puntos 2 y 4, $V_2 < V_4$.

FUERZAS ENTRE CORRIENTES

21.31. Por dos conductores rectilíneos infinitamente largos y paralelos, circula una intensidad de corriente I. El campo magnético total en el punto intermedio de los conductores es cero. La fuerza que se ejercerán los dos hilos conductores anteriores será:

a) Cero.

b) Atractiva.

c) Repulsiva.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

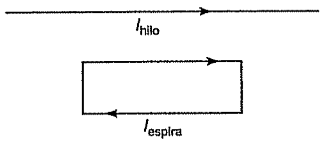
21.32. Un hilo conductor infinitamente largo está próximo a una espira de corriente tal y como indica la figura. La fuerza que se ejercen los dos conductores es:

a) Repulsiva.

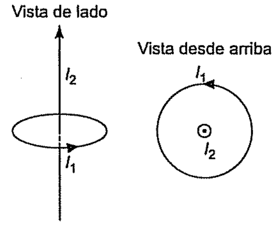
b) Cero.

c) Puede ser atractiva o repulsiva dependiendo de los valores de las intensidades de corriente.

d) Atractiva.



21.33. Un conductor infinitamente largo a través del cual circula una corriente $I_2 = 6{,}0$ A, atraviesa perpendicularmente el plano de una espira de corriente de radio 2,0 cm por su centro. Si la corriente que pasa por la espira es $I_1 = 1{,}0$ A, ¿cuál es la fuerza que se hacen el conductor rectilíneo y la espira de corriente?



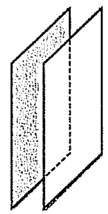
a) 0

b) $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ N

c) $1{,}9 \cdot 10^{-4}$ N $\cdot\, m^{-1}$

d) $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ N

21.34. Consideremos las dos espiras de corriente, paralelas, de la figura. Es correcto afirmar que:



a) No se repelerán nunca, independientemente de los sentidos de las corrientes de las espiras.

b) Se repelerán siempre, independientemente de los sentidos de las corrientes de las espiras.

c) Se repelerán cuando la corriente tenga el mismo sentido en las dos espiras.

d) Se repelerán cuando la corriente tenga distinto sentido en las dos espiras.

SOLUCIONES

21.1. *a)*	**21.9.** *d)*	**21.18.** *c)*	**21.26.** *b)*
21.2.1. *b)*	**21.10.** *b)*	**21.19.** *a)*	**21.27.1.** *b)*
21.2.2. *b)*	**21.11.1.** *b)*	**21.20.** *a)*	**21.27.2.** *c)*
21.3. *b)*	**21.11.2.** *c)*	**21.21.** *b)*	**21.28.** *c)*
21.4. *a)*	**21.12.** *c)*	**21.22.** *c)*	**21.29.** *c)*
21.5. *d)*	**21.13.** *a)*	**21.23.1.** *b)*	**21.30.** *d)*
21.6.1. *d)*	**21.14.** *a)*	**21.23.2.** *b)*	**21.31.** *b)*
21.6.2. *a)*	**21.15.** *a)*	**21.24.1.** *d)*	**21.32.** *d)*
21.7. *a)*	**21.16.** *d)*	**21.24.2.** *b)*	**21.33.** *a)*
21.8. *c)*	**21.17.** *a)*	**21.25.** *d)*	**21.34.** *d)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

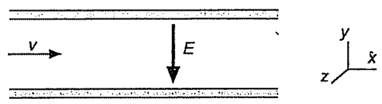
1 **Una carga puntual de 2,0 μC que se mueve con velocidad $\vec{v} = 50$ m/s $\hat{i}$ entra en una región del espacio donde hay un campo magnético $\vec{B} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ T $\hat{i} + 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ T $\hat{j}$.**

a) ¿Cuál es la fuerza que sentirá la carga puntual debida al campo magnético?

b) ¿Qué trabajo efectuará el campo magnético en el desplazamiento de la carga desde la posición $x = 0$ a la posición $x = 2{,}0$ m?

Sol.: a) $\vec{F} = 5{,}0 \cdot 10^{-7}$ N $\hat{k}$; *b)* 0

2 **Se hacen pasar iones de Cl^- a través del selector de velocidades de la figura. El campo eléctrico entre placas es $\vec{E} = -2{,}0 \cdot 10^2$ V m^{-1} $\hat{j}$. ¿Qué campo magnético debe haber para que los iones que entren al selector con una velocidad $\vec{v} = 4{,}0 \cdot 10^5$ m/s $\hat{i}$ no varíen su trayectoria?**



Sol.: $\vec{B} = -5{,}0 \cdot 10^{-4}$ T $\hat{k}$

3 **Un selector de velocidad está formado por dos placas paralelas de 2,0 mm de separación con una diferencia de potencial de 0,20 kV. Perpendicular al campo eléctrico establecido entre placas, y a la dirección del desplazamiento de las partículas que pasan por el selector hay un campo magnético de 0,40 T.**

a) ¿Cuál es la velocidad de las partículas que pasan por el selector sin desviar su trayectoria?

b) Si las partículas tienen una masa $m = 3{,}44 \cdot 10^{-22}$ kg, ¿cuál es la energía cinética con que entran al selector?

Sol.: a) $v = 2{,}5 \cdot 10^5$ m/s; *b)* $E_c = 6{,}7 \cdot 10^7$ eV

4 **Una fuente emite dos tipos de iones de uranio: iones ^{235}U con una masa $m_{235} = 3{,}903 \cdot 10^{-25}$ kg y carga e, y otros isótopos ^{238}U de masa $m_{238} = 3{,}953 \cdot 10^{-25}$ kg y con la misma carga. Los dos tipos de iones pasan por un selector de velocidades cuyo campo eléctrico y magnético tienen los valores $E = 9{,}000 \cdot 10^4$ V/m y $B_1 = 0{,}3000$ T.**

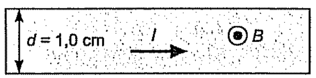
a) ¿Cuál es la velocidad de los iones que atraviesan el selector sin variar su trayectoria?

Seguidamente los iones entran en un espectrómetro de masas con un campo magnético $B_2 = 1{,}2$ T.

b) ¿Cuáles son los radios descritos por cada ión en el espectrómetro?

Sol.: a) $3{,}00 \cdot 10^5$ m/s; *b)* $r_{235} = 0{,}6098$ m, $r_{238} = 0{,}6177$ m

5 **La cinta conductora de la figura tiene 1,0 cm de ancho y transporta una corriente de 0,20 A. Cuando se introduce la cinta en el interior de un campo magnético de 1,25 T el campo Hall en el interior de la cinta es de $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ V/m.**

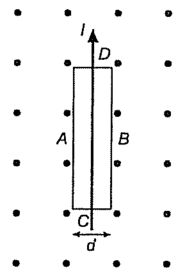


a) ¿Cuánto vale la tensión de Hall entre los extremos de la cinta?

b) ¿Cuál será la velocidad de los portadores de carga en el interior de la cinta?

Sol.: a) $V_H = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ V; *b)* $v = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ ms^{-1}

6 **Una sonda Hall se encuentra en la zona del espacio en la que hay un campo magnético uniforme, tal y como muestra la figura. La sonda tiene un espesor $d = 2{,}0$ mm. Si el sentido de la intensidad de corriente I que pasa por la sonda es la indicada en el dibujo, aparece una diferencia de potencial entre dos de sus caras de 42 nV. Los portadores de carga se desplazan a una velocidad de $3{,}5 \cdot 10^{-5}$ m/s en el conductor.**



a) Calcular el módulo del campo magnético.

b) Indicar el lado que se encuentra a mayor potencial.

Si el campo magnético está generado por una bobina de 8,3 cm de longitud por la que pasa una corriente de 10 A.

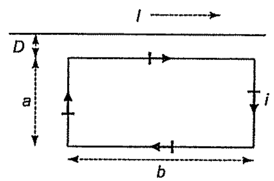
c) ¿Cuántas espiras tiene la bobina?

Sol.: a) $B = 0{,}60$ T; *b)* El lado A; *c)* N = 3963

7 **Un hilo conductor infinito por el que circula una corriente I se encuentra en el plano definido por una espira rectangular, tal y como indica la figura. Por la espira circula una intensidad I en sentido horario:**

a) Hallar la fuerza que el hilo infinito ejerce sobre cada uno de los lados de la espira y realizar un dibujo donde se muestren dichas fuerzas.

b) Hallar la fuerza total aplicada sobre la espira.



Datos: $D = 1{,}0$ cm, $a = 4{,}0$ cm, $b = 8{,}0$ cm, $I = 6{,}0$ A, $i = 4{,}0$ A.

Sol.: a) Lado superior: $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ N (atractiva), lado inferior: $0{,}77 \cdot 10^{-5}$ N (repulsiva), lado izquierdo: 7,7 μN hacia la izquierda, lado derecho: 7,7 μN hacia la derecha;
b) $F_T = 3{,}07 \cdot 10^{-5}$ N (atractiva)

CAPÍTULO 22

INDUCCIÓN MAGNÉTICA

22.1. FLUJO DE CAMPO MAGNÉTICO

El flujo de campo magnético a través de una superficie es proporcional al número neto de líneas de campo magnético que atraviesan dicha superficie.

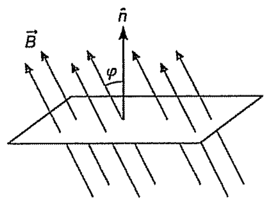


Figura 22.1

Se define el flujo de campo magnético a través de una superficie plana de área A como:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n} A = B \cdot A \cdot \cos \varphi$$

Donde A es el área de la superficie y $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular a la misma.

φ es el ángulo que forma el campo magnético $\vec{B}$ con $\hat{n}$. La unidad del flujo de campo magnético en el sistema internacional es:

$$[\Phi] = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{Wb}\ (\text{weber})$$

Si la superficie a través de la cual se quiere calcular el flujo de campo magnético no es plana, o el campo magnético no es uniforme:

$$\Phi_B = \int d\phi_B = \int B \cdot \hat{n}\, dA = \int B \cdot \cos\varphi \cdot dA$$

El flujo de campo magnético a través de una superficie que encierra un volumen es nulo. Las líneas de campo magnético no tienen ni principio ni fin y, en una superficie que encierra un volumen, el número de líneas de campo magnético que entran es idéntico al número de líneas de campo magnético que salen:

$$\Phi_B = \oint_S d\phi_B = 0$$

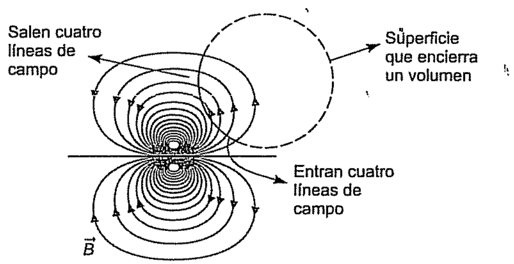


Figura 22.2

22.2. LEY DE FARADAY-LENZ

Si el flujo de campo magnético que atraviesa un circuito varía, se induce en éste una fuerza electromotriz inducida, ε (fem inducida). El valor de esta fem inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La unidad de la fuerza electromotriz inducida ε es el Volt:

$$[\varepsilon] = \mathrm{V}$$

El signo negativo de la ecuación anterior indica que la fuerza electromotriz se opone al cambio que la produce. Esta oposición se debe entender en el sentido de que la corriente inducida crea un campo magnético que se opone a la variación de flujo de campo magnético que la ha originado.

Como el módulo del flujo magnético es $\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n} A = B \cdot A \cdot \cos\varphi$, aparecerá una fuerza electromotriz inducida si:

— Hay una variación en el valor de A.
— Hay una variación en el módulo de B.
— Hay una variación en la orientación entre los vectores $\vec{B}$ y $\hat{n}$ dando lugar a un cambio del valor de φ.

La ecuación de la fuerza electromotriz inducida no precisa de la presencia de un circuito eléctrico. Esta ecuación se puede expresar en una forma mucho más general:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA\right)$$

22.3. FEM INDUCIDA POR MOVIMIENTO

Este es el caso de una fem inducida producida por la variación del área de un circuito.

Un circuito rectangular de lados a y l se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme perpendicular al plano definido por el circuito. El circuito está compuesto por un conductor fijo en forma de U y una barra rectilínea conductora que se puede desplazar libremente por encima del resto del circuito.

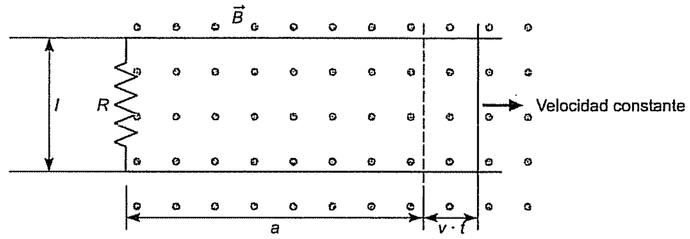


Figura 22.3

Si el desplazamiento de la barra rectilínea es a velocidad constante y en la dirección indicada en el dibujo, el área del circuito irá aumentando y se producirá una fem inducida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot A \cdot \cos\varphi) = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{d}{dt}(l \cdot (a + v \cdot t)) = -B \cdot l \cdot v$$

$$\varepsilon = -B \cdot l \cdot v$$

De los dos posibles sentidos de la corriente, el antihorario favorece el aumento de líneas de campo magnético a través del circuito. Será por tanto en sentido horario como se establece la corriente, ya que se opone a la variación de flujo de campo magnético:

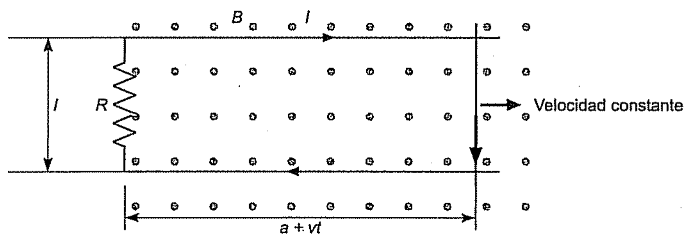


Figura 22.4

22.4. AUTOINDUCCIÓN

En ausencia de materiales ferromagnéticos, el flujo de campo magnético a través de un circuito es proporcional al valor de la corriente que por este circuito pasa:

$$\Phi_B = L \cdot I$$

La constante de proporcionalidad, L, entre flujo y corriente se conoce como coeficiente de autoinducción o simplemente autoinducción. Las unidades de L son:

$$[L] = \text{Wb/A} = \text{T} \cdot \text{m}^2\text{/A} = \text{H (Henri)}$$

En un circuito en el que la corriente varía, tiene lugar una variación de flujo de campo magnético y se inducirá una fem en él:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\,(LI)}{dt} = -L\,\frac{dI}{dt}$$

De forma que cualquier cambio de corriente en un circuito, provocará una fem inducida que se opondrá a este cambio de corriente.

22.5. INDUCCIÓN MUTUA

Si dos circuitos (o más) están próximos entre sí, el cambio de corriente en uno de ellos puede originar una variación de flujo magnético en el otro (u otros):

$$\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1$$

$$\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_2$$

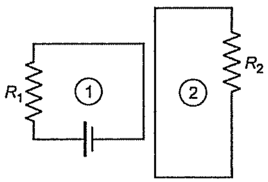


Figura 22.5

Donde Φ_{12} es el flujo a través del circuito 2 debido a la corriente que pasa por el circuito 1 y M_{12} es el coeficiente de inducción mutua entre los circuitos 1 y 2.

Experimentalmente se ha podido comprobar que los coeficientes de inducción mutua entre dos circuitos tienen el mismo valor:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

De nuevo, en ausencia de materiales ferromagnéticos, el flujo de campo magnético que atraviesa un circuito es proporcional a la corriente que circula por el otro. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de inducción mutua, M.

Las unidades de M son las mismas que las de L:

$$[M] = \text{Wb/A} = \text{T} \cdot \text{m}^2\text{/A} = \text{H (Henri)}$$

22.6. ENERGÍA Y DENSIDAD DE ENERGÍA

Esta energía se puede expresar en función del propio campo magnético en la densidad de energía de campo magnético. En un campo magnético hay una energía almacenada. La energía por unidad de volumen o densidad de energía es:

$$\eta_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

La energía almacenada en una bobina de autoinducción L por la que pasa una corriente I es:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

22.7. CIRCUITOS RL

La Figura 22.6 muestra un circuito con un interruptor, s, en desconexión. El circuito está compuesto por una resistencia R, una autoinducción L y una batería de corriente continua de tensión V.

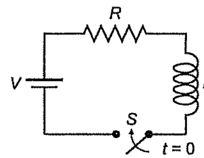


Figura 22.6

Al encontrarse en circuito abierto, la corriente es nula. Ahora bien, si en un cierto instante se cierra el interruptor, empezará a pasar corriente. La expresión de la corriente en función del tiempo es:

$$I(t) = \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = \frac{V}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde la relación $\tau = \dfrac{L}{R}$ es más conocida como constante de tiempo de un circuito RL. Si desde que se conectó el interruptor ha pasado un tiempo superior a 5τ, se considera que la corriente del circuito es estacionaria y su valor es $I = \dfrac{V}{R}$.

Si, una vez establecida la corriente en régimen estacionario, se desconecta el interruptor, s (como indica la Figura 22.7), la corriente disminuirá rápidamente su valor hasta cero. La expresión de la variación de la corriente en el tiempo es:

$$I(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

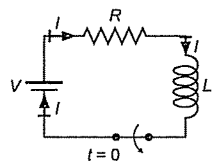


Figura 22.7

22.8. GENERADORES

Un generador es una máquina eléctrica que transforma energía, generalmente mecánica, en eléctrica. Los generadores pueden ser de corriente alterna o corriente continua.

En los generadores de corriente alterna, la fem inducida cambia de signo. La corriente producida en un generador se recoge mediante los colectores y las escobillas. Las figuras siguientes muestran una espira desplazándose a velocidad constante en el seno de un campo magnético uniforme. Los colectores son los anillos circulares conectados a los extremos de la espira. Las escobillas son los elementos que se hallan en contacto con los colectores.

Se puede comprobar que la tensión obtenida es alterna:

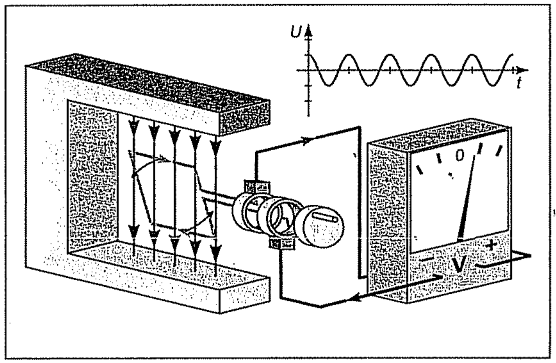


Figura 22.8

La tensión en bornes de una bobina de N espiras de área A que gira con una velocidad angular constante ω en el seno de un campo magnético constante B es:

$$V(t) = NBA\omega \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Se puede comprobar que a mayor velocidad de giro, se obtiene un mayor valor de fem inducida.

Si el generador es de corriente continua, la polaridad de la fem inducida, a la salida del generador, no cambia, aunque el valor de tensión sí puede fluctuar.

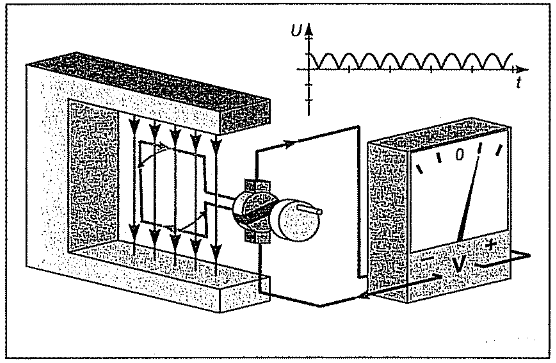


Figura 22.9

La tensión en bornes de una bobina de N espiras de área A que gira con una velocidad angular constante ω en el seno de un campo magnético constante B es:

$$V(t) = NBA\omega \cdot abs\,(\text{sen}\,(\omega t + \varphi))$$

PROBLEMAS RESUELTOS

22.1. Una espira de 80 cm² de área se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme de 20 mT. Determinar el flujo de campo magnético a través de la bobina si:

a) El campo magnético es perpendicular al plano de la espira.

b) El campo magnético forma 60° con el plano de la espira.

c) El campo magnético es paralelo al plano definido por la espira.

Solución

a) Si el campo magnético es perpendicular al plano de la espira, será paralelo al vector definido por el plano de la espira:

$$\Phi_B = B \cdot A \cdot \cos\varphi = B \cdot A \cdot 1 = 20 \cdot 10^{-3}\,T \cdot 80 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$\Phi_B = 16 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb} = 0{,}16\ \text{mWb}$$

b) Si el campo magnético forma un ángulo de 60° ($\pi/3$ rad) con el plano de la espira, el ángulo entre $\vec{B}$ y $\hat{n}$ es de 30° ($\pi/6$ rad):

$$\Phi_B = B \cdot A \cdot \cos\varphi = 20 \cdot 10^{-3}\,T \cdot 80 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot \cos(\pi/6)$$

$$\Phi_B = 14 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb} = 0{,}13\ \text{mWb}$$

c) Si el campo magnético es paralelo al plano de la espira: $\varphi = 90°$ y $\Phi_B = 0$.

22.2. Una bobina está compuesta por 25 espiras rectangulares de lados $a = 10$ cm y $b = 8{,}0$ cm. Contenido en el plano definido por la bobina y a una distancia de 1,0 cm se encuentra un hilo rectilíneo infinito por el que pasa una corriente I. Si la corriente que pasa por el hilo es constante y de valor 4,0 A, determinar:

a) El flujo de campo magnético a través de una de las espiras de la bobina.

b) El flujo de campo magnético a través de la bobina.

c) La fuerza electromotriz inducida en la bobina.

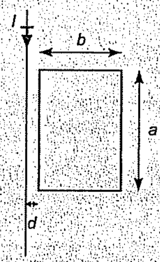


Figura 22.10

Solución

a) El campo magnético creado por el hilo rectilíneo decrece con la distancia $\left(B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$. Al no ser constante el campo magnético a través de la bobina, se calcula el flujo de campo magnético mediante la expresión:

$$\Phi = \int d\phi$$

Donde $d\phi$ es el diferencial de flujo magnético en un elemento de área en el que el campo magnético es constante.

El campo magnético creado por el hilo rectilíneo atraviesa el plano de la bobina perpendicularmente y en dirección hacia fuera según el sentido de corriente dado en el enunciado.

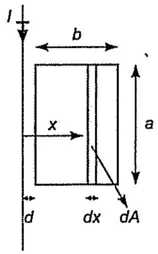


Figura 22.11

$$d\phi = \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = B \cdot \cos\varphi \cdot dA = B \cdot dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot dA$$

Donde $dA = a \cdot dx$

Por tanto:

$$\Phi = \int d\phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot a \cdot dx = \frac{\mu_0 I\, a}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I\, a}{2\pi} [\ln(x)]_d^{d+b}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I\, a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) = 2 \cdot 10^{-7}\, \frac{Tm}{A} \cdot 4{,}0\, A \cdot 10 \cdot 10^{-2}\, m \cdot \ln\left(\frac{9{,}0 \cdot 10^{-2}\, \mathrm{m}}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\, \mathrm{m}}\right)$$

$$\Phi = 0{,}18 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{Wb}$$

b) El flujo a través de la bobina es:

$$\Phi_{\text{Bobina}} = \mathrm{N} \cdot \Phi = 25 \cdot 0{,}18 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{Wb} = 4{,}4 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{Wb}$$

c) Al ser el flujo de campo magnético constante en el tiempo, la fem inducida es nula:

$$\varepsilon = 0$$

22.3. Sea el mismo sistema que el del Ejercicio 22.2 compuesto por un hilo rectilíneo infinito y una bobina de 25 espiras de 0,40 Ω de resistencia. En el hilo rectilíneo la corriente empieza a decrecer progresivamente según la expresión:

$$I(t) = 4{,}0\, \mathrm{A} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}\right)$$

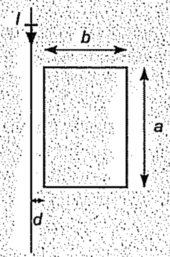


Figura 22.12

Determinar:

a) El flujo a través de la bobina en función del tiempo e indicar si aumenta o disminuye.

b) La fem inducida en la bobina. Calcular la fem en el instante $t = 0$ s y en $t = 1{,}0$ ms.

c) El sentido de la corriente inducida en la bobina y su valor.

Solución

a) La expresión que permite calcular el flujo a través de la bobina es el mismo que el obtenido en el ejercicio anterior:

$$\Phi = N \cdot \Phi = N \cdot \frac{\mu_0 I\, a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

Donde, a diferencia de lo calculado en el Ejercicio 22.2, la corriente no es constante, sino que varía con el tiempo:

$$\Phi_B = N \cdot \Phi = N \cdot \frac{\mu_0 I\, a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \cdot 4{,}0\, A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}\right)$$

$$\Phi_B = 25 \cdot 2 \cdot 10^{-7}\, \frac{Tm}{A}\, 10 \cdot 10^{-2}\, \mathrm{m} \cdot \ln(9{,}0) \cdot 4{,}0\, A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}\right)$$

$$\Phi_B = 4{,}4 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{Wb} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}\right)$$

b) Para determinar la fem inducida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -4{,}4 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{Wb} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}}{0{,}20 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{s}}$$

$$\varepsilon = -22 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{V} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}20\, \mathrm{ms}}}$$

En los instantes $t = 0$ s y $t = 1{,}0$ ms:

$\varepsilon\,(t = 0) = -22$ V

$\varepsilon\,(t = 1{,}0 \text{ ms}) = -22 \cdot 10^{-3}\,\text{V} \cdot e^{-\frac{1{,}0\text{ ms}}{0{,}20\text{ ms}}}$

$\varepsilon\,(t = 1{,}0 \text{ ms}) = -22 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{V} = -148 \cdot 10^{-6}\,\text{V} = -0{,}15\text{ mV}$

c) Los signos negativos de las expresiones anteriores indican que la fem inducida se opone al fenómeno que lo produce. La corriente que circula por el hilo aumenta con el tiempo y por tanto el flujo de campo magnético a través de la espira también.

En consecuencia el flujo aumenta, por tanto la fem inducida originará una corriente que crea un campo magnético que tiende a disminuir el flujo saliente. La corriente circulará por la bobina en sentido horario.

El valor de la corriente es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{22 \cdot 10^{-3}\,\text{V} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}20\text{ ms}}}}{0{,}40\,\Omega} = 55 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}20\text{ ms}}}$$

$$I = 55 \cdot \text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}20\text{ ms}}}$$

22.4. Una bobina compuesta por 200 espiras planas rectangulares de lados $a = 16$ cm y $b = 12$ cm se encuentra en el plano xy tal y como se observa en el dibujo. En un cierto instante se establece en 50 ms un campo magnético variable dependiente de la posición:

$$\vec{B}\,(y) = 400 \cdot (1 + 25 \cdot 10^{-3}\,y)\;mT\,\hat{k}$$

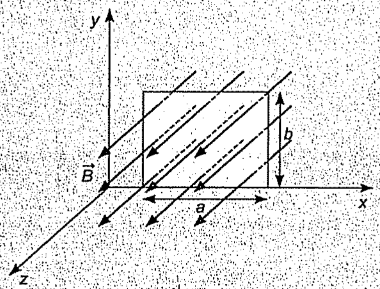


Figura 22.13

La bobina tiene una resistencia de 0,40 Ω. Determinar:

a) La variación de flujo de campo magnético antes y después de establecerse el campo magnético.

b) La fem inducida en la bobina.

c) El sentido y el valor de la corriente inducida en la bobina.

d) Las fuerzas que se aplican sobre cada uno de los cuatro lados de la bobina cuando circula una corriente inducida.

Solución

a) El flujo inicial es nulo ya que no hay campo magnético.

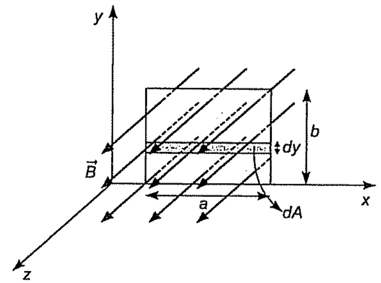


Figura 22.14

Para determinar el flujo al ser establecido el campo magnético hay que tener presente el Ejercicio 22.2, ya que el campo magnético no es constante al variar con el valor de la coordenada y.

El flujo a través de una espira de la bobina es:

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = \int B \cdot dA = \int_0^b 0{,}40 \cdot (1 + 25 \cdot 10^{-3}\,y) \cdot a \cdot dy$$

$$\Phi = 0{,}40 \cdot a \cdot \left[y + 25 \cdot 10^{-3}\,\frac{y^2}{2}\right]_0^b = 0{,}40 \cdot 16 \cdot 10^{-2} \cdot \left[12 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-3}\,\frac{(12 \cdot 10^{-2})^2}{2}\right]$$

$$\Phi = 7{,}69 \cdot 10^{-3}\text{ Wb} = 7{,}7\text{ mWb}$$

El flujo a través de toda la bobina será:

$$\Phi_B = N \cdot \Phi = 200 \cdot 7{,}69 \cdot 10^{-3}\text{ Wb} = 1{,}54\text{ Wb}$$

Así la variación de flujo es:

$$\Delta\Phi_B = (\Phi_B)_f - (\Phi_B)_i = 1{,}54\text{ Wb}$$

b) La fem media inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{1{,}54\text{ Wb}}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\text{ s}} = -30{,}8\text{ V}$$

c) El sentido de la corriente inducida se opone a que se establezca un flujo de campo magnético a su través en la dirección $\hat{k}$. Por tanto se establecerá una corriente en sentido horario.

El valor de esta corriente es:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{30{,}8\,V}{0{,}40\,\Omega} = 77\,A$$

d) Aplicando la expresión $\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$, se puede comprobar que las fuerzas sobre cada uno de los lados están aplicadas en la dirección y sentido que se indica en la Figura 22.15.

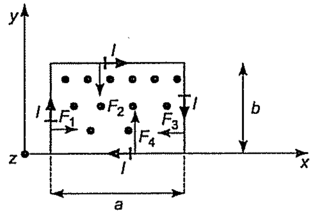


Figura 22.15

Sus módulos tienen un valor:

$$F_1 = F_3 = N \cdot \int_0^b I \cdot 0{,}40 \cdot (1 + 25 \cdot 10^{-3}\, y) \cdot dy = 200 \cdot 77 \cdot 0{,}40 \cdot \left[y + 25 \cdot 10^{-3} \frac{y^2}{2} \right]_0^b$$

$$F_1 = F_3 = 6{,}16 \cdot 10^3 \cdot \left[12 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-3} \frac{(12 \cdot 10^{-2})^2}{2} \right] N = 740\, N$$

Sobre el lado de la bobina colocado sobre el eje x, el campo magnético tiene un valor constante de 0,40 T:

$$F_4 = N \cdot I \cdot a \cdot B = 200 \cdot 77\, A \cdot 16 \cdot 10^{-2}\, \text{m} \cdot 0{,}40\, T = 9{,}86 \cdot 10^2\, N$$

Sobre el lado superior de la bobina colocado sobre el eje x, el campo magnético tiene un valor constante de 401,2 mT:

$$F_2 = N \cdot I \cdot a \cdot B = 200 \cdot 77\, A \cdot 16 \cdot 10^{-2}\, \text{m} \cdot 0{,}4012\, T = 9{,}88 \cdot 10^2\, N$$

Por tanto la fuerza neta es en la dirección de F_2, fuerza que intenta sacar la bobina del seno del campo magnético.

22.5. Una varilla rectilínea conductora de longitud $L = 40$ cm se desplaza transversalmente a una velocidad constante $v = 2{,}0$ m/s. El movimiento de la varilla se realiza en el seno de un campo magnético uniforme de 500 Gauss. Teniendo en cuenta que el campo magnético es perpendicular al plano definido por la varilla en su recorrido:

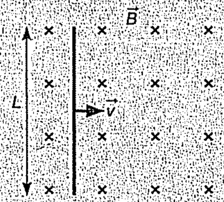


Figura 22.16

a) Calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla al desplazarse en el seno del campo magnético.

b) Indicar cuál de los dos extremos de la varilla se encuentra a mayor potencial.

Solución

a) La varilla rectilínea, en su desplazamiento está cortando líneas de campo magnético. Al cabo de un cierto tiempo t, la varilla se ha desplazado una distancia $d = v \cdot t$, como se puede observar en la figura inferior:

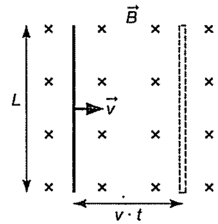


Figura 22.17

Por tanto, el área barrida por la varilla es:

$$A\,(t) = L \cdot v \cdot t$$

El flujo de campo magnético a través del área barrida por la varilla es:

$$\phi\,(t) = B \cdot A\,(t) = B \cdot L \cdot v \cdot t$$

$$\phi\,(t) = 50 \cdot 10^{-3}\, T \cdot 40 \cdot 10^{-2}\, \text{m} \cdot 2{,}0\, \text{m/s} \cdot t$$

$$\phi\,(t) = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot t\ \text{Wb}$$

Donde se ha tenido en cuenta que el campo magnético es perpendicular al área descrita por la varilla y que su valor es de 50 mT, ya que 10^4 Gauss = 1,0 T.

La fem inducida en la varilla se traduce en una diferencia de potencial entre sus extremos cuyo valor, en módulo, es:

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi\,(t)}{dt} = B \cdot L \cdot v$$

$$|\varepsilon| = 50 \cdot 10^{-3}\, T \cdot 40 \cdot 10^{-2}\, \text{m} \cdot 2{,}0\, \text{m/s} = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\, V$$

$$|\varepsilon| = 40\ \text{mV}$$

b) Para determinar cuál de los dos extremos de la varilla se encuentra a mayor potencial, hay que observar la Figura 22.17. En ella se puede observar que la varilla, al desplazarse, barre un área que encierra un número de líneas de campo magnético (8).

Si la varilla se encontrara en un circuito cerrado, la fem inducida crearía una corriente que se desplazaría en sentido antihorario y por tanto circularía por la varilla de abajo a arriba.

Como los electrones se desplazan en el sentido opuesto a la corriente, el flujo de electrones en la varilla es de arriba abajo, creando un exceso de carga negativa en el extremo inferior y, por defecto, un exceso de carga positiva en el extremo superior. Por tanto el extremo superior de la varilla tiene un potencial de 40 mV respecto al extremo inferior.

22.6. Un circuito, inclinado un ángulo α con la horizontal, está compuesto por un cable rígido conductor en forma de U y una varilla conductora, rectilínea y rígida de longitud a que une los dos lados libres del conductor en U. La varilla se desplaza sobre el conductor en forma de U a velocidad constante, desde una posición alejada una distancia c del borde del circuito, tal y como se indica en la figura. Un campo magnético perpendicular a la horizontal ocupa todo el espacio en el que se encuentra el circuito. La resistencia del circuito es R.

Datos: $B = 0{,}20$ T, $v = 5{,}0$ m/s, $a = 80$ cm, $c = 30$ cm, $R = 0{,}60\ \Omega$, $\alpha = 30°$

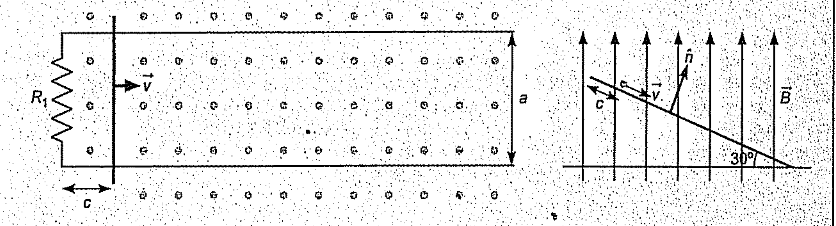


Figura 22.18

Determinar:

a) El flujo de campo magnético en función del tiempo.

b) El módulo de la fem inducida en el circuito.

c) El módulo y el sentido de la corriente inducida en el circuito.

Si la varilla tiene una masa $m = 40$ g:

d) ¿Qué fuerza se tiene que estar realizando sobre la varilla, en la dirección y sentido del movimiento, para que mantenga su velocidad constante?

Solución

a) Cuando ha transcurrido un tiempo t desde el inicio del movimiento de la varilla, ésta se ha desplazado una distancia $v \cdot t$. Por tanto el flujo de campo magnético a través del circuito es:

$$\phi = \vec{B} \cdot \hat{n} A = B \cdot A \cdot \cos 30° = B \cdot [a \cdot (c + v \cdot t)] \cdot \cos 30°$$

$$\phi = 0{,}20\ T \cdot [0{,}80 \text{ m } (0{,}30 \text{ m} + 5{,}0 \text{ m/s} \cdot t)] \cdot \cos 30°$$

$$\phi = 42 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} + 0{,}69 \cdot t \frac{\text{Wb}}{s}$$

b) El módulo de la fem inducida es:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{d}{dt}\left(42 \cdot 10^{-3}\ Wb + 0{,}69 \cdot t \frac{\text{Wb}}{s}\right) = 0{,}69 \text{ V}$$

c) La intensidad inducida en el circuito tiene un valor:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{0{,}69 \text{ V}}{0{,}60\ \Omega} = 1{,}2 \text{ A}$$

El sentido de la corriente debe cumplir la ley de Lenz. Al desplazarse la varilla, el área del circuito aumenta englobando un mayor número de líneas de campo y aumentando el flujo de campo magnético a su través. La corriente inducida debe crear un campo magnético que, en el área definida por el circuito, debe ser opuesto al campo magnético inicial B y así disminuir el flujo de campo magnético. El sentido de la corriente debe ser pues horario.

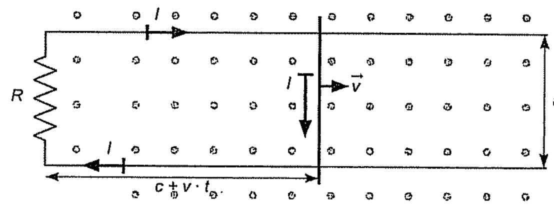


Figura 22.19

d) Si no hubiera ningún agente externo aplicando fuerza alguna sobre la varilla, el diagrama de fuerzas aplicadas sobre la varilla en el descenso por el plano inclinado sería el indicado en la Figura 22.20.

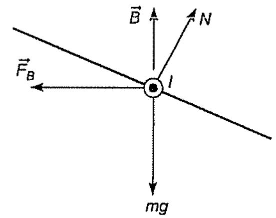


Figura 22.20

Donde $F_B = I \cdot a \cdot B = 0{,}18\ N$

Si se descomponen las fuerzas aplicadas, la fuerza neta resultante en la dirección del movimiento de la varilla es:

$$F_{NETA} = \text{mg sen } 30° - F_B \cos 30°$$

$$F_{NETA} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen } 30° - 0{,}18\ N \cdot \cos 30°$$

$$F_{NETA} = 0{,}196\ N - 0{,}159\ N = 0{,}037\ N$$

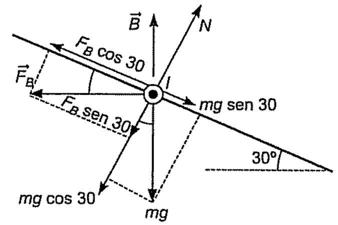


Figura 22.21

Por tanto, para que la varilla se desplace a velocidad constante, es preciso que haya un agente externo que aplique una fuerza, F_A, en sentido contrario al del desplazamiento de la varilla y de valor:

$$F_A = 0{,}037\ \text{N}$$

22.7. Una bobina, supuesta ideal, tiene una longitud de 12 cm y está compuesta por 500 espiras circulares de 3,0 cm de radio. Por la bobina pasa una corriente continua de 40 mA. Determinar:

a) El flujo de campo magnético a través de una de las espiras de la bobina.

b) El flujo de campo magnético a través de la bobina.

c) El coeficiente de autoinducción de esta bobina.

Si la corriente se extingue uniformemente en 20 ms, calcular:

d) La fem inducida en la bobina.

Solución

a) El campo magnético creado por la bobina en su interior tiene un módulo $B = \mu_0\, n\, I$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud.

El flujo a través de una de las espiras es:

$$\phi = \vec{B} \cdot \hat{n}A = B \cdot A = \mu_0\, n\, IA = \mu_0 \frac{N}{l} I \pi R^2$$

$$\phi = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \frac{500}{12 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \cdot 40 \cdot 10^{-3}\, A \cdot \pi\, (3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$\phi = 5{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{Wb}$$

b) Si la bobina se supone ideal, el campo magnético es constante en toda la bobina. Así el flujo a través de la bobina es:

$$\Phi = N \cdot \phi = 500 \cdot 5{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{Wb}$$

$$\Phi = 2{,}96 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

c) En ausencia de elementos ferromagnéticos, el coeficiente de autoinducción es la relación entre el flujo a través de la bobina y la corriente que por ella circula:

$$N = \frac{\Phi}{I} = \frac{2{,}96 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{40 \cdot 10^{-3}\, A} = 7{,}4 \cdot 10^{-3}\, H$$

$$L = 7{,}4\ \text{mH}$$

d) Si la corriente se anula, el flujo a través de la bobina se hace también nulo. Hay por tanto una variación de flujo magnético a través de la bobina y se generará una fem de valor medio:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_f - \Phi_i}{t_f - t_i} = -\frac{0 - 2{,}96 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{20 \cdot 10^{-3}\, s - 0}$$

$$\varepsilon = 14{,}8 \cdot 10^{-3}\, V = 15\ \text{mV}$$

22.8. Dos bobinas de igual longitud ($l_1 = l_2 = 16$ cm) y radios $R_1 = 5{,}0$ cm, $R_2 = 2{,}0$ cm tienen 800 y 1 200 espiras respectivamente. Ambas bobinas son coaxiales. Si la bobina 1 tiene una corriente de 20 mA, determinar:

a) El flujo de campo magnético a través de la bobina 2.

b) La relación entre el flujo de campo magnético de la bobina 2 y la corriente de la bobina 1.

Si no pasa corriente por la bobina 1, pero sí por la 2 con un valor de 35 mA, determinar:

c) El flujo de campo magnético a través de la bobina 1.

d) La relación entre el flujo de campo magnético de la bobina 1 y la corriente de la bobina 2.

e) El coeficiente de inducción mutua del sistema compuesto por las dos bobinas.

Solución

a) El campo magnético creado por la bobina 1 es $B_1 = \mu_0\, n_1\, I_1$. Repitiendo el proceso seguido en el Ejercicio 22.7 el flujo de campo magnético que se crea en la bobina 2 es:

$$\Phi_{1\to 2} = N_2 \cdot \phi_{1\to 2} = N_2 \cdot B_1 \cdot A_2 = N_2 \cdot \mu_0\, n_1 \cdot A_2 = N_2 \cdot \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \cdot \pi R_2^2$$

$$\Phi_{1\to 2} = \mu_0 \frac{N_1 \cdot N_2}{l} I_1 \cdot \pi R_2^2$$

$$\Phi_{1\to 2} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \frac{800 \cdot 1\,200}{16 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \cdot \pi\, (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$\Phi_{1\to 2} = 1{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

b) La relación entre el flujo de la bobina 2 y la corriente de la bobina 1 es:

$$M_{1\to 2} = \frac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \cdot \pi R_2^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \frac{800 \cdot 1200}{16 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \cdot \pi\, (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$M_{1\to 2} = 9{,}474 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = 9{,}5\ \text{mH}$$

c) El campo magnético creado por la bobina 2 es $B_2 = \mu_0\, n_2\, I_2$. Para calcular el flujo en este apartado hay que tener presente que si las bobinas se consideran ideales, el campo magnético en su exterior es nulo. Como la bobina 2 está en el interior de la bobina 1, sólo habrá flujo de campo magnético a través de la bobina 1 en el espacio común a ambas bobinas. Por ello el flujo tendrá un valor:

$$\Phi_{2\to 1} = N_1 \cdot \phi_{2\to 1} = N_1 \cdot \vec{B}_2 \cdot \hat{n}A_1 = N_1 \cdot B_2 \cdot A_2$$

$$\Phi_{2\to 1} = N_1 \cdot \mu_0\, n_2\, I_2 \cdot A_2 = N_1 \cdot \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2 \cdot \pi\ R_2^2$$

$$\Phi_{2\to 1} = \mu_0 \frac{N_1 \cdot N_2}{l} I_2 \cdot \pi R_2^2$$

$$\Phi_{2\to 1} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \frac{800 \cdot 1200}{16 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \cdot 35 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \cdot \pi\, (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$\Phi_{1\to 2} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

d) La relación entre el flujo de la bobina 1 y la corriente de la bobina 2 es:

$$M_{2\to 1} = \frac{\Phi_{2\to 1}}{I_2} = \mu_0 \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \cdot \pi R_2^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \frac{800 \cdot 1\,200}{16 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \cdot \pi\,(2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2$$

$$M_{2\to 1} = 9{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = 9{,}5\ \text{mH}$$

e) El coeficiente de inducción mutua del sistema es:

$$M = M_{1\to 2} = M_{2\to 1} = 9{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = 9{,}5\ \text{mH}$$

22.9. El interruptor del circuito de la Figura 22.22 está abierto. En un cierto instante que se tomará como origen de tiempos, se cierra el interruptor. Determinar:

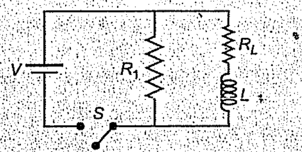


Figura 22.22

a) La corriente que circula por la resistencia R_1.

b) La corriente que circula por la resistencia R_L y la constante de tiempo inductiva τ_L de este proceso.

c) La energía almacenada en la bobina cuando la corriente que por ella pasa ha alcanzado el valor estacionario.

Una vez ha transcurrido un tiempo suficientemente largo y la corriente suministrada por la batería ha llegado al valor estacionario, se abre el interruptor. Determinar:

d) La corriente que circula por las resistencias R_1 y R_L.

Datos: $V = 12$ V, $R_1 = 120\ \Omega$, $R_L = 24\ \Omega$ y $L = 33$ mH.

Solución

a) La corriente que circula por R_1 es:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{12\ \text{V}}{120\ \Omega} = 0{,}10\ \text{A}$$

b) La corriente que pasa por R_L se puede calcular aplicando la regla de las mallas. La ecuación resultante es:

$$V - L\frac{di_L}{dt} - i_L \cdot R_L = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$i_L(t) = \frac{V}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{R_L}{L}\cdot t}\right) = I_L \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

Donde:

I_L es el valor estacionario de la corriente que pasa por R_L:

$$I_L = \frac{V}{R_L} = \frac{12\ \text{V}}{24\ \Omega} = 0{,}50\ \text{A}$$

τ_L es la constante inductiva de este proceso:

$$\tau_L = \frac{L}{R_L} = \frac{33 \cdot 10^{-3}\ H}{24\ \Omega}$$

$$\tau_L = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ s = 1{,}4\ \text{ms}$$

Así la corriente que pasa por R_L es: $i(t) = 0{,}50\ A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1{,}4\ \text{ms}}}\right)$

c) El valor estacionario de la corriente que pasa por la bobina es 0,50 A. Por tanto la energía almacenada en la bobina es:

$$U = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 10^{-3}\ H \cdot (0{,}50\ A)^2 = 4{,}1 \cdot 10^{-3}\ J$$

d) Si ha transcurrido el tiempo necesario para que la corriente que pasa por R_L haya alcanzado el valor estacionario (en la práctica $t \geq 5\tau_L$) y, en esas condiciones, se abre el interruptor, la energía almacenada en la bobina se devolverá al circuito.

Aplicando la regla de las mallas en la malla que contiene R_1, L y R_L, se obtiene:

$$-L\frac{di}{dt} - i \cdot R_L - i \cdot R_1 = 0$$

Si se resuelve la ecuación diferencial teniendo presente que la corriente que pasa por la bobina en el instante en que se abre el interruptor s es $I_L = 0{,}50$ A, se obtiene:

$$i(t) = i_L\, e^{-\frac{R_1 + R_L}{L}\cdot t} = I_L \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L'}}$$

Donde:

$$\tau_L' = \frac{L}{R_1 + R_L} = \frac{33 \cdot 10^{-3}\ H}{120\ \Omega + 24\ \Omega} = \frac{33 \cdot 10^{-3}\ H}{144\ \Omega} = 0{,}23 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

$$\tau_L' = 0{,}23\ \text{ms}$$

Y por tanto:

$$i(t) = 0{,}50\ \text{A} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}23\ \text{ms}}}$$

22.10. Una bobina compuesta por N espiras de área A y resistencia R se encuentra inmersa en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Un agente externo provoca un movimiento giratorio de la espira tal y como se indica en la Figura 22.23. La velocidad angular de la espira es ω. Inicialmente, el ángulo formado entre $\vec{B}$ y el vector unitario que define el plano de las espiras es α_0. Determinar:

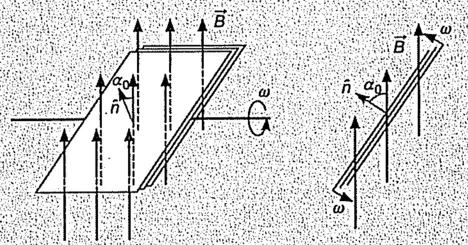


Figura 22.23

a) El flujo de campo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
b) La fem inducida en la bobina.
c) La corriente inducida en la bobina.
d) Representar en función del tiempo el flujo magnético, la fem inducida y la corriente inducida en la bobina.

Nota: La autoinducción de la bobina es despreciable en comparación con su resistencia.

Datos: $N = 30$, $B = 0{,}50$ T, $A = 80$ cm², $R = 4{,}0\ \Omega$, $\omega = 1{,}6 \cdot 10^2$ rad/s, $\alpha_0 = 30°$.

Solución

a) Si la bobina gira con una velocidad angular ω, el ángulo entre $\vec{B}$ y el vector unitario perpendicular al plano de las espiras es: $\alpha_0 + \omega \cdot t$.

El flujo de campo magnético a través de la bobina es:

$$\phi(t) = N \cdot \vec{B} \cdot \hat{n} A = N \cdot B \cdot A \cos(\alpha_0 + \omega \cdot t)$$

$$\phi(t) = 30 \cdot 0{,}50\ T \cdot 80 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot \cos(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)$$

$$\phi(t) = 0{,}12 \cdot \cos(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)\ \text{Wb}$$

b) La fem inducida en la bobina es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(0{,}12 \cdot \cos(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\, t)\ \text{Wb}) = 0{,}12 \cdot 1{,}6 \cdot 10^2 \cdot \text{sen}(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)\ \text{V}$$

$$\varepsilon = 19{,}2 \cdot \text{sen}(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)\ \text{V}$$

c) La corriente que pasa por la bobina es:

$$i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{19{,}2 \cdot \text{sen}(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)\ \text{V}}{4{,}0\ \Omega} = 4{,}8 \cdot \text{sen}(\pi/6 + 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{rad/s} \cdot t)\ \text{A}$$

d) Representación de las variables $\phi(t)$, $\varepsilon(t)$ e $i(t)$.

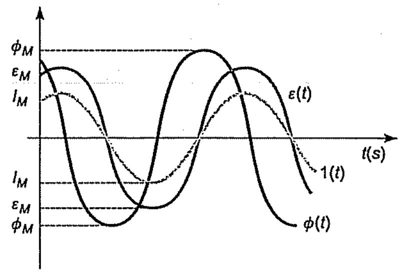


Figura 22.21

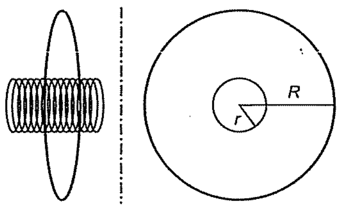
CUESTIONES

FLUJO DE CAMPO MAGNÉTICO

22.1. Una bobina está formada por 1000 espiras cuadradas de 1,0 cm de lado. El campo magnético en su interior tiene un valor de 10 mT. El flujo total de campo magnético interceptado por la bobina es:

a) $\Phi_B = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Wb
b) $\Phi_B = 1{,}0 \cdot 10$ Wb
c) $\Phi_B = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Wb
d) $\Phi_B = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb

22.2. En la figura se muestra una bobina de N espiras, longitud L y $n = N/L$ vueltas por unidad de longitud. Cada espira tiene radio r y por ella circula una intensidad I. El campo magnético en su interior será $B = \mu_0\, n\, I$. El flujo magnético ϕ_b a través de la espira de radio R es:



a) $\phi_b = \mu_0\, n\, I\, \pi R^2$
b) $\phi_b = \mu_0\, n\, I\, \pi r^2$
c) $\phi_b = \mu_0\, N\, I\, \pi R^2$
d) $\phi_b = \mu_0\, N\, I\, \pi r^2$

22.3. Por un solenoide circula una corriente de 10 mA. El solenoide está formado por 2 000 espiras cuadradas de 1,0 cm de lado. La longitud del solenoide es de 5,0 cm. El flujo de campo magnético a través de una sola de las espiras que forman el solenoide es:

a) $\phi = 5{,}0 \cdot 10^{-8}$ Wb
b) $\phi = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Wb
c) $\phi = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ Wb
d) $\phi = 1{,}0$ Wb

LEY DE FARADAY-LENZ

22.4. Una bobina de 200 vueltas tiene un área de 4,0 cm² y gira en el interior de un campo magnético de 0,50 T. ¿Cuál es la frecuencia de rotación necesaria para generar una fem máxima de 10 V?

a) 40 Hz
b) La fem es independiente de la frecuencia de rotación.
c) 8,0 kHz
d) No hay suficientes datos para calcularla.

22.5. El flujo magnético a través de una espira de área $A = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m² viene dado por $\Phi(t) = (t^2 - 4t) \cdot 10^{-1}$ Wb. Hallar la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante $t = 2{,}0$ s.

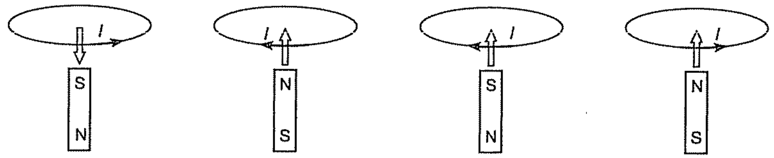
a) 0,40 V
b) 0
c) −0,40 V
d) $8{,}0 \cdot 10^{-5}$ V

22.6. La intensidad de corriente que circula por una bobina de autoinducción $L = 0{,}50$ H, aumenta desde 0 a 2,0 A en un tiempo de 1,0 ms. Es correcto afirmar que:

a) El flujo de campo magnético cuando la intensidad es de 2,0 A y se mantiene constante es de 0,50 Wb.
b) La fem inducida es de 2,0 kV.
c) La energía almacenada en la autoinducción es de 1,0 J.
d) El campo magnético en la bobina es de 0,25 T.

22.7. Cuando movemos el imán de la figura respecto a la espira en el sentido indicado por la flecha, el sentido de la corriente inducida será:

a) *b)* *c)* *d)*



FEM INDUCIDA

22.8. Los bornes de una bobina están conectados mediante un galvanómetro. Acercamos un imán a la bobina y el galvanómetro señala una intensidad, positiva, de 3,0 mA. Si se gira el imán 180°, y lo acercamos de nuevo a la bobina, será correcto afirmar que:

a) El galvanómetro dará el mismo resultado que el descrito en el enunciado.
b) La intensidad de corriente tendrá sentido contrario al inicial.
c) La intensidad que medirá el galvanómetro será constante, de 3,0 mA, cuando el imán quede en reposo sobre la bobina.
d) Si el imán se acerca más despacio que el caso descrito en el enunciado, el pico de corriente medido en el galvanómetro será superior a 3,0 mA.

22.9. Un campo magnético B es perpendicular al plano de una espira de radio 5,0 cm y de 0,4 Ω de resistencia. El campo magnético aumenta a un ritmo de 40 mT/s. Hallar la intensidad de corriente inducida en la espira.

a) 0,79 mA
b) 0,10 A
c) 0,13 mA
d) 0

22.10. Dos barras metálicas, L_1 y L_2, que tienen la misma longitud, se desplazan con la misma velocidad sobre dos rieles paralelos, pero en sentidos contrarios, dentro de un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel y dirigido papel adentro. Es correcto afirmar que:

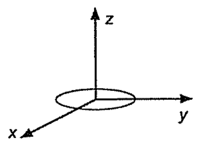
a) Por el circuito pasará una corriente en sentido horario.
b) Por el circuito pasará una corriente en sentido antihorario.

c) Por el circuito no circula corriente debido a que las fuerzas electromotrices inducidas en las barras son opuestas.

d) Por el circuito no circula corriente debido a que no se induce ninguna fem.

22.11. Una espira conductora de 10 cm de radio se halla centrada en el origen de coordenadas de la figura. En esa zona del espacio hay un campo magnético que varía con el tiempo:

$$\vec{B}(t) = \frac{0{,}20}{\pi} \cdot e^{\left(-\frac{t}{5{,}0}\right)}\ \mathrm{T}\ \hat{k}$$



¿Cuál es la expresión de la fuerza electromotriz inducida en la espira?

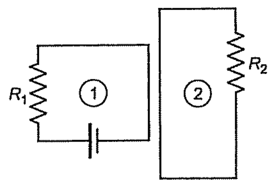
a) $\varepsilon = 2{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{5{,}0}}\ \mathrm{V}$

b) $\varepsilon = \left(\frac{2{,}0}{\pi}\right) \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{5{,}0}}\ \mathrm{V}$

c) $\varepsilon = \left(\frac{4{,}0}{\pi}\right) \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{t}{5{,}0}}\ \mathrm{V}$

d) $\varepsilon = 4{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{t}{5{,}0}}\ \mathrm{V}$

22.12. La resistencia del circuito 1 está mal dimensionada. No es capaz de disipar calor correctamente. Por ese motivo, al ir calentándose la resistencia, su valor aumenta progresivamente y por tanto disminuye la intensidad. En cuanto al sentido de la corriente inducida a través del circuito 2 ocasionado por el proceso anterior, es correcto afirmar que:



a) No se genera corriente inducida en 2.

b) Habrá corriente inducida en sentido horario.

c) Con los datos del problema no se puede determinar el sentido de la corriente inducida.

d) Habrá corriente inducida en sentido antihorario.

22.13. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) La existencia de una corriente eléctrica implica la existencia de un campo magnético.

b) La existencia de un campo magnético implica la existencia de una corriente eléctrica.

c) Un campo magnético sólo puede ser producido por una corriente eléctrica.

d) La existencia de un flujo de campo magnético a través de una superficie implica la existencia de una fuerza electromotriz inducida.

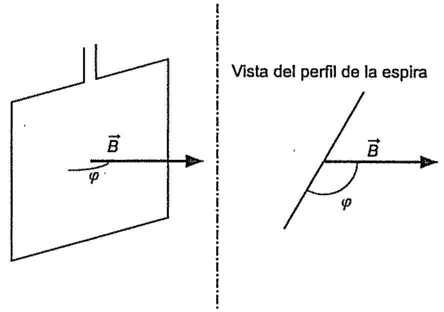
22.14.1. Un generador suministra una tensión alterna de 0,38 kV (tensión máxima). El área de la espira es de 7,6 m². El campo magnético gira con una velocidad de $2{,}0 \cdot 10^3$ rpm; el valor de B que genera esa tensión alterna es:

a) 50 T

b) $2{,}5 \cdot 10^{-2}\ T$

c) 0,24 T

d) $6{,}6 \cdot 10^{-5}\ T$



22.14.2. En el generador anterior se disminuye el valor de B a la mitad, pero la velocidad de giro cambia de valor. Es correcto afirmar que:

a) El flujo magnético medio durante una vuelta permanece constante.

b) Si la velocidad de giro aumenta en un factor 2 o mayor, el flujo magnético medio durante una vuelta disminuirá.

c) Solamente si la velocidad de giro aumenta en un factor 2, el flujo magnético medio durante una vuelta será constante.

d) El flujo magnético medio durante una vuelta aumenta un factor 2.

22.14.3. Si en el generador disminuye el valor de B a la mitad, pero aumenta la velocidad de giro en un factor 4, la tensión inducida máxima tendrá un valor:

a) $1{,}9 \cdot 10^2$ V *b)* $3{,}8 \cdot 10^2$ V *c)* $7{,}6 \cdot 10^2$ V *d)* $2{,}7 \cdot 10^2$ V

AUTOINDUCCIÓN E INDUCCIÓN MUTUA

22.15. A través de un circuito de corriente continua circula una intensidad de corriente $I = 0{,}10$ A. El flujo del campo magnético a través del circuito es $\Phi = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ Wb. ¿Cuál es el valor del coeficiente de autoinducción de este circuito?

a) $L = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ H

b) No hay suficientes datos para calcularlo.

c) $L = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ H

d) $L = 5{,}0 \cdot 10^3$ H

22.16.1. Por una bobina de 800 espiras y 2,0 cm de radio circula una intensidad de $2{,}0 \cdot 10^2$ mA. En estas condiciones, el campo magnético en un punto del interior de la bobina es 0,10 T. ¿Cuánto valdrá el flujo del campo magnético a través de la bobina?

a) $1{,}2 \cdot 10^{-4}\ T \cdot \mathrm{m}^2$

b) $4{,}0 \cdot 10^{-5}\ T \cdot \mathrm{m}^2$

c) 0

d) $0{,}10\ T \cdot \mathrm{m}^2$

22.16.2. El coeficiente de autoinducción de la bobina es:

a) No hay datos suficientes para calcularlo.

b) 63 mH

c) 0,20 H

d) 5,0 H

22.17. Por una bobina de autoinducción $L = 0{,}10$ H circula una intensidad constante de 0,10 A. Es correcto afirmar que:

a) Después de cuatro segundos, la fem inducida será de $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ V.

b) Se inducirá una fem senoidal.

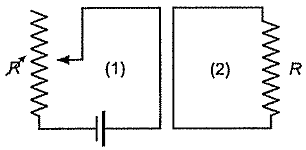
c) El flujo a través de la bobina es de $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Wb.

d) No se puede calcular el flujo a través de la bobina porque no se conoce su geometría.

22.18. El flujo por espira de un solenoide de 2000 espiras y 5,0 cm de longitud es de $5{,}0 \cdot 10^{-8}$ Wb. Si el campo magnético en el solenoide es de $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ T, ¿cuál es el coeficiente de autoinducción de este solenoide?

a) $L = 50$ mH *b)* $L = 10$ mH *c)* $L = 10$ μH *d)* $L = 5{,}0$ μH

22.19. El circuito 1 está alimentado con una batería de corriente continua que le suministra una tensión constante. La resistencia del reostato del circuito 1 está disminuyendo de valor. Es correcto afirmar que:



a) El flujo a través del circuito 2 está disminuyendo.

b) En el circuito 2 se inducirá una corriente alterna senoidal.

c) En el circuito 2 se inducirá una corriente que irá en sentido antihorario.

d) El flujo a través del circuito 1 está disminuyendo.

ENERGÍA MAGNÉTICA

22.20. La energía magnética almacenada en el solenoide del Ejercicio 22.18 es:

a) $U = 0{,}50$ μJ *b)* $U = 0{,}25$ μJ *c)* $U = 25$ μJ *d)* $U = 50$ μJ

22.21.1. El flujo magnético a través de un circuito sin elementos ferromagnéticos que lleva una corriente de 2,0 A es de 0,80 Wb. Hallar la autoinducción del circuito.

a) No hay datos suficientes para calcularla.

b) 0

c) 0,40 H

d) 1,6 H

22.21.2. La energía magnética almacenada es:

a) 0,80 J *b)* 0,16 J *c)* 3,2 J *d)* 2,6 J

22.21.3. Hallar la fuerza electromotriz inducida si la corriente se duplica en 0,20 segundos.

a) 0,80 V *b)* 4,0 V *c)* 10 V *d)* 8,0 V

22.22. Si por una bobina de 0,60 H pasa una corriente de 20 mA, ¿qué energía hay almacenada en la bobina?

a) $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ J *b)* $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ J *c)* 0,12 J *d)* $3{,}6 \cdot 10^{-3}$ J

SOLUCIONES

22.1. *d)*	**22.8.** *b)*	**22.14.2.** *c)*	**22.19.** *c)*
22.2. *b)*	**22.9.** *a)*	**22.14.3.** *c)*	**22.20.** *a)*
22.3. *a)*	**22.10.** *b)*	**22.15.** *c)*	**22.21.1.** *c)*
22.4. *a)*	**22.11.** *d)*	**22.16.1.** *d)*	**22.21.2.** *a)*
22.5. *b)*	**22.12.** *d)*	**22.16.2.** *d)*	**22.21.3.** *b)*
22.6. *c)*	**22.13.** *a)*	**22.17.** *c)*	**22.22.** *a)*
22.7. *b)*	**22.14.1.** *c)*	**22.18.** *b)*	

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Un hilo conductor rectilíneo infinito por el que pasa una corriente *I* se encuentra en el plano definido por una espira rectangular, tal y como indica la Figura 22.25.**

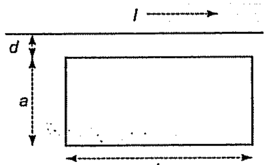


Figura 22.25

En estas condiciones:

a) Hallar el flujo magnético a través de la espira.

Si la espira se desplaza con velocidad constante hacia la derecha paralela al hilo, determinar:

b) El flujo de campo magnético en función del tiempo.

c) La fem inducida en la espira.

Si la espira se desplaza con velocidad constante alejándose de la espira, determinar:

d) El flujo de campo magnético en función del tiempo.

e) El módulo de la fem inducida en la espira.

Datos: $d = 1$ cm, $a = 4$ cm, $b = 8$ cm, $I = 4{,}0$ A, $v = 6{,}0$ cm/s.

Sol.: *a)* $\phi = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Wb

b) $\phi = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Wb

c) $\varepsilon = 0$ V

d) $\phi(t) = 64 \cdot 10^{-9} \cdot \ln\left(\dfrac{5{,}0 + 6{,}0 \cdot t}{1{,}0 + 6{,}0 \cdot t}\right)$ Wb

e) $|\varepsilon(t)| = -\dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{36\,t^2 + 36\,t + 5} \cdot V$

2 **Un circuito compuesto por un cable rígido conductor en forma de *U* y una varilla conductora, rectilínea y rígida que une los dos lados libres del conductor en *U*, se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme perpendicular al plano definido por el circuito de módulo $B = 0{,}20$ *T*. La varilla se desplaza a velocidad constante $v = 5{,}0$ m/s, tal y como indica la Figura 22.26. Determinar:**

a) El flujo de campo magnético en función del tiempo.

b) El módulo de la fem inducida en el circuito.

Datos: $a = 60$ cm, $c = 20$ cm, $R = 0{,}40\ \Omega$.

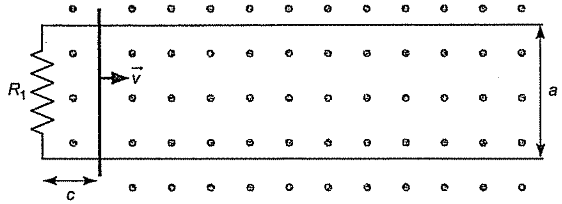


Figura 22.26

c) El módulo y el sentido de circulación de la corriente inducida.

d) ¿Qué fuerza hay que aplicar sobre la varilla para que ésta se desplace a la velocidad indicada en el enunciado?

Sol.: *a)* $\phi(t) = [24 \cdot 10^{-3} + 0{,}60 \cdot t]$ Wb; *b)* $\varepsilon = 0{,}60$ V; *c)* $I = 1{,}5$ A, en sentido horario; *d)* $F = 0{,}18$ N

3 **En un generador la energía mecánica se transforma en energía eléctrica. Un agente externo hace girar un conjunto de imanes permanentes con un campo total $B = 0{,}40$ *T* en el seno de un conjunto de espiras. Cada una de estas espiras es rectangular de lados $a = 0{,}30$ m y $b = 0{,}20$ m. Si el conjunto de imanes gira a 20 vueltas por segundo:**

a) Hallar el valor de flujo magnético que atraviesa una espira (suponer que en el instante inicial, el flujo magnético es nulo) y la fem máxima inducida en ella.

b) Si una bobina del generador está compuesta por 100 espiras en serie como la anteriormente descrita, hallar la tensión en bornes de la bobina.

El agente externo deja de actuar y el bloque de imanes disminuye progresivamente su velocidad de giro hasta detenerse totalmente en 40 s.

c) Calcular la fem en función del tiempo y la fem máxima inducida en un tiempo cualquiera *t* durante la frenada.

Sol.: *a)* $\phi(t) = 24 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(40 \cdot \pi \cdot t + \pi/2)$ Wb, $\varepsilon(t) = 3{,}0$ V

b) $\varepsilon(t)_{\text{Bobina}} = -3{,}0 \cdot 10^2 \text{ sen } (40 \cdot \pi \cdot t + \pi/2)$ V

c) $\varepsilon(t)_{\text{Bobina}} = -2{,}4 \cdot (40 \cdot \pi - \pi \cdot t) \cdot \text{sen}\left([40 \cdot \pi - \frac{1}{2}\pi \cdot t] \cdot t + \pi/2\right) V$, $\varepsilon_M = (3{,}0 \cdot 10^2 - 7{,}5 \cdot t)\ V$

4 **En el interior de una bobina de 2,0 cm de radio, $5{,}0 \cdot 10^3$ espiras y 10 cm de longitud se ha colocado, concéntrica e internamente, una espira circular de 1,0 cm de radio y de 0,50 Ω de resistencia. Por la bobina circula una corriente de 2,0 A.**

a) ¿Cuánto vale el campo magnético en el interior de la bobina?

b) ¿Cuál es el valor del flujo magnético a través de la espira?

c) Si la corriente de la bobina se hace cero en 0,50 ms, ¿cuáles son los valores de la fem y corriente inducidas en la espira?

d) ¿Cuál es el valor del coeficiente de autoinducción mutua entre la espira y la bobina?

Sol.: *a)* $B = 0{,}13$ T; *b)* $\phi = 39\ \mu$Wb; *c)* $\varepsilon = 79$ mV, $I = 0{,}16$ A; *d)* $M = 20\ \mu$H

5 **La bobina de la Figura 22.27, que la podemos tomar como una bobina ideal, tiene 0,50 cm de radio. El número de espiras es $2{,}5 \cdot 10^3$ y la longitud de la bobina 5,0 cm. Por la bobina circula una corriente de 20 mA.**

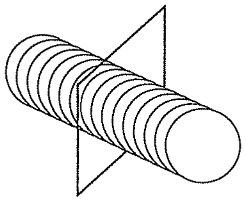


Figura 22.27

a) ¿Cuál es el campo magnético originado por la bobina?

b) ¿Cuánto vale el flujo de campo magnético a través de una espira cuadrada de 4,0 cm de lado cuyo plano es paralelo al de las espiras de la bobina? (El centro de la espira cuadrada coincide con el eje de la bobina).

c) ¿Cuál es el coeficiente de inducción mutua entre la bobina y la espira?

En un determinado instante de tiempo ($t = 0$) la corriente de la bobina empieza a disminuir según la expresión:

$$i(t) = 20 \ \text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}30\,\text{s}}}$$

d) ¿Cuál será el valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira?

Sol.: a) $B = 1{,}3$ mT; *b)* $\phi = 99 \cdot 10^{-9}$ Wb; *c)* $M = 4{,}9 \cdot 10^{-6}$ H; *d)* $\varepsilon(t) = 0{,}33 \ \mu\text{V} \cdot e^{-\frac{t}{0{,}30\,\text{s}}}$

6 **En el dibujo de la Figura 22.28 se muestran dos circuitos. El primero de ellos tiene una batería de 24 V, una resistencia R de 1,2 kΩ y una bobina L_1 de $1{,}0 \cdot 10^3$ espiras y 10 cm de longitud. El segundo circuito carece de batería y está compuesto por una bobina L_2 y una resistencia $r = 10$ Ω.**

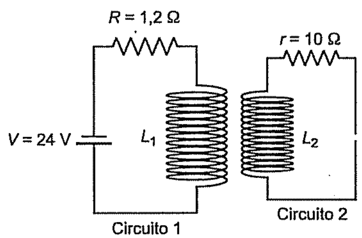


Figura 22.28

Sobre el circuito 1, cuando la corriente ha obtenido el valor estacionario, calcular:

a) El campo magnético B (valor y dirección) que genera la bobina L.

Si el flujo de campo magnético total a través de la bobina L_1 es 6,0 mWb, calcular:

b) El valor del coeficiente de autoinducción L de la bobina del circuito 1.

c) La energía almacenada en la bobina L.

Sol.: a) $B = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ T, en sentido vertical hacia arriba; *b)* 0,30 H; *c)* $60 \cdot 10^{-6}$ J

7 **Sean los circuitos de la Figura 22.28, con los mismos datos que en el ejercicio anterior. Cuando se conecta el circuito 1, antes de alcanzar el régimen estacionario, el flujo total de campo magnético, que el circuito 1 genera a través de la bobina del circuito 2, viene definido por la función:**

$$\phi(t) = 20 \cdot [1 - e^{-0{,}4 \cdot t}]$$

Donde ϕ se expresa en Wb y t en segundos. Calcular:

a) La expresión del módulo de la intensidad, en función del tiempo, que se origina en el circuito 2.

El flujo de campo magnético que se crea en la bobina de circuito 2 es causado por las líneas de campo magnético de la bobina del circuito 1 que se cierran por el exterior de ésta.

b) Dibujar la dirección de las líneas de campo que atraviesan la bobina del circuito 2. Indicar asimismo la dirección de la corriente inducida en el circuito 2. Para ello tener en cuenta la forma en la que están enrolladas las espiras de las bobinas.

Sol.: a) $|i(t)| = 0{,}80 \ \text{A} \cdot e^{-0{,}40 \cdot t}$; *b)* la corriente inducida en el circuito 2 tiene sentido horario.

8 **Un solenoide ideal de longitud $l = 10$ cm tiene N espiras. Cada espira presenta una superficie de área A = 10 cm². El bobinado tiene una resistencia óhmica $R = 0{,}15$ kΩ y un coeficiente de autoinducción, $L = 33$ mH. Se conecta el solenoide a una batería de tensión $V = 36$ V lo que hace que circule una corriente I que varía con el tiempo de acuerdo a $I = V/R \cdot (1 - e^{-R/L \cdot t})$. Determinar:**

a) El número de espiras, N, del solenoide.

b) La constante de tiempo, τ_L, de este circuito.

c) La corriente en el instante $t = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ s.

d) El valor que alcanza la corriente cuando llega al estado estacionario. Calcular en este caso la energía magnética almacenada en el solenoide.

e) La expresión del módulo de la fem inducida en función del tiempo.

Datos: $e^{-1} = 0{,}34$, $e^{-2} = 0{,}14$, $e^{-3} = 0{,}050$

Sol.: a) $N = 1620$ espiras; *b)* 0,22 ms; *c)* $i(t = 6{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{s}) = 0{,}23$ A; *d)* $I = 0{,}24$ A, $U = 0{,}95$ mJ; *e)* $\varepsilon(t) = V \cdot e^{-R/L \cdot t} = 36\text{V} \cdot e^{-t/0{,}22\ \text{ms}}$

CAPÍTULO

23

CORRIENTE ALTERNA

23.1 INTRODUCCIÓN

La tensión de los bornes de una fuente de corriente alterna cambia alternativamente de polaridad, a menudo de forma periódica. En este tema nos ceñiremos a tensiones de tipo senoidal, (como la tensión que recibimos en nuestros domicilios). Los valores de una tensión alterna senoidal vienen dados por la expresión:

$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

Como las funciones senoidales oscilan entre los valores 1 y -1, la tensión de alimentación oscilará entre los valores V_M y $-V_M$. El argumento del coseno es ωt donde ω es la frecuencia angular de la función y nos da información de lo rápida que es esta variación entre los valores máximos y mínimos. Si el periodo de esta función es T, la frecuencia será su inverso ($f = T^{-1}$). La relación entre la frecuencia, f, y la frecuencia angular, ω, es:

$$\omega = 2\pi f$$

Las respectivas unidades de la frecuencia y frecuencia angular son [f] = Hz, [ω] = rad/s.

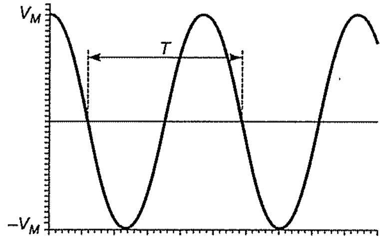


Figura 23.1

23.2. CIRCUITOS PUROS

CIRCUITO RESISTIVO PURO

La Figura 23.2 muestra el esquema de un circuito resistivo puro alimentado con una fuente de tensión alterna.

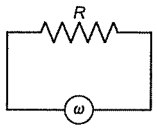


Figura 23.2

Para analizar el circuito se aplican las reglas de Kirchhoff. De esta forma se puede determinar la corriente que suministra la fuente si es conocida la tensión de alimentación:

$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{V_M}{R} \cdot \cos(\omega t) = I_M \cdot \cos(\omega t)$$

De las expresiones anteriores se deduce que en un circuito resistivo puro la tensión y la intensidad están en fase, o sea, los valores máximos y mínimos tanto para la intensidad como para la tensión se producen simultáneamente.

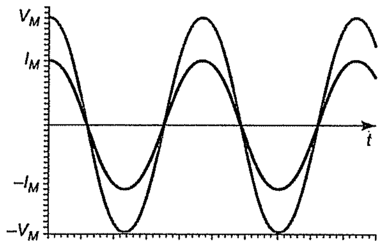


Figura 23.3

CIRCUITO CAPACITIVO PURO

La Figura 23.4 muestra el esquema de un circuito capacitivo puro alimentado con una fuente de tensión alterna $v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$.

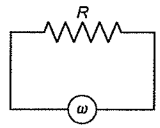


Figura 23.4

La corriente establecida en el circuito es:

$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$$

Donde $I_M = C \cdot V_M \cdot \omega$.

O sea, la intensidad y la tensión no están en fase. Cuando la tensión es máxima o mínima ($\omega t = n \cdot \pi/2$ con $n = 1, 3, 5, 7...$), la intensidad es nula. Se dice que la intensidad y la tensión están en cuadratura y, particularmente en este caso, la intensidad adelanta a la tensión en $\pi/2$ rad (90º).

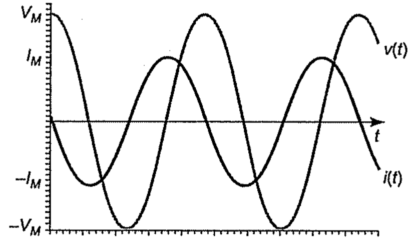


Figura 23.5

Se puede constatar que $1/C\omega$ tiene unidades de resistencia. Se define la reactancia capacitiva X_C:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

La reactancia capacitiva no es un valor constante, para cada circuito depende del valor de la frecuencia de la corriente alterna. Se puede interpretar como el equivalente a la resistencia de un condensador en un circuito de alterna. De esta forma, se puede poner:

$$X_C = \frac{V_M}{I_M}$$

CIRCUITO INDUCTIVO PURO

La Figura 23.6 muestra el esquema de un circuito inductivo puro alimentado con una fuente de tensión alterna $v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$.

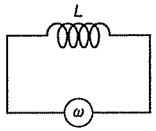


Figura 23.6

La corriente establecida en el circuito es:

$$i\,(t) = I_M \cos\,(\omega t - \pi/2)$$

Donde:

$$I_M = \frac{V_M}{L \cdot \omega}$$

Se puede comprobar que, en este caso, la intensidad y la tensión tampoco están en fase; cuando la tensión es máxima o mínima ($\omega t = n\ \pi/2$ con $n = 1, 3, 5, 7...$), la intensidad es nula. Aquí también la intensidad y la tensión están en cuadratura, pero en este caso, la intensidad está retrasada respecto a la tensión en $\pi/2$ rad (90°).

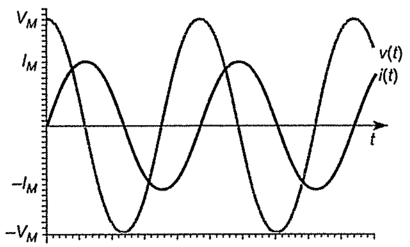


Figura 23.7

Se define la reactancia inductiva X_L:

$$X_L = L \cdot \omega$$

La reactancia inductiva es el equivalente a la resistencia de una bobina en un circuito de alterna y es función de la frecuencia de la corriente alterna. De esta forma, se puede poner:

$$X_L = \frac{V_M}{I_M}$$

23.3 REPRESENTACIÓN FASORIAL

Es un tanto complicado representar gráficamente la tensión o la intensidad de un circuito de corriente alterna ya que sus valores varían continuamente. Además esa representación debería poner de manifiesto los desfases entre intensidad y tensión cuando se produzcan (circuito capacitivo e inductivo).

El desfase entre las magnitudes eléctricas (V, I) es un *valor constante*, y si es posible hacer una representación de las mismas en un instante cualquiera, tendremos perfectamente definido el circuito.

Para representar las magnitudes alternas se utilizan los *diagramas fasoriales*. En ellos una determinada magnitud aparece representada mediante un fasor, esto es, un vector de módulo igual al valor máximo de la magnitud considerada que forma un ángulo ($\omega t + \varphi$) con el eje x. Este vector gira con una velocidad angular ω. El valor instantáneo de la magnitud es la proyección del fasor sobre el eje y.

CORRESPONDENCIA ENTRE LA REPRESENTACIÓN FASORIAL Y LA REPRESENTACIÓN PERIÓDICA

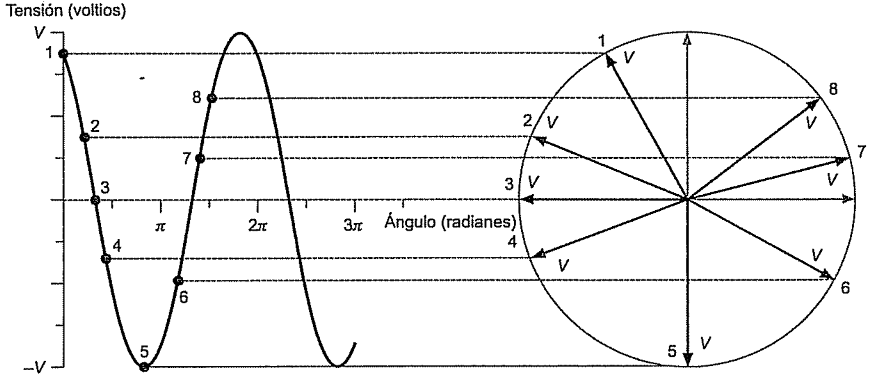
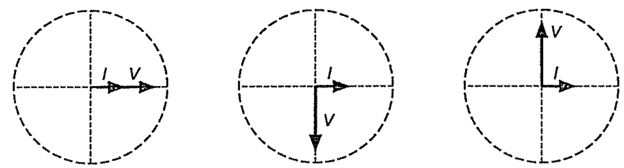


Figura 23.8

Ejemplos:

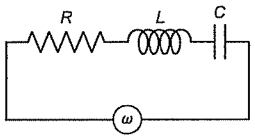
Circuito resistivo puro: Circuito capacitivo puro: Circuito inductivo puro:



23.4 CIRCUITO *RLC* SERIE

Al conectar a una fuente de corriente alterna un circuito serie compuesto por una resistencia, R, una bobina, L, y un condensador, C, la corriente que circula por el mismo será una función periódica también alterna de la que se va a poder diferenciar la respuesta transitoria y la estacionaria.

La que es más interesante para aplicaciones de la corriente alterna en la práctica es la respuesta estacionaria.



Si la fuente de corriente alterna que alimenta el circuito es $v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$, la corriente establecida en el circuito será: $i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t - \varphi)$.

Siendo:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}}$$

REPRESENTACIÓN FASORIAL DE UN CIRCUITO *RLC* SERIE

El desfase entre la corriente y la tensión de un circuito *RLC* serie se puede observar en la Figura 23.9. La tensión está adelantada a la corriente, por tanto el circuito es inductivo. El equivalente fasorial de ese circuito se muestra en la Figura 23.10.

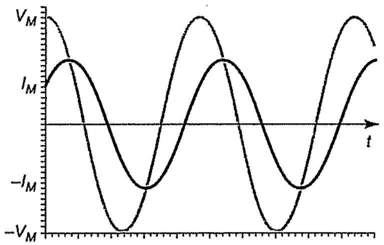


Figura 23.9

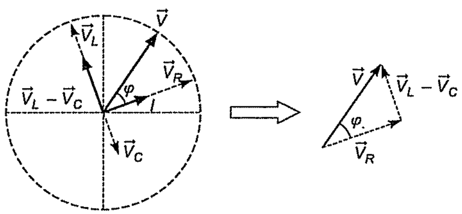


Figura 23.10

Para hacer la representación se ha elegido un instante en el que la intensidad tiene una orientación cualquiera, y a partir de ésta se dibujan la caída de tensión V_R en la resistencia (en fase con I), V_C en el condensador (retrasada $\pi/2$ rad con I), y V_L en la bobina (adelantada $\pi/2$ rad con I).

V es la tensión de alimentación del circuito y es la *suma fasorial* de las tres tensiones. V está desfasada un ángulo φ con la intensidad I. Si la tensión V está adelantada a la intensidad de corriente, como en este caso, se dice que el circuito es *inductivo*. Si por el contrario estuviese retrasada, el circuito sería *capacitivo*.

23.5. TRIÁNGULO DE TENSIONES. TRIÁNGULO DE IMPEDANCIAS

Del triángulo de tensiones de la Figura 23.10 se observa que:

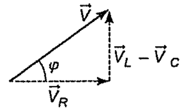


Figura 23.11

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

Como:

$$V_R = I \cdot R \qquad V_C = I \cdot X_C \qquad V_L = I \cdot X_L$$

La relación *V/I* depende sólo de los componentes del circuito y la frecuencia de la corriente alterna:

$$\frac{V_M^2}{I_M^2} = R^2 + (X_L - X_C)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_M}{I_M} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La *impedancia* Z de un circuito de corriente alterna se define:

$$Z = \frac{V_M}{I_M}$$

A partir del triángulo de tensiones, se obtiene el triángulo de impedancias:

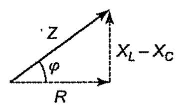


Figura 23.12

A partir de los triángulos de tensiones o impedancias se puede calcular el desfase de la tensión respecto a la corriente:

$$tg\ \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

IMPEDANCIA COMPLEJA

Los términos de la impedancia y el desfase de tensión respecto a la corriente permiten expresar la impedancia como un número complejo, $\overline{Z}$. Sea:

$$\overline{Z} = R + j\,(X_L - X_C) \quad (j = \sqrt{-1})$$

Su módulo y argumento son:

Módulo: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Argumento: $\varphi = arctg\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$

Otra forma de expresar el número complejo, $\bar{Z}$, es en la forma polar: $\bar{Z} = Z \angle \varphi$

23.6. RESONANCIA

La impedancia de un circuito serie formado por un condensador C, una bobina L y una resistencia R es:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$$

En función del valor de la frecuencia f de la fuente de corriente alterna, el circuito tendrá un valor de impedancia u otro. En un circuito *RLC* serie, la impedancia presenta un mínimo cuando las reactancias inductiva y capacitiva tienen el mismo valor. El mínimo se produce a la frecuencia natural o de resonancia f_0:

$$L \cdot \omega_0 = \frac{1}{C \cdot \omega_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Si un circuito serie está siendo alimentado por una fuente de corriente alterna con su frecuencia de resonancia, la impedancia de este circuito serie es mínima: $Z = R$.

Evidentemente si la impedancia es mínima, la intensidad del circuito es máxima:

$$I(f) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}}$$

$$I(f_0) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega_0 - \dfrac{1}{C \cdot \omega_0}\right)^2}} = \frac{V}{R}$$

Hay que observar que la única variable que varía es la frecuencia f, no la tensión V de la fuente.

23.7. POTENCIA. VALOR EFICAZ

Un circuito serie de corriente alterna puede presentar un desfase entre la intensidad y la tensión. De forma general:

$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

La potencia media disipada en un circuito serie es:

$$P = \frac{V_M \cdot I_M \cdot \cos\varphi}{2}$$

La potencia disipada únicamente por la resistencia es:

$$P = \frac{I_M^2 \cdot R}{2}$$

En corriente continua, la potencia consumida por una resistencia es $P = I^2 \cdot R$. La diferencia entre esta expresión y la hallada en el caso de una corriente alterna senoidal es el factor 2 del denominador. Se define la intensidad eficaz, I, y la tensión eficaz, V, como:

$$I^2 = \frac{I_M^2}{2} \qquad V^2 = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Y así:

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \qquad V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

La expresión de potencia en corriente alterna se reduce a:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Al factor *cos φ* se le conoce como *factor de potencia.*

Los voltímetros y amperímetros dan siempre el valor eficaz de la variable que se mide. Si no se indica lo contrario, nos referiremos siempre a valores eficaces.

Se puede observar que en un circuito capacitivo puro o inductivo puro, la potencia consumida es nula, ya que el factor de potencia es cero:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = I^2 \cdot Z \cdot \cos\varphi = I^2 \cdot R$$

En el caso de la impedancia, no se puede hablar de impedancia eficaz ya que la impedancia no es una variable temporal.

23.8. CIRCUITO PARALELO

En un circuito serie, la variable común a todos los componentes del circuito es la intensidad. En un circuito paralelo, la variable común a todas las ramas del circuito, es la tensión V.

En el estudio del circuito *RLC* serie se obtuvo el desfase de la tensión respecto a la intensidad mediante un diagrama fasorial. En un circuito paralelo como el de la Figura 23.13 es posible realizar un diagrama fasorial.

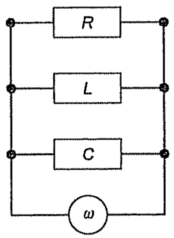


Figura 23.13

El diagrama fasorial del circuito paralelo representado en la Figura 23.13 será:

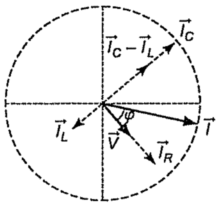


Figura 23.14

Donde:

I_R es la intensidad que pasa por la resistencia.
I_C es la intensidad que pasa por la capacidad.
I_L es la intensidad que pasa por la bobina.
I es la intensidad de corriente que suministra la fuente de alterna.
V es la tensión de la fuente, que coincide con la caída de tensión en cada elemento.

Luego en un circuito de corriente alterna en paralelo, la intensidad total que suministra la fuente es la suma fasorial de las intensidades de cada rama que componen el paralelo.

Sea un circuito paralelo de dos ramas donde cada una de ellas tiene una resistencia, una bobina y una capacidad. El circuito está alimentado por una fuente de alterna que suministra al circuito una tensión V y una intensidad de corriente I:

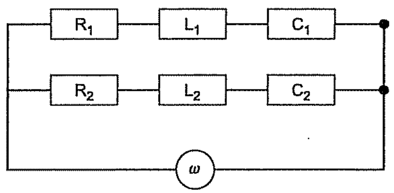


Figura 23.15

Si el circuito que se va a estudiar fuese un circuito serie, el desfase φ entre la intensidad y la tensión se podría obtener por medio de las expresiones ya conocidas. ¿Qué se puede hacer cuando hay dos ramas en paralelo? Estudiemos cada una de las ramas por separado:

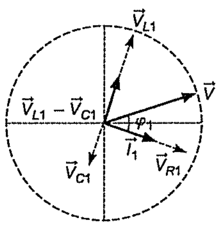


Figura 23.16

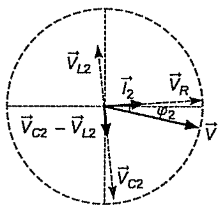


Figura 23.17

Se ha supuesto que la rama 1 es inductiva, mientras que la rama 2 es capacitiva. Por tanto hay que tener en cuenta que φ_1 *es positivo*, y φ_2 *es negativo*.

La única variable común a los dos circuitos es la tensión eficaz V. ¿Cuál será el diagrama fasorial del circuito paralelo? Lo veremos a continuación:

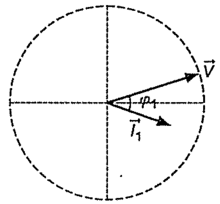


Figura 23.18

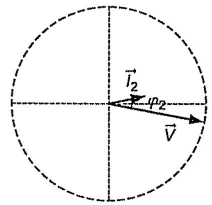


Figura 23.19

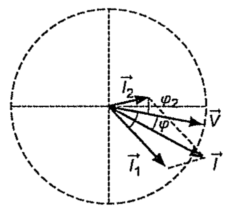


Figura 23.20

Del diagrama fasorial se comprueba que la intensidad total es la suma fasorial de las intensidades de cada rama.

Si de partida se conocen los valores de I_1, φ_1, I_2 y φ_2, se puede calcular la intensidad total I y el desfase φ de la tensión de alimentación respecto a la corriente total.

23.9. IMPEDANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO. ADMITANCIA

IMPEDANCIAS EN SERIE

La impedancia equivalente de un circuito compuesto por N elementos conectados todos ellos en serie es:

$$\overline{Z}_{eq.} = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z}_i = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_N$$

IMPEDANCIAS EN PARALELO

La impedancia equivalente de un circuito compuesto por N elementos conectados todos ellos en paralelo entre sí es:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq.}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\overline{Z}_i} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\overline{Z}_N}$$

ADMITANCIA

La admitancia, Y, es el inverso de la impedancia:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}}$$

Donde hay que tener presente que la impedancia es una expresión compleja:

$$\overline{Z} = R + j\,(X_L - X_C)$$

Por tanto:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + j\,(X_L - X_C)} = G + j\,B$$

Siendo:

G, la conductancia y su valor: $G = \dfrac{R}{Z^2}$

B, la susceptancia y su valor: $B = -\dfrac{(X_L - X_C)}{Z^2}$

Si se expresa la admitancia en forma polar:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{Z\angle\varphi} = \left(\frac{1}{Z}\right)\angle -\varphi$$

En el SI, la unidad de la admitancia, conductancia y susceptancia es:

$$[Y] = \Omega^{-1} \text{ (o } siemens\text{)}$$

23.10. TRANSFORMADORES

Un transformador es un equipo eléctrico que modifica la tensión y la corriente. La transformación de esta energía es de unas condiciones a otras de forma que pueda ser más útil su servicio. Un transformador no funciona en corriente continua estabilizada.

El transformador está compuesto por un bobinado primario definido por su número de espiras, N_1, y un bobinado secundario con un número de espiras, N_2. La energía eléctrica se introduce al transformador por el primario y sale por el secundario. El primario y el secundario suelen estar conectados por un circuito magnético, de material ferromagnético, en el que se establece un flujo magnético (generalmente) común a ambos bobinados.

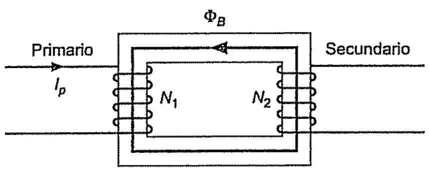


Figura 23.21

Un transformador ideal es aquel que no tiene pérdidas y por tanto su eficiencia es de un 100 %. En adelante se supondrá que todos los transformadores son ideales.

Si el transformador *trabaja en vacío*, esto es, con el secundario en circuito abierto, no habrá corriente por el secundario, pero sí que puede suministrar una diferencia de potencial entre los bornes del secundario. La relación entre las tensiones del primario y secundario es:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}, \text{ de donde } V_2 = V_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = V_1 \cdot \frac{1}{a}$$

a es la relación de espiras de transformador:

$$a = \frac{N_1}{N_2}$$

Si un transformador trabaja en carga, esto es, conectando una impedancia Z entre los bornes de su secundario, por el secundario se establecerá una corriente I_s.

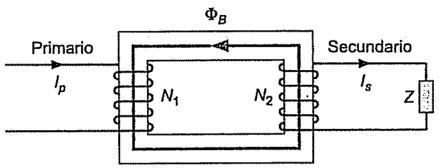


Figura 23.22

La relación entre las corrientes del primario y secundario se puede obtener teniendo en cuenta que el transformador transmite *instantáneamente* la potencia de primario a secundario:

$$P_1 = I_1\,V_1 = I_2\,V_2 = P_2$$

Y así:

$$I_2 = I_1\,\frac{V_1}{V_2} = I_1\,\frac{N_1}{N_2} = I_1\,a$$

Según sea el valor de la relación de espiras, $a > 1$ o $a < 1$, el transformador actúa como:

— Elevador de tensión (o reductor de corriente) si $a < 1$.
— Reductor de tensión (o elevador de corriente) si $a > 1$.

PROBLEMAS RESUELTOS

23.1. Un generador de corriente continua de 110 V y resistencia interior despreciable se conecta a una resistencia y una bobina (ideal), asociados en serie, y produce una corriente de 4,4 A. Si se sustituye este generador por otro de corriente alterna cuya fem eficaz tiene el mismo valor y frecuencia de 50 Hz, la corriente eficaz del circuito es la mitad que en el caso anterior. Calcular:

a) La resistencia del circuito.

b) La impedancia del circuito.

c) La autoinducción de la bobina.

d) La caída de tensión en la resistencia y en la bobina cuando están conectados al generador de alterna.

Solución

a) Cuando el circuito está alimentado por el generador de corriente continua, el solenoide, una vez concluido el transitorio, se comporta como un cortocircuito. Por tanto el circuito se reduce a un solo elemento, la resistencia, conectado al generador.

La resistencia del circuito tiene un valor:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110\,\mathrm{V}}{4{,}4\,\mathrm{A}} = 25{,}0\ \Omega$$

$$R = 25\ \Omega$$

b) Cuando el circuito se conecta a un generador de corriente alterna de 110 V, la intensidad que suministra es de 2,2 A. Por tanto la impedancia Z del circuito es:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{110\,\mathrm{V}}{2{,}2\,\mathrm{A}} = 50{,}0\ \Omega$$

$$Z = 50\ \Omega$$

c) A partir de los valores de impedancia y resistencia se puede calcular la autoinducción de la bobina:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$X_L = \sqrt{(50{,}0\ \Omega)^2 - (25{,}0\ \Omega)^2} = \sqrt{1{,}88 \cdot 10^3\ \Omega^2} = 43{,}3\ \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{43{,}3\ \Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50\ \mathrm{Hz}} = 0{,}138\ H$$

$$L = 0{,}14\ H$$

d) Las respectivas caídas de tensión en la resistencia y en el solenoide son:

$$V_R = I \cdot R = 2{,}2\ A \cdot 25\ \Omega = 55\ V$$

$$V_L = I \cdot X_L = 2{,}2\ A \cdot 43\ \Omega = 95\ V$$

23.2. Un circuito en serie está formado por una resistencia de 70 Ω, una bobina de 50 mH y un condensador de 1,0 μF. Se conecta a una fuente de fem $\varepsilon(t) = 17\ \mathrm{V} \cdot \cos(795 \cdot t)$. Calcular:

a) La tensión eficaz.

b) La impedancia del circuito.

c) La intensidad eficaz.

d) Desfase de la tensión respecto a la corriente.

e) La potencia consumida y el factor de potencia.

f) La frecuencia de resonancia de este circuito.

Solución

a) La tensión eficaz es:

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{17\ V}{\sqrt{2}} = 12{,}0\ V$$

b) La impedancia del circuito se puede calcular a partir de los componentes del mismo:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot 2 \cdot \pi \cdot f - \frac{1}{C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{(70\ \Omega)^2 + \left(50 \cdot 10^{-3}\ H \cdot 2 \cdot \pi \cdot 795\ \mathrm{Hz} - \frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 795\ \mathrm{Hz}}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{4{,}9 \cdot 10^3\ \Omega^2 + (250\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = \sqrt{4{,}9 \cdot 10^3\ \Omega^2 + 2{,}5 \cdot 10^3\ \Omega^2} = 86{,}0\ \Omega$$

c) Intensidad eficaz:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{12\ V}{86{,}0\ \Omega} = 0{,}139\ \mathrm{A}$$

$$I = 0{,}14\ \mathrm{A}$$

d) El ángulo de desfase entre la tensión y la corriente se puede determinar a partir de los valores de los componentes del circuito:

$$tg\ \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R} = \frac{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot f - \frac{1}{C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}}{R}$$

$$tg\ \varphi = \frac{2{,}5 \cdot 10^2\ \Omega - 2{,}0 \cdot 10^2\ \Omega}{70\ \Omega} = 0{,}714$$

$$\varphi = 35{,}5^\circ$$

e) El factor de potencia de este circuito es:

$$\cos \varphi = \cos 35{,}5^\circ = 0{,}81$$

Y la potencia consumida es:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 12\text{ V} \cdot 0{,}139\text{ A} \cdot 0{,}81 = 1{,}36\text{ W}$$

$$P = 1{,}4\text{ W}$$

La potencia también se podría haber calculado a partir de la expresión:

$$P = I^2 \cdot R = (0{,}139\text{ A})^2 \cdot 70\ \Omega = 1{,}36\text{ W}$$

$$P = 1{,}4\text{ W}$$

f) La frecuencia de resonancia de este circuito es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{50 \cdot 10^{-3}\text{ H} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ F}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2{,}0 \cdot 10^7\text{ s}^{-2}} = \frac{4{,}47 \cdot 10^3}{2\pi}\text{ Hz} = 712\text{ Hz}$$

$$f_0 = 7{,}1 \cdot 10^2\text{ Hz}$$

23.3. A un circuito *RLC* en serie, cuya autoinducción vale 0,15 H, se le aplica una tensión alterna de 50 Hz. Se determina la caída de tensión en cada elemento y resulta: 60 V en *R*; 130 V en *L* y 50 V en *C*. Calcular:

a) La tensión aplicada al circuito.

b) El desfase de la tensión respecto a la intensidad. Realizar el diagrama fasorial.

c) La impedancia del circuito.

d) Los valores de *R* y *C*.

e) La potencia disipada en el circuito.

Solución

a) Si son conocidas las caídas de tensión de todos los elementos que forman la serie, se puede determinar la tensión total de alimentación:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(60\ V)^2 + (130\ V - 50\ V)^2}$$

$$V = \sqrt{3\,600\ V^2 + 6400\ V^2} = \sqrt{10\,000\ V^2} = 100\ V$$

b) Desfase de la tensión respecto a la intensidad:

$$tg\ \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{130\text{ V} - 50\text{ V}\Omega}{60\text{ V}} = 1{,}33$$

$$\varphi = 53{,}1°$$

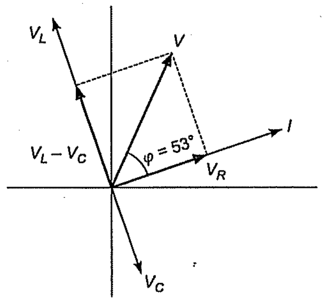


Figura 23.23

c) Para calcular la impedancia del circuito es necesario calcular la corriente del circuito. El valor de la corriente se puede calcular ya que:

$$V_L = I \cdot X_L \Rightarrow I = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_L}{L \cdot \omega}$$

$$I = \frac{V_L}{L \cdot \omega} = \frac{130\ V}{0{,}15\text{ H} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\text{ rad/s}} = \frac{130\text{ V}}{47\ \Omega} = 2{,}76\ A$$

$$I = 2{,}8\ A$$

Así el valor de la impedancia *Z* es:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{100\text{ V}}{2{,}76\text{ A}} = 36{,}2\ \Omega$$

d) Ahora se puede determinar el valor de *R*:

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{60\text{ V}}{2{,}76\text{ A}} = 21{,}8\ \Omega$$

$$R = 22\ \Omega$$

Y el valor de *C*:

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{50\text{ V}}{2{,}76\text{ A}} = 18{,}1\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{18{,}1\ \Omega \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\text{ rad/s}} = \frac{1}{5{,}69 \cdot 10^3\ \frac{\Omega}{\text{s}}} = 176\ \mu F$$

$$C = 0{,}18\ mF$$

e) La potencia disipada en el circuito es:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 100\text{ V} \cdot 2{,}76\text{ A} \cdot \cos 53{,}1° = 166\text{ W}$$

$$P = 0{,}17\text{ kW}$$

23.4. Un circuito se compone de dos ramas en paralelo alimentadas por un generador de 24 V. La primera rama tiene una resistencia de 50 Ω y una bobina de 25 Ω. La segunda rama tiene una resistencia de 36 Ω y un condensador de 120 Ω. Calcular:

a) La impedancia y admitancia complejas de cada rama.

b) Las corrientes que pasan por cada rama.

c) Los desfases de la tensión respecto de la corriente en cada rama.

d) La corriente suministrada por la fuente.

e) La potencia disipada en el circuito.

f) Dibujar los diagramas vectoriales de cada rama.

Solución

a) La impedancia de la rama 1 en formas binómica y polar es:

$$\overline{Z}_1 = 50\ \Omega + j\,25\ \Omega = 55{,}9\ \Omega \angle 26{,}6^\circ$$

Por tanto la admitancia de la rama 1 es:

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{55{,}9\ \Omega \angle 26{,}6^\circ} = \left(\frac{1}{55{,}9\ \Omega}\right) \angle -26{,}6^\circ = 16 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} - j\,8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$$

De igual forma, para la rama 2:

$$\overline{Z}_2 = 36\ \Omega - j\,1{,}2 \cdot 10^2\ \Omega = 1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega \angle -73{,}3^\circ$$

Por tanto la admitancia de la rama 2 es:

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega \angle -73{,}3^\circ} = \left(\frac{1}{1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega}\right) \angle 73{,}3^\circ = 2{,}29 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} + j\,7{,}64 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}$$

b) La corriente de la rama 1 es:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} = V \cdot \overline{Y}_1 = 24\ \text{V} \angle 0^\circ \cdot \left(\frac{1}{55{,}9\ \Omega}\right) \angle -26{,}6^\circ = \left(\frac{24\ V}{55{,}9\ \Omega}\right) \angle (0 - 26{,}6^\circ) = 0{,}429\ A \angle -26{,}6^\circ$$

Donde hay que tener presente que se ha tomado como referencia de desfase a la tensión ya que se han tomado orígenes de ángulos en la tensión: $V = 24\ \text{V} \angle 0^\circ$. Así la corriente de la rama 1 está retrasada 27° a la tensión.

Corriente de la rama 2:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2} = \overline{V} \cdot \overline{Y}_2 = 24\ V \angle 0^\circ \cdot \left(\frac{1}{1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega}\right) \angle 73{,}3^\circ = \left(\frac{24\ V}{1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega}\right) \angle (0 + 73{,}3^\circ) = 0{,}192\ \text{A} \angle 73{,}3^\circ$$

En esta ocasión la corriente está adelantada 73° a la tensión.

c) A partir de los resultados del apartado *b)*, la tensión está adelantada 27° a la corriente de la rama 1 y retrasa 73° respecto a la corriente de la rama 2.

d) Para calcular la corriente total, se determinará la admitancia total del circuito:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = \left(\frac{1}{55{,}9\ \Omega}\right) \angle -26{,}6^\circ + \left(\frac{1}{1{,}25 \cdot 10^2\ \Omega}\right) \angle 73{,}3^\circ$$

$$\overline{Y} = 18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} - j\,0{,}347 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} = (18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}) \angle -1{,}08^\circ$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{(18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}) \angle -1{,}08^\circ} = 54{,}6\ \Omega \angle 1{,}1^\circ$$

Ahora:

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \overline{V} \cdot \overline{Y} = 24\ \text{V} \angle 0^\circ \cdot (18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} \angle -1{,}08^\circ) = (24\ V \cdot 18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}) \angle (0 - 1{,}08^\circ)$$

$$\overline{I}_T = 0{,}439\ \text{A} \angle -1{,}1^\circ$$

e) El desfase entre la tensión y la corriente total es de 1,1° (inductivo). Por tanto la potencia consumida por el circuito es:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 24\ V \cdot 0{,}439\ \text{A} \cdot \cos(1{,}1^\circ) = 10{,}5\ \text{W}$$

f) Diagramas fasoriales:

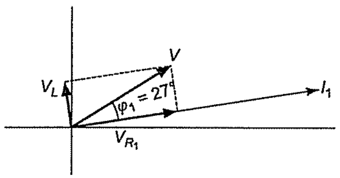


Figura 23.24

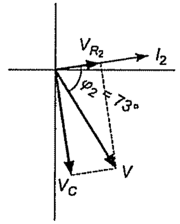


Figura 23.25

23.5. Un circuito en paralelo consta de dos ramas, la primera está formada por una bobina de 33 mH, una capacidad de 2,2 μF y una resistencia de 5,0 Ω; la segunda por un condensador de 22 μF y una resistencia de 8,0 Ω. Este conjunto se conecta a una fuente de 18 V de tensión y 600 Hz de frecuencia. Calcular:

a) La corriente y el desfase en cada rama.

b) La corriente total.

c) El factor de potencia.

d) La potencia consumida en cada rama y la potencia total suministrada.

Si se cambia la frecuencia de la fuente hasta conseguir que la rama 1 se encuentre en resonancia. Determinar:

e) El valor de la frecuencia de resonancia de la rama 1.

f) La corriente de cada rama y la suministrada por la fuente.

Solución

a) La impedancia de las ramas 1 y 2 son:

$$\overline{Z}_1 = 5{,}0\ \Omega + j\left((33 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 600)\ \Omega - \left(\frac{1}{2{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 600}\right)\right)\Omega$$

$$\overline{Z}_1 = 5{,}0\ \Omega + j\,(124{,}4\ \Omega - 120{,}6\ \Omega)$$

$$\overline{Z}_1 = 5{,}0\ \Omega + j\,(3{,}84\ \Omega) = 6{,}30\ \Omega \angle 37{,}5^\circ$$

$$\overline{Z}_2 = 8{,}0\ \Omega + j\left(-\frac{1}{22 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 600}\ \Omega\right) = 8{,}0\ \Omega - j\,12{,}1\ \Omega$$

$$Z_2 = 14{,}5\ \Omega \angle -56{,}4^\circ$$

Por tanto las corrientes de las ramas 1 y 2 son:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} = \frac{18\ V \angle 0^\circ}{6{,}30\ \Omega \angle 37{,}5^\circ} = \left(\frac{18\ V}{6{,}30\ \Omega}\right) \angle (0^\circ - 37{,}5^\circ) = 2{,}86\ A \angle -37{,}5^\circ$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2} = \frac{18\ V \angle 0^\circ}{14{,}5\ \Omega \angle -56{,}4^\circ} = \left(\frac{18\ V}{14{,}5\ \Omega}\right) \angle (0^\circ - (-56{,}4^\circ)) = 1{,}24\ A \angle 56{,}4^\circ$$

b) Para calcular la corriente total, se determinará la admitancia del circuito:

$$Y = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = \left(\frac{1}{6{,}30\ \Omega}\right) \angle -37{,}5^\circ + \left(\frac{1}{14{,}5\ \Omega}\right) \angle 56{,}4^\circ$$

$$\overline{Y} = 0{,}164\ \Omega^{-1} - j\,3{,}92 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1} = (0{,}169\ \Omega^{-1}) \angle -13{,}4^\circ$$

Ahora:

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \overline{V} \cdot \overline{Y}_T = 18\ V \angle 0^\circ \cdot (0{,}169\ \Omega^{-1}) \angle -13{,}4^\circ = 3{,}0\ A \angle -13{,}4^\circ$$

c) Factor de potencia:

$$\cos \varphi = \cos(-13{,}4^\circ) = 0{,}973$$

d) Potencia consumida en cada rama:

$$P_1 = V \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 18\ V \cdot 2{,}86\ A \cdot \cos(-37{,}5^\circ) = 40{,}8\ W$$

$$P_2 = V \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 18\ V \cdot 1{,}24\ A \cdot \cos(56{,}4^\circ) = 12{,}4\ W$$

Y potencia total consumida por el circuito:

$$P_T = P_1 + P_2 = 40{,}8\ W + 12{,}4\ W = 53{,}2\ W$$

e) La rama 1 se encuentra en resonancia a la frecuencia f_0:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{33 \cdot 10^{-3}\ H \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}\ F}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1{,}38 \cdot 10^7\ s^{-2}} = \frac{3{,}71 \cdot 10^3\ rad/s}{2\pi}$$

$$f_0 = 590\ Hz$$

f) A la frecuencia de resonancia de la rama 1, las corrientes de cada rama son:

$$\overline{I}_1' = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1'} = \frac{\overline{V}}{R_1} = \frac{18\ V \angle 0^\circ}{5{,}0\ \Omega \angle 0^\circ} = 3{,}6\ A \angle 0^\circ$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2'} = \frac{18\ V \angle 0^\circ}{14{,}6\ \Omega \angle -56{,}9^\circ} = \left(\frac{18\ V}{14{,}6\ \Omega}\right) \angle (0^\circ - (-56{,}9^\circ)) = 1{,}23\ A \angle 56{,}9^\circ$$

La corriente suministrada por la fuente en estas condiciones es:

$$\overline{I}_T = \overline{I}_1' + \overline{I}_2' = 3{,}6\ A \angle 0^\circ + 1{,}23\ A \angle 56{,}9^\circ = 4{,}27\ A + j\,1{,}03\ A = 4{,}39\ A \angle 13{,}6^\circ$$

23.6. Una fuente de corriente alterna de 220 V y 50 Hz suministra corriente a un motor de 1,1 kW a través de una línea resistiva de 2,0 Ω. El factor de potencia del motor en las condiciones de trabajo es $\cos \phi = 0{,}82$.

a) Realizar un diagrama fasorial en el que se represente las caídas de tensión en la línea y en el motor, la tensión de la fuente y la corriente suministrada por la fuente.

Calcular:

b) La potencia disipada en la línea.

c) La impedancia compleja del motor.

A fin de corregir el factor de potencia se conecta en paralelo con el motor una batería de condensadores de 67 μF de capacidad. Calcular:

d) El factor de potencia del conjunto así formado.

e) La corriente que pasa ahora por la línea.

f) La potencia disipada en la línea.

Solución

a) En la Figura 23.26 se muestra la corriente I, la caída de tensión en la línea V_l (en fase con la corriente), la caída de tensión en el motor V_M (adelantada a la corriente ya que un motor es de naturaleza inductiva) y la tensión de la fuente, V.

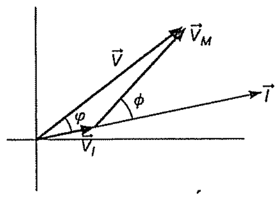


Figura 23.26

b) A partir del diagrama fasorial del apartado *a)*, se puede comprobar que la tensión de la fuente es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: $V_M \cdot \operatorname{sen} \phi$, y $V_l + V_M \cdot \cos \phi$. Por tanto se puede poner:

$$V^2 = (V_l + V_M \cdot \cos \phi)^2 + (V_M \cdot \operatorname{sen} \phi)^2 = V_l^2 + 2 \cdot V_l \cdot V_M \cdot \cos \phi + V_M^2 \cdot \cos^2 \phi + V_M^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$V^2 = V_l^2 + V_M^2 + 2 \cdot V_l \cdot V_M \cdot \cos \phi$$

De los datos del problema, se entiende que en la línea y en el motor se producen las respectivas caídas de tensión:

$$V_l = I \cdot R = 2{,}0 \cdot I$$

$$V_M = \frac{P}{I \cdot \cos\phi} = \frac{1{,}1 \text{ kW}}{I \cdot 0{,}82} = 1{,}34 \cdot 10^3\, W \cdot \frac{1}{I}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de tensiones se obtiene:

$$V^2 = V_l^2 + V_M^2 + 2 \cdot V_l \cdot V_M \cdot \cos\phi$$

$$(220\, V)^2 = (2 \cdot I)^2 + \left(1{,}34 \cdot 10^3\, W \cdot \frac{1}{I}\right)^2 + 2 \cdot (2 \cdot I) \cdot \left(1{,}34 \cdot 10^3\, W \cdot \frac{1}{I}\right) \cdot 0{,}82$$

Ecuación cuya única incógnita es la corriente, que tras operar se obtienen dos posibles soluciones:

$$I_1 = 6{,}41 \text{ A} \qquad I_2 = 105 \text{ A}$$

Aunque las dos soluciones son matemáticamente posibles, sólo tiene cierta lógica el valor de I_1, ya que la otra solución nos dice que la tensión de la fuente cae, prácticamente en su totalidad en la línea, como si se tratara de un cortocircuito.

Por tanto, la caída de tensión en la línea es:

$$V_l = I \cdot R = 6{,}41 \cdot 2{,}0\ \Omega = 12{,}8 \text{ V}$$

Y la potencia disipada en la línea es:

$$P_l = I^2 \cdot R = (6{,}41\, A)^2 \cdot 2\ \Omega = 82{,}1 \text{ W}$$

c) Para calcular la impedancia compleja del motor calcularemos antes la caída de tensión en el motor:

$$V_M = \frac{P}{I \cdot \cos\phi} = \frac{1{,}1 \text{ kW}}{6{,}41 \text{ A} \cdot 0{,}82} = 2{,}09 \cdot 10^2 \text{ V}$$

Si se tiene en cuenta que el motor es de naturaleza inductiva y que, si se toma como referencia la corriente (su argumento nulo), en función de la Figura 23.26, la tensión debe estar en adelanto el ángulo ϕ, por tanto:

$$\phi = \arccos(0{,}82) = 34{,}9°$$

Así la impedancia compleja del motor es:

$$\overline{Z_M} = \frac{\overline{V_M}}{\overline{I}} = \frac{2{,}09 \cdot 10^2\, V \angle 34{,}9°}{6{,}41\, A \angle 0°} = 32{,}7\ \Omega \angle 34{,}9°$$

d) Si se coloca en paralelo al motor una batería de condensadores de 67 μF, la reactancia capacitiva que se pone en paralelo con el motor tiene un valor:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{67 \cdot 10^{-6}\, \text{F} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 47{,}5\ \Omega$$

La impedancia equivalente del sistema compuesto por el motor en paralelo con la batería de condensadores es:

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z_M}} + \frac{1}{\overline{Z_C}} = \frac{1}{32{,}7\ \Omega \angle 34{,}9°} + \frac{1}{47{,}5\ \Omega \angle -90°} = \left(\frac{1}{32{,}7\ \Omega}\right) \angle -34{,}9° + \left(\frac{1}{47{,}5\ \Omega}\right) \angle 90°$$

$$\frac{1}{\overline{Z}} = 2{,}51 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1} + j\, 3{,}54 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} = 2{,}53 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1} \angle 8{,}04°$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{(2{,}53 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1}) \angle 8{,}04°} = 39{,}5\ \Omega \angle -8{,}04°$$

El factor de potencia del sistema es ahora:

$$\cos(-8{,}04°) = 0{,}990$$

e) La impedancia total, teniendo en cuenta la línea es:

$$\overline{Z_F} = R_l + \overline{Z} = 2{,}0\ \Omega + 39{,}5\ \Omega \angle -8{,}04° = 41{,}1\ \Omega - j\, 5{,}47\ \Omega$$

$$\overline{Z_F} = 41{,}5\ \Omega \angle -7{,}58°$$

La corriente suministrada por la fuente es:

$$I_F = \frac{\overline{V}}{\overline{Z_F}} = \frac{220 \text{ V} \angle 0°}{41{,}5\ \Omega \angle -7{,}58°} = \left(\frac{220 \text{ V}}{41{,}5\ \Omega}\right) \angle 7{,}58° = 5{,}3 \text{ A} \angle 7{,}58°$$

$$\overline{I_F} = 5{,}3 \text{ A} \angle 7{,}58°$$

Hay que resaltar que en el cálculo de la corriente, se ha tomado como origen de ángulos la tensión de alimentación (220 V $\angle$ 0°). Como el ángulo de desfase obtenido es positivo, la corriente final adelanta a la tensión en 7,6°, teniendo por tanto el sistema un comportamiento ligeramente capacitivo.

Se puede comprobar también que, al colocar la batería de condensadores en paralelo, la fuente suministra al sistema una corriente inferior a la que teníamos de inicio. Sin embargo este cambio en la corriente de línea no afecta al motor ya que por él siguen pasando los 6,4 A.

23.7. En la Figura 23.27 se muestra un transformador que se considera ideal. El primario del transformador tiene N_1 espiras y se halla a un potencial V_1. El secundario del transformador tiene N_2 espiras y está en circuito abierto.

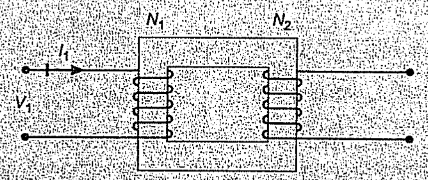


Figura 23.27

a) ¿Cuál es la relación de transformación de este transformador?

b) ¿Cuál será en estas condiciones el potencial V_2 del secundario?

Teniendo en cuenta el sentido de las espiras en la figura:

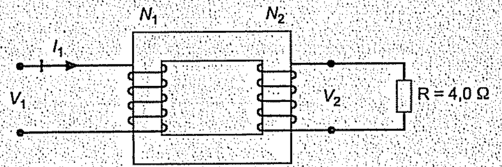


Figura 23.28

c) ¿En qué sentido se establece el campo magnético en el núcleo del transformador?, ¿cuál será la polaridad en los terminales del secundario?

Se conecta al secundario del transformador una línea resistiva de 4,0 Ω. Por el primario pasa, en esas condiciones, una corriente $I_1 = 40$ A.

d) ¿Qué valor tiene la corriente que suministra el secundario?

Datos: $N_1 = 60$, $N_2 = 1\,100$, $V_1 = 2{,}2 \cdot 10^2$ V

Solución

a) La relación de transformación, a, es:

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{60}{1{,}1 \cdot 10^3} = 5{,}45 \cdot 10^{-2}$$

b) En un transformador ideal, la relación entre las tensiones del primario y secundario es:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

Y así:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = V_1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{2{,}2 \cdot 10^2\ V}{5{,}45 \cdot 10^{-2}} = 4{,}03 \text{ kV}$$

$$V_2 = 4{,}0 \text{ kV}$$

c) Con el sentido de la corriente en el primario y la disposición de sus espiras, el campo magnético se establece en el núcleo con sentido antihorario.

El campo magnético, al atravesar las espiras del secundario, originará una fem inducida que se opondrá al establecimiento de dicho campo. Si el secundario se encontrara en circuito cerrado, por él se establecería una corriente que intentaría crear un campo magnético en el núcleo en sentido horario. Viendo el sentido de las espiras, la corriente ascendería desde abajo hacia arriba por la bobina del secundario. Como las corrientes eléctricas van de potenciales altos a potenciales bajos, el terminal del secundario que se halla a mayor potencial es el inferior (ver Figura 23.30).

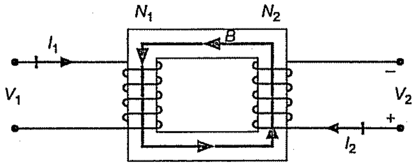


Figura 23.29

d) Al conectar el secundario a una línea resistiva de 4,0 Ω, por él pasará una corriente:

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} = I_1 \cdot a = 40 \text{ A} \cdot 5{,}45 \cdot 10^{-2} = 2{,}18 \text{ A}$$

23.8. Un sistema de potencia consta de un generador de 600 V a 50 Hz. El generador alimenta una carga compuesta por motores de valor $Z_C = 2{,}40\ \Omega \angle 35°$ a través de una línea de transmisión de impedancia $Z_l = 0{,}412\ \Omega \angle 76°$. Determinar:

a) La impedancia total que está alimentando el generador.

b) La caída de tensión y la potencia disipada en la línea de transmisión.

Para reducir las pérdidas en la línea de transmisión se coloca un transformador elevador de tensión a la salida del generador y otro trasformador reductor de tensión al final de la línea. La relación de transformación del transformador elevador es: $a = 0{,}01$. Determinar:

c) La corriente que pasará ahora por la línea.

d) La caída de tensión en la línea de transmisión.

e) La potencia disipada en la línea de transmisión.

Solución

a) La impedancia total que está alimentando el generador es:

$$\overline{Z}_T = \overline{Z}_C + \overline{Z}_l = 2{,}40\ \Omega \angle 35° + 0{,}412\ \Omega \angle 76° = 2{,}07\ \Omega + j\,1{,}78\ \Omega;$$

$$\overline{Z}_T = 2{,}72\ \Omega \angle 40{,}7°$$

b) La corriente que suministra el generador es:

$$\overline{I} = \frac{600\ V \angle 40{,}7°}{2{,}72\ \Omega \angle -40{,}7°} = 220 \text{ A} \angle 0°$$

La caída de tensión en la línea de transmisión es:

$$\overline{V}_l = \overline{I}_l \cdot \overline{Z}_l = (220 \text{ A} \angle 0°) \cdot (0{,}412\ \Omega \angle 76°) = (220 \text{ A} \cdot 0{,}412\ \Omega) \angle 76°$$

$$\overline{V}_l' = 90{,}7 \text{ V} \angle 76°$$

La potencia disipada en la línea de transmisión es:

$$R_l = Z_l \cdot \cos 76 = 0{,}412\ \Omega \cdot \cos 76 = 99{,}7\ \text{m}\,\Omega$$

$$P = I^2 \cdot R_l = (220\ \text{A})^2 \cdot 99{,}7\ m\Omega = 4{,}83\ \text{kW}$$

c) Si se coloca un elevador de tensión a la salida del generador, el módulo de la corriente que pasará por la línea es:

$$I'_l = I \cdot a = 220\ \text{A} \cdot 0{,}01 = 2{,}20\ \text{A}$$

Si el transformador es ideal, el desfase entre tensión y corriente no cambia:

$$I'_l = 2{,}20\ \text{A} \angle -0°$$

d) La caída de tensión en la línea de transmisión es:

$$\overline{V}'_l = \overline{I}'_l \cdot \overline{Z}_l = (2{,}20\ A \angle -0°) \cdot (0{,}412\ \Omega \angle 76°) = (2{,}20\ A \cdot 0{,}412\ \Omega) \angle 76°$$

$$V'_l = 0{,}907\ \text{V} \angle 76°$$

e) La potencia disipada ahora en la línea de transmisión es:

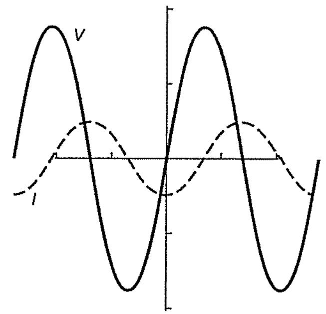
$$P = (I'_l)^2 \cdot R_l = (2{,}20\ \text{A})^2 \cdot 99{,}7\ m\Omega = 0{,}48\ \text{W}$$

Se puede observar que las pérdidas por efecto Joule han disminuido en un factor 10^4.

Al colocar un transformador elevador de tensión a la salida del generador, se consigue disminuir las pérdidas en la línea de transmisión. Al final de la línea, un transformador reductor de tensión con idéntica relación de transformación consigue que la carga final trabaje, sin afectarla, en las mismas condiciones que en ausencia de transformadores.

CUESTIONES

23.1. En la gráfica, se muestra un oscilograma. En el Canal I del osciloscopio (en línea continua) se representa la tensión de alimentación de un circuito serie de corriente alterna. En el Canal II del osciloscopio (en línea discontinua) se muestra la caída de tensión de la resistencia del circuito (de valor muy pequeño y proporcional a la corriente del circuito). Es correcto afirmar que:



a) La gráfica muestra el comportamiento de un circuito resistivo puro.

b) La intensidad adelanta a la tensión prácticamente en 90°.

c) El Canal I está retrasado prácticamente 90° respecto al Canal II.

d) El circuito es inductivo.

23.2.1. Un circuito de corriente alterna está formado por una resistencia $R = 110\ \Omega$, una autoinducción L y un condensador C conectados en serie. Con un polímetro medimos las caídas de tensión en los tres componentes, $V_R = 2{,}2$ V, $V_L = 5{,}0$ V y $V_C = 2{,}0$ V. La tensión que suministra la fuente es de:

a) 3,7 V *b)* 9,2 V *c)* 14 V *d)* 2,2 V

23.2.2. La intensidad de corriente en el circuito tiene un valor de:

a) 34 mA *b)* 20 mA *c)* 84 mA *d)* 50 mA

23.3. La corriente de un circuito formado por dos componentes pasivos asociados en serie está adelantada 45° respecto a la tensión cuando $\omega = 2{,}0 \cdot 10^2$ rad/s. Uno de los componentes es una resistencia de 2,0 kΩ. El otro componente es:

a) Una resistencia de 2,0 kΩ.

b) Una bobina de $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mH.

c) Un condensador de 2,5 μF.

d) Un condensador de 20 μF.

23.4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Una corriente alterna en una resistencia no disipa energía porque la corriente pasa de positivo a negativo con la misma frecuencia.

b) En un circuito de corriente alterna, a frecuencias muy elevadas, un condensador actúa como un cortocircuito.

c) En un circuito de corriente alterna, a frecuencias muy elevadas, una bobina actúa como un cortocircuito.

d) Si un circuito de corriente alterna está en resonancia, la intensidad de corriente que suministra la fuente será mínima.

23.5. Dado un circuito serie *RLC* de corriente alterna del que se conoce el valor de *R*, de *L*, de *C* y la frecuencia *f* de trabajo, que se mantiene constante. La impedancia *Z* del circuito en este caso:

a) Depende de la tensión máxima de alimentación del circuito.

b) Depende de la intensidad máxima del circuito.

c) Es constante.

d) Es una función senoidal.

23.6. Considerar un circuito *RLC* serie por el que circula una intensidad de corriente de 4,0 A. Se han medido las caídas de tensión en la resistencia, bobina y condensador. Los resultados obtenidos son: $V_R = 120$ V, $V_L = 50$ V y $V_C = 70$ V. ¿Cuál es la impedancia compleja del circuito?

a) $30\ \Omega - j\,5{,}0\ \Omega$ *b)* $59\ \Omega + j\,9{,}9\ \Omega$ *c)* $35\ \Omega$ *d)* $24\ \Omega + j\,14\ \Omega$

23.7.1. A un circuito *RLC* en serie, cuya reactancia inductiva es de 30 Ω, se le aplica una tensión alterna de 50 Hz. Se determina la caída de tensión eficaz en cada elemento y resulta: 80 V en *R*; 120 V en *L* y 60 V en *C*. La tensión eficaz aplicada al circuito es:

a) $2{,}6 \cdot 10^2$ V *b)* $1{,}4 \cdot 10^2$ V *c)* $1{,}0 \cdot 10^2$ V *d)* 72 V

23.7.2. La intensidad eficaz del circuito es:

a) Imposible de calcular. *b)* 4,0 A *c)* 3,3 A *d)* 8,7 A

23.7.3. Los valores de la resistencia *R* y de la reactancia capacitiva X_C son:

a) $R = 9{,}2\ \Omega$, $X_C = 15\ \Omega$ *c)* $R = 9{,}2\ \Omega$, $X_C = 6{,}9\ \Omega$

b) $R = 20\ \Omega$, $X_C = 6{,}9\ \Omega$ *d)* $R = 20\ \Omega$, $X_C = 15\ \Omega$

23.7.4. La impedancia del circuito es:

a) $Z = 25\ \Omega$ *b)* $Z = 12\ \Omega$ *c)* $Z = 30\ \Omega$ *d)* $Z = 65\ \Omega$

23.8. En un circuito *RLC* en serie que está en resonancia se cumple:

a) La impedancia es máxima y la corriente mínima.

b) La caída de tensión en la bobina y en el condensador son siempre iguales en módulo.

c) La impedancia y la corriente son mínimas.

d) La caída de tensión en la resistencia, en la bobina y en el condensador son siempre iguales en módulo.

23.9. Se quiere simular el comportamiento de un receptor doméstico de radio de onda media, cuyas frecuencias varían entre los 600 Hz y los 1 600 Hz. Si el circuito serie tiene un solenoide de 33 mH, ¿cuál es el rango de valores que debe cubrir un condensador variable para permitir la recepción de radio?

a) Entre 1,9 μF y 13 μF. *c)* Entre 0,30 μF y 2,1 μF.

b) Entre 12 μF y 84 μF. *d)* Entre 19 μF y 51 μF.

23.10.1. En un circuito serie de corriente alterna formado por una resistencia $R = 120\ \Omega$, un condensador *C* y una bobina *L*, pasa una intensidad de corriente de 25 mA. Se miden las caídas de tensión en cada componente, obteniéndose los valores: $V_R = 3{,}0$ V, $V_L = 8{,}0$ V, $V_C = 4{,}0$ V.

a) El circuito está en resonancia.

b) El circuito es capacitivo.

c) El circuito es inductivo.

d) Es necesario conocer el valor de la frecuencia para saber si está en resonancia.

23.10.2. El desfase de la tensión de alimentación respecto de la corriente es:

a) 53° *b)* 37° *c)* 69° *d)* 21°

23.10.3. La impedancia del circuito es:

a) $1{,}3 \cdot 10^2\ \Omega$ *b)* $2{,}8 \cdot 10^2\ \Omega$ *c)* $5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \Omega$ *d)* $2{,}0 \cdot 10^2\ \Omega$

23.11. Una fuente de corriente alterna de 220 V y 50 Hz suministra una corriente de 2,4 A a un motor de 40 Ω de resistencia y 0,25 mH de autoinducción. El cable que une la fuente al motor tiene una resistencia de 7,0 Ω. Las pérdidas en la línea tienen un valor de:

a) 40 W *b)* $1{,}2 \cdot 10^2$ W *c)* $2{,}3 \cdot 10^2$ W *d)* $2{,}4 \cdot 10^2$ W

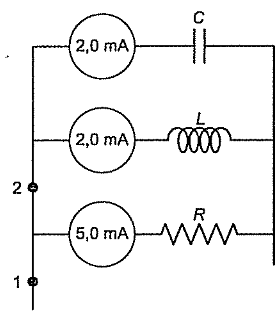
23.12.1. Un circuito serie de corriente alterna formado por una resistencia $R = 1{,}1 \cdot 10^2\ \Omega$, una autoinducción $L = 80$ mH y una batería de condensadores de capacidad $C = 3{,}2\ \mu$F se alimenta con una fuente de 3,7 V de $5{,}0 \cdot 10^2$ Hz. La potencia disipada en el circuito es de:

a) 60 mW *b)* $1{,}1 \cdot 10^2$ mW *c)* 36 mW *d)* 43 mW

23.12.2. La frecuencia de resonancia de este circuito es:

a) $5{,}0 \cdot 10^2$ Hz *b)* $3{,}9 \cdot 10^6$ Hz *c)* $3{,}1 \cdot 10^2$ Hz *d)* 50 Hz

23.13.1. Se han colocado tres amperímetros en el circuito de la figura. Un amperímetro situado en el punto 1 indicará una corriente de:

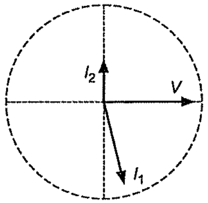


a) 9,0 mA *b)* 6,4 mA *c)* 0 *d)* 5,0 mA

23.13.2. Un amperímetro situado en el punto 2 indicará una corriente de:

a) 4,0 mA *b)* 2,0 mA *c)* 0 *d)* 5,0 mA

23.14. El diagrama fasorial de la figura corresponde a un circuito paralelo con dos ramas. Es correcto afirmar que:



a) El circuito es capacitivo.

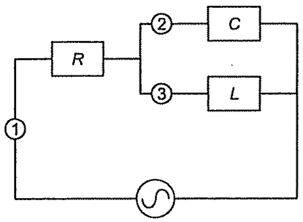
b) La potencia suministrada por la fuente se reparte equitativamente entre las dos ramas.

c) La rama 2 está compuesta sólo por componentes capacitivos.

d) La rama 2 está compuesta sólo por componentes inductivos.

23.15. Considerad el circuito de corriente alterna de la figura. Si la intensidad de corriente en el punto 2 es $I_2 = 2{,}0$ mA y en el punto 3 es $I_3 = 6{,}0$ mA. ¿Qué marcará un amperímetro situado en el punto 1?

a) 8,0 mA *b)* 4,0 mA *c)* 2,0 mA *d)* 6,0 mA



23.16.1. Un circuito de corriente alterna está formado por una resistencia de 100 Ω en serie con dos ramas en paralelo. En la rama superior hay una bobina de 800 mH y en la inferior un condensador de 10 μF de capacidad. El conjunto se conecta a una fuente de 120 V y frecuencia 50 Hz. La impedancia compleja de este circuito es de:

a) $10^2\ \Omega$ *c)* $120\ \Omega \angle -34°$

b) $1{,}0 \cdot 10^2\ \Omega - j\,67\ \Omega$ *d)* $1{,}0 \cdot 10^2\ \Omega - j\,1{,}2 \cdot 10^3\ \Omega$

23.16.2. El módulo de la intensidad suministrada por la fuente es:

a) 1,0 A *b)* 0,10 A *c)* 3,6 A *d)* 1,2 A

23.17.1. Un transformador de distribución (que supondremos ideal) tiene una relación de transformación de $1{,}0 \cdot 10^3$. Si la tensión del secundario es de $3{,}8 \cdot 10^2$ V, ¿cuál es la tensión en el primario?

a) $3{,}8 \cdot 10^2$ V *b)* $3{,}8 \cdot 10^5$ V *c)* 0,38 V *d)* $1{,}0 \cdot 10^3$ V

23.17.2. Si la corriente que pasa por el primario es de 20 mA, ¿qué valor tiene la corriente en el secundario?

a) 20 μA *b)* 20 mA *c)* 20 A *d)* 2,0 A

23.18. Un transformador ideal está compuesto por dos bobinados, el primario de 100 espiras y el secundario de 2000 espiras. El primario está conectado a una tensión de 380 V y por él pasa una corriente de 60 A. La tensión y la corriente del secundario de este transformador serán:

a) $V_2 = 7{,}6 \cdot 10^3$ V, $I_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ A *c)* $V_2 = 19$ V, $I_2 = 3{,}0$ A

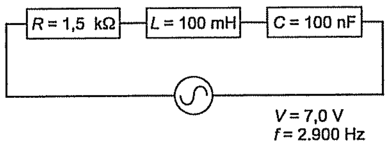
b) $V_2 = 19$ V, $I_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ A *d)* $V_2 = 7{,}6 \cdot 10^3$ V, $I_2 = 3{,}0$ A

SOLUCIONES

23.1. *d)*	**23.7.1.** *c)*	**23.10.2.** *a)*	**23.14.** *c)*
23.2.1. *a)*	**23.7.2.** *b)*	**23.10.3.** *d)*	**23.15.** *b)*
23.2.2. *b)*	**23.7.3.** *d)*	**23.11.** *a)*	**23.16.1.** *d)*
23.3. *c)*	**23.7.4.** *a)*	**23.12.1.** *d)*	**23.16.2.** *b)*
23.4. *b)*	**23.8.** *b)*	**23.12.2.** *c)*	**23.17.1.** *b)*
23.5. *c)*	**23.9.** *c)*	**23.13.1.** *d)*	**23.17.2.** *c)*
23.6. *a)*	**23.10.1.** *c)*	**23.13.2.** *c)*	**23.18.** *d)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Un circuito *RLC* en serie está formado por una resistencia de 1,5 kΩ, una bobina de autoinducción $L = 100$ mH, y un condensador de 100 nF. El conjunto está unido a una fuente de corriente alterna de 7,0 V y 2 900 Hz de frecuencia.**



Calcular:

a) El desfase de la tensión respecto a la intensidad.

b) El módulo de la intensidad de corriente del circuito.

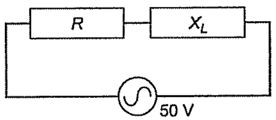
c) Los valores de las caídas de tensión en la resistencia y la càpacidad.

d) La potencia suministrada por la fuente.

e) La frecuencia de resonancia.

Sol.: a) $\varphi = 40°$; *b)* 3,6 mA; *c)* $V_R = 5{,}4$ V, $V_C = 2{,}0$ V; *d)* $P = 19$ mW; *e)* $1{,}6 \cdot 10^3$ Hz

2 **Considerar el siguiente circuito de corriente alterna alimentado con una fuente de 50 V.**



Para la frecuencia angular de 300 rad/s, se conoce la caída de tensión en la reactancia inductiva, $V_L = 30$ V, y que la resistencia tiene un valor $R = 4{,}0$ Ω. Calcular:

a) La intensidad de corriente que suministra la fuente.

b) La potencia suministrada por la fuente.

c) La reactancia capacitiva X_C, que habría que colocar en serie en la línea, para que se produzca el fenómeno de resonancia.

d) ¿Qué potencia suministra en estas condiciones la fuente?

Sol.: a) 10 A; *b)* $4{,}0 \cdot 10^2$ W; *c)* 3,0 Ω; *d)* $6{,}3 \cdot 10^2$ W

3 **Para una lámpara de incandescencia cuya tensión de trabajo es de 150 V y cuya potencia es de 1 500 W (las lámparas de incandescencia son resistencias), calcular:**

a) La corriente que pasa por la lámpara.

Se desea conectar esta lámpara a una red de 250 V, 50 Hz, interponiendo una reactancia inductiva pura calculada de forma que la lámpara trabaje en condiciones normales comentadas anteriormente.

b) Calcular el valor de la reactancia que habrá que conectar.

c) ¿Cuál será la autoinducción de la bobina?

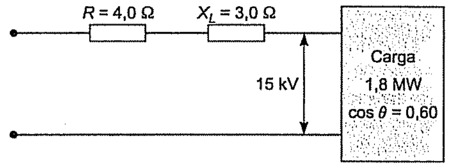
d) ¿Cuál es el factor de potencia del conjunto?

Se desea, además, corregir el factor de potencia del conjunto hasta la unidad.

e) Calcular la impedancia que debe conectarse en paralelo e indicar la naturaleza de esta impedancia.

Sol.: a) 10 A; *b)* 20 Ω; *c)* 64 mH; *d)* 0,60; *e)* Una capacidad de 31 Ω

4 **Un generador alimenta una carga inductiva de 1,8 MW y un factor de potencia $\cos \theta = 0{,}60$ ($\theta = 53°$) a través de una línea tal como indica la figura. Esta línea equivale a una resistencia de 4,0 Ω y una bobina de una reactancia igual a 3,0 Ω. La carga funciona con una tensión de 15 kV.**



Calcular:

a) La corriente que pasa por la carga. Indicar módulo y argumento tomando como referencia la tensión.

b) La caída de tensión en la línea de alimentación.

c) La pérdida de potencia en la línea de alimentación.

d) La impedancia compleja de la carga.

Se desea que la corriente que pasa por la red sea mínima, para ello se instala un batería de condensadores en paralelo con la carga.

e) ¿Cuál debe ser la impedancia de esta batería?

Una vez colocada la batería de condensadores:

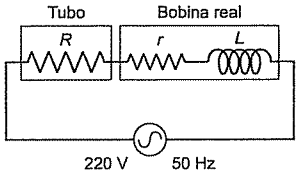
f) ¿Cuál será el valor de la corriente a través de la línea?

g) ¿Cuál será ahora la pérdida de potencia en la línea?

Sol.: a) $2{,}0 \cdot 10^2$ A $\angle -53°$; *b)* $1{,}0 \cdot 10^3$ V; *c)* 0,16 MW; *d)* 75 Ω $\angle$ 53°; *e)* 94 Ω; *f)* $1{,}2 \cdot 10^2$ A; *g)* 58 kW

5 **El circuito de un tubo fluorescente está constituido por el propio tubo (que se comporta como una resistencia *R*) y una bobina real conectada en serie (la resistencia interna de la bobina**

es r = 34,0 Ω). Se aplica una tensión de 220 V y 50,0 Hz entre los extremos del circuito. La diferencia de tensión entre los extremos del tubo es de 190 V. La intensidad es de 400 mA.



Calcular:

a) La impedancia del circuito y el desfase de la tensión de la fuente respecto a la intensidad.

b) La resistencia del tubo y la inductancia de la bobina.

c) La potencia consumida por el tubo, por la bobina y por el circuito total.

d) La capacidad del condensador que se ha de conectar en paralelo para corregir totalmente el factor de potencia del circuito.

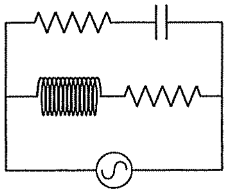
Sol.: *a)* 550 Ω ∠ 22°; *b)* R_{Tubo} = 475 Ω, X_L = 208 Ω; *c)* 76 W, 5,4 W, 81,4 W; *d)* 2,2 μF

6 **Un circuito está formado por dos ramas conectadas en paralelo. La rama 1 consta de una resistencia de 10 Ω y de una bobina de reactancia inductiva de 22 Ω. La rama 2 consta de una resistencia de 18 Ω y de un condensador de reactancia capacitiva de 31,8 Ω. Cuando se conecta a una fuente de tensión alterna, por la rama 1 pasa una corriente de 5,0 A. Calcular:**

a) La tensión de alimentación del circuito.

b) La corriente que pasa por la rama 2 e indicar la diferencia de fase respecto a la tensión.

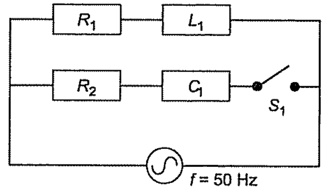
c) La corriente que suministra la fuente. Expresarla en forma compleja. Nota: tomar como referencia la tensión.



d) La impedancia compleja del circuito.

Sol.: *a)* 0,12 kV; *b)* I_2 = 3,3 A, φ_2 = 60°; *c)* 4,1 A ∠ −24°; *d)* 30 Ω ∠ 24°

7 **Cuando el interruptor S_1 está abierto, por la resistencia R_1 pasa una intensidad de corriente de 4,0 A. La caída de tensión en la bobina es de 320 V. La potencia que la fuente suministra al circuito es de 960 W. La frecuencia de la fuente es de 50 Hz. Calcular:**



a) El valor de R_1.

b) La tensión de la fuente.

c) El factor de potencia del sistema.

En un cierto instante, el interruptor se cierra. Una vez se ha establecido el régimen estacionario, se mide la intensidad de corriente que pasa por R_2 y su caída de tensión, obteniéndose los valores 4,0 A y 190 V respectivamente. Determinar:

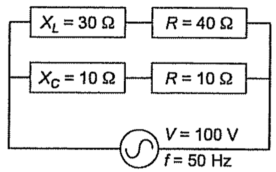
d) El valor de la capacidad del condensador C_1.

e) La intensidad que suministra ahora la fuente.

f) El factor de potencia del conjunto.

Sol.: *a)* 60 Ω; *b)* 0,40 kV; *c)* 0,60; *d)* 36,2 μF; *e)* 4,3 A ∠ −4,3°; *f)* 0,997

8 **Considerar el siguiente circuito de corriente alterna.**



Calcular:

a) La admitancia compleja de cada rama.

b) La intensidad de corriente que circula por la rama capacitiva del circuito.

c) La intensidad de corriente que suministra la fuente.

d) La potencia disipada en el circuito.

Sol.: *a)* $\overline{Y}_1$ = (2,0 · 10^{-2} Ω^{-1}) ∠ −37°, $\overline{Y}_2$ = (7,1 · 10^{-2} Ω^{-1}) ∠ 45°; *b)* 7,1 A; *c)* 7,6 A; *d)* 0,66 kW.

CAPÍTULO

24

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

24.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo en forma integral son: la ley de Gauss (I), la ley de Gauss para el campo magnético (II), la ley de Faraday-Lenz (III) y la ley de Maxwell-Ampère (IV):

	En presencia de fuentes (Q, I)	En el vacío ausencia de fuentes ($Q = 0$, $I = 0$)
(I)	$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA = 0$
(II)	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA = 0$
(III)	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dA$
(IV)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \left(I + \varepsilon_0 \cdot \dfrac{d}{dt}\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA\right)$	$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \dfrac{d}{dt}\int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot dA$

24.2. ECUACIÓN DE ONDA

Una onda electromagnética está compuesta por un campo eléctrico y un campo magnético, ambos variables en el tiempo, perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda.

Todas las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío a la misma velocidad, que es la velocidad de la luz.

Dada una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje x, si el campo eléctrico, E, es paralelo al eje y y el campo magnético, B, es paralelo al eje z, se cumple:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (1) \qquad\qquad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2)$$

En cambio, si para esa misma onda electromagnética el campo eléctrico, E, es paralelo al eje z y el campo magnético, B, es paralelo al eje y, se cumple:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (3) \qquad\qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2) se puede obtener la expresión del campo eléctrico o del campo magnético de la onda:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

La ecuación anterior es la ecuación de ondas, donde $\mu_0 \cdot \varepsilon_0$ es el inverso del cuadrado de la velocidad de propagación de la onda en el vacío: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \approx 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

Una solución de la ecuación de onda para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}_y = E_{y0} \cdot \text{sen}\,(kx - \omega t)\,\hat{j}$$

Para el campo B la solución es idéntica:

$$\vec{B}_z = B_{z0} \cdot \textit{sen}\,(kx - \omega t)\,\hat{k}$$

Las expresiones del campo eléctrico y magnético corresponden a una onda plana que se propaga en el sentido positivo del eje x.

Si el campo eléctrico es paralelo al eje z y el campo magnético es paralelo al eje y, las expresiones anteriores se escriben:

$$\vec{E}_z = E_{z0} \cdot \textit{sen}\,(kx - \omega t)\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_y = -B_{y0} \cdot \textit{sen}\,(kx - \omega t)\,\hat{j}$$

k es el número de ondas y está relacionado con la longitud de la onda por:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \qquad (5)$$

ω es la frecuencia angular o pulsación y está relacionada con el periodo y la frecuencia por:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \qquad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \qquad (6)$$

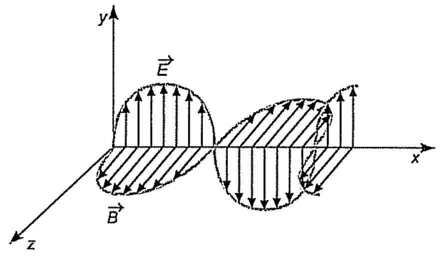
ω y k están relacionadas con la velocidad c por:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Los módulos del campo eléctrico y campo magnético de la onda electromagnética están relacionados por:

$$E_{y0}\; c \cdot B_{z0}$$

Campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana:



POLARIZACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas pueden ser:

— *Polarizadas Planas:*

El campo eléctrico y el magnético oscilan siempre en la misma dirección, que es siempre perpendicular a la dirección de propagación.

— *Polarizadas Circulares:*

El campo eléctrico y el magnético giran alrededor de la dirección de propagación al ir avanzando la onda, aunque tiene la característica de que sus módulos son constantes.

— *Polarizadas Elípticas:*

El campo eléctrico y el magnético giran alrededor de la dirección de propagación al ir avanzando la onda, pero en este tipo de ondas, las amplitudes de las dos componentes rectangulares de los campos son distintas.

24.3. VECTOR DE POYNTING

El vector de Poynting, $\vec{s}$, se define:

$$\vec{s} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Y su módulo es:

$$\vec{s} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_{y0} \cdot B_{z0}}{\mu_0} \cdot \operatorname{sen}^2 (kx - \omega t)\, \hat{i} = c \cdot \frac{B_{z0} \cdot B_{z0}}{\mu_0} \cdot \operatorname{sen}^2 (kx - \omega t)\, \hat{i}$$

$$s = c \cdot \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} \cdot \operatorname{sen}^2 (kx - \omega t)$$

El módulo del vector de Poynting es variable con el tiempo, ya que depende del cuadrado de una función periódica dependiente del tiempo ($\operatorname{sen}(kx - \omega t)$). Como el promedio temporal de un seno al cuadrado es 1/2, el valor promedio de s es:

$$s_{<m>} = c \cdot \frac{B_{z0}^2}{2 \cdot \mu_0}$$

24.4. ENERGÍA DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Densidad de energía de un campo eléctrico: $\eta_E = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{y0}^2 \cdot (\operatorname{sen}(kx - \omega t))^2$

Densidad de energía de un campo magnético: $\eta_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{z0}^2 \cdot (\operatorname{sen}(kx - \omega t))^2}{\mu_0}$

La densidad de energía total será: $\eta = \eta_E + \eta_B = \frac{1}{2} \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot E_{y0}^2 + \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} \right) \cdot (\operatorname{sen}(kx - \omega t))^2$

Como $E_{y0} = c \cdot B_{z0}$:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot (c \cdot B_{z0})^2 + \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} \right) \cdot (\operatorname{sen}(kx - \omega t))^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{B_{z0}^2}{\mu_0} + \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} \right) \cdot (\operatorname{sen}(kx - \omega t))^2$$

El valor promedio de la densidad de energía η es:

$$\eta_{<m>} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{z0}^2}{\mu_0}$$

$$\eta_{<m>} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{y0}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{z0} \cdot E_{y0}}{\mu_0 \cdot c}$$

En una onda la intensidad es el producto de la densidad de energía por la velocidad de propagación. Corresponde a la energía que, por unidad de tiempo y unidad de área, atraviesa una superficie normal a la dirección de propagación de la onda:

$$I = \eta \cdot c$$

$$I = \eta_{<m>} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{z0}^2}{\mu_0} \cdot c = s_{<m>}$$

Así el vector de Poynting tiene la dirección de propagación de la onda electromagnética y su módulo promedio es la intensidad de la onda electromagnética.

24.5. CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Una onda transporta energía y cantidad de movimiento. En el apartado anterior se ha determinado la energía que contiene una onda electromagnética. La cantidad de movimiento de la onda electromagnética es:

$$p = \frac{U}{c}$$

A partir de esta expresión se puede determinar la *presión de radiación.* Una onda electromagnética ejerce una presión sobre el objeto que incide. Si el objeto absorbe completamente la onda, la presión de radiación es:

$$P_r = \frac{I}{c}$$

Y en caso de que el objeto refleje completamente la onda, la presión de radiación es:

$$P_r = \frac{2 \cdot I}{c}$$

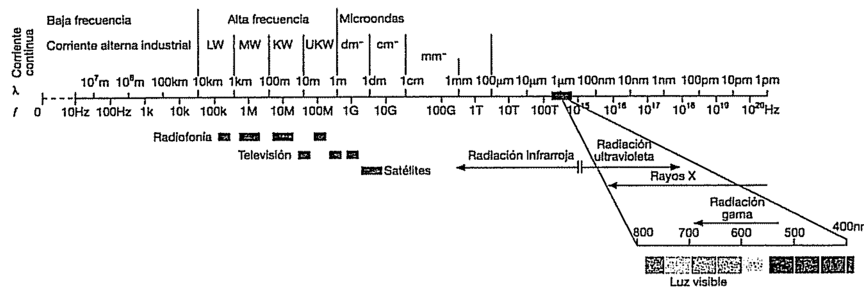
24.6. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

En cualquier tipo de onda, el producto de su longitud de onda por frecuencia da como resultado la velocidad de propagación:

$$c = \lambda \cdot f$$

Las ondas electromagnéticas se pueden clasificar en función de su longitud de onda o de su frecuencia. Lo más habitual es hacerlo en función de su capacidad de interactuar con la materia (frecuencia):

- Radiofrecuencia
- Microondas
- Infrarrojo
- Visible
- Ultravioleta
- Rayos X
- Rayos γ



PROBLEMAS RESUELTOS

24.1. El campo eléctrico de una onda electromagnética es:

$$\vec{E}(x,t) = 12{,}6 \text{ V/m} \cdot \text{sen}\,(3{,}1 \cdot 10^8 x - 9{,}3 \cdot 10^{16}\, t)\,\hat{k}$$

a) ¿Cuál es la dirección y sentido de desplazamiento de la onda electromagnética?

b) ¿Cuál es la frecuencia y la longitud de onda de esta onda electromagnética?

c) ¿Cuál es el campo magnético asociado a esta onda electromagnética?

Solución

a) A partir de la variable espacial contenida en el argumento de la función seno, la propagación de esta onda electromagnética es en la dirección positiva del eje x.

b) Del argumento se pueden identificar los valores del número de onda, k, y de la frecuencia angular, ω:

$$k = 3{,}1 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}, \; \omega = 9{,}3 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

A partir de estos valores se puede determinar la longitud de onda, λ, y la frecuencia, f:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{3{,}1 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}} = 20 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda = 20 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{20 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 15 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$f = 15 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

c) El campo magnético asociado a esta onda electromagnética tiene un módulo:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{12{,}6 \text{ V/m}}{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 4{,}2 \cdot 10^{-8}\, T$$

$$B_0 = 42\, nT$$

Y si la onda se desplaza en el sentido positivo del eje de abscisas, la expresión de B es:

$$\vec{B}(x,t) = -\,42\, nT \cdot \text{sen}\,(3{,}1 \cdot 10^8 x - 9{,}3 \cdot 10^{16}\, t)\,\hat{j}$$

24.2. El láser didáctico de Helio-Neón emite una onda electromagnética de longitud de onda $\lambda = 630$ nm (luz roja) y desarrolla una potencia de 5,0 mW. Si omitimos el efecto de dispersión del haz láser, se puede suponer que el frente de luz es una superficie circular de 3,0 mm de diámetro.

a) ¿Cuál es la intensidad I de la onda electromagnética emitida por el láser?

b) ¿Cuál es la densidad de energía en el haz láser?

c) ¿Cuál es el módulo del campo magnético B y del campo eléctrico E que conforman la onda electromagnética?

Si la onda electromagnética incide sobre un objeto cuya superficie es reflectante total:

d) ¿Cuál es la presión de radiación que ejerce la onda sobre el objeto?

Solución

a) La intensidad de una onda es la energía que pasa por unidad de tiempo y por unidad de área a través de una superficie normal a la dirección de propagación. Esto puede interpretarse como la potencia transmitida por unidad de área:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{5{,}0 \text{ mW}}{\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})^2} = 707 \,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I = 0{,}71 \,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

b) La densidad de energía es:

$$\eta = \frac{I}{c} = \frac{0{,}707 \,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}}{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2{,}36 \cdot 10^{-6} \,\frac{J}{\text{m}^3}$$

$$\eta = 2{,}4 \,\frac{\mu J}{\text{m}^3}$$

c) El módulo del campo magnético y del campo eléctrico se puede determinar a partir del valor de la densidad de energía:

$$B_0^2 = 2 \cdot \mu_0 \cdot \eta$$

$$B_0 = \sqrt{2 \cdot \mu_0 \cdot \eta} = \sqrt{2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot 2{,}4\,\frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}} = \sqrt{5{,}9 \cdot 10^{-12}\,\text{T}^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{T}$$

$$B_0 = 2{,}4 \cdot \mu\text{T}$$

$$E_0^2 = \frac{2 \cdot \eta}{\varepsilon_0}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \eta}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}4\,\frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}}{8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}}} = \sqrt{5{,}3 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2} = 730 \text{ V/m}$$

$$E_0 = 0{,}73 \text{ kV/m}$$

d) La presión de radiación de un objeto con superficie reflectante total es:

$$P_r = \frac{2 \cdot I}{c} = \frac{2 \cdot 0{,}707\,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}}{3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 4{,}72 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$P_r = 4{,}7\,\frac{\mu N}{\text{m}^2}$$

24.3. El campo magnético de una onda electromagnética polarizada circularmente es:
$\vec{B}(x, t) = -6{,}0\ \text{nT} \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{j} + 6{,}0\ \text{nT} \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{k}$
Determinar:
a) La densidad de energía media de esta onda electromagnética.
b) El campo eléctrico asociado a esta onda electromagnética.
c) El vector de Poynting de esta onda.
d) La intensidad de la onda.

Solución

a) El módulo del campo magnético de esta onda electromagnética es: $B_0 = 6{,}0$ nT
La densidad de energía media es:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T})^2}{1{,}3 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}} = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

b) Para calcular el campo eléctrico asociado a esta onda electromagnética se van a utilizar las expresiones (1), (2), (3) y (4) que relacionan el campo eléctrico con el campo magnético:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\ (1) \qquad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}\ (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}\ (3) \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t}\ (4)$$

Componente *y* del campo eléctrico:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -[6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot (-3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s}) \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = [6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)]$$

$$E_y = 6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \int \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t) \cdot dx$$

$$E_y = 6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \cdot \left(\frac{\text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)}{1{,}26 \cdot 10^8\ \text{m}^{-1}}\right)$$

$$E_y = 1{,}8\ \text{V/m} \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)$$

Componente *z* del campo eléctrico:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = [6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot (-3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s}) \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)]$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -[6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)]$$

$$E_z = -6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \int \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t) \cdot dx$$

$$E_z = -6{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{T} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{16}\ \text{rad/s} \cdot \left(-\frac{\cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)}{1{,}26 \cdot 10^8\ \text{m}^{-1}}\right)$$

$$E_z = 1{,}8\ \text{V/m} \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)$$

Por tanto:

$$\vec{E}(x, t) = 1{,}8\ \text{V/m}\ \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{j} + 1{,}8\ \text{V/m} \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{k}$$

$$\vec{B}(x, t) = -6{,}0\ \text{nT} \cdot \cos(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{j} + 6{,}0\ \text{nT} \cdot \text{sen}(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)\,\hat{k}$$

c) El vector de Poynting de esta onda es:

$$\vec{s} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \cdot (1{,}8\ \text{V/m} \cdot 6{,}0\ \text{nT} \cdot [\text{sen}^2(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t) + \cos^2(1{,}26 \cdot 10^8 x - 3{,}8 \cdot 10^{16} t)])\,\hat{i}$$

$$\vec{s} = \frac{1{,}8\ \text{V/m} \cdot 6{,}0\ \text{nT}}{1{,}3 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}}\,\hat{i}$$

$$\vec{s} = 8{,}6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\,\hat{i}$$

d) La intensidad de una onda electromagnética coincide con el módulo del vector de Poynting.

$$I = |\vec{s}| = 8{,}6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

24.4. Un haz de microondas tiene una densidad de potencia de 84 W/m². Determinar:
a) La densidad de energía media de esta onda electromagnética.
b) Su módulo del campo eléctrico y del campo magnético.

Solución

a) A partir de la relación entre la intensidad y la densidad de energía $I = \eta \cdot c$:

$$\eta = \frac{84\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 2{,}8 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$\eta = 0{,}28\,\frac{\mu\text{J}}{\text{m}^3}$$

b) Módulo del campo magnético:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot c$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot I}{c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}} \cdot 84 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}}{3{,}0 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s}}} = \sqrt{7{,}0 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{T^2}} = 0{,}84\ \mu\mathrm{T}$$

$$B_0 = 0{,}84\ \mu\mathrm{T}$$

Módulo del campo eléctrico:

$$E_0 = c \cdot B_0 = 3{,}0 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}84\ \mu\mathrm{T} = 2{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{V/m}$$

$$E_0 = 2{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{V/m}$$

24.5. Un espejo pequeño de 8,00 cm² está frente a una fuente de luz situada a 5,00 m de éste. En el espejo, la amplitud del campo magnético, B, de la luz proveniente de la fuente es de 0,300 nT. Determinar:

a) La energía que incide en el espejo en 1,00 segundos.

b) La potencia de radiación de la fuente si se supone que radia uniformemente en cualquier dirección.

Solución

a) La energía incidente es: $U = I \cdot A \cdot t$

Donde la intensidad I es:

$$I = |\vec{s}|_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0{,}300 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T})^2}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}}} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} = 10{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

Por tanto, la energía es:

$$U = I \cdot A \cdot t = 10{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2} \cdot 1{,}00\ s = 8{,}59 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

$$U = 8{,}59\ \mathrm{nJ}$$

b) La potencia media de radiación es:

$$P_m = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 10{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (5{,}00\ \mathrm{m})^2 = 3{,}38 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

$$P_m = 3{,}38\ \mathrm{mW}$$

CUESTIONES

24.1. El campo eléctrico y el campo magnético de una onda electromagnética polarizada linealmente que se propaga a lo largo del eje x en el sentido positivo vienen dados por:

a) $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{i}$ $\quad \vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{i}$

b) $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$ $\quad \vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{j}$

c) $\vec{E} = -E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{i}$ $\quad \vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{i}$

d) $\vec{E} = -E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{k}$ $\quad \vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{j}$

24.2. La ecuación que describe el campo eléctrico de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección del eje x es $\vec{E} = 750\ \mathrm{N/C} \cdot \cos(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{j}$. La ecuación que describe el campo magnético de esta onda será:

a) $\vec{B} = 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot \cos(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{j}$

b) $\vec{B} = 225 \cdot 10^9\ \mathrm{N/C} \cdot \cos(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

c) $\vec{B} = 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot \cos(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

d) $\vec{B} = 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot \cos(0{,}84\,x + 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

24.3. El campo eléctrico de una onda electromagnética plana viene dado por la función $\vec{E}(z, t) = -6{,}0\ \mathrm{V/m} \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 10^8 (z/c + t)]\,\hat{i}$. ¿Cuál es la expresión del campo magnético de esta onda electromagnética?

a) $\vec{B}(z, t) = -18 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T} \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 10^8 (z/c + t)]\,\hat{i}$

b) $\vec{B}(z, t) = -2{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T} \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 10^8 (z/c + t)]\,\hat{k}$

c) $\vec{B}(z, t) = -2{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T} \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 10^8 (z/c + t)]\,\hat{j}$

d) $\vec{B}(z, t) = 18 \cdot 10^8\ \mathrm{T} \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 10^8 (z/c + t)]\,\hat{j}$

24.4. Una onda plana electromagnética senoidal de frecuencia 40 MHz viaja por el espacio libre en la dirección x. En un punto y en un cierto instante, el campo eléctrico tiene un valor máximo de 600 V/m y está dirigido a lo largo del eje y. Los vectores campo eléctrico y campo magnético de esta onda electromagnética son:

a) $\vec{E} = 600\ \mathrm{V/m} \cdot \mathrm{sen}\,(47{,}1\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{j}$
$\vec{B} = 2{,}00 \cdot 10^6\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{sen}\,(47{,}1\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

b) $\vec{E} = 600\ \mathrm{V/m} \cdot \mathrm{sen}\,(47{,}1\,x - 6{,}37 \cdot 10^6\,t)\,\hat{j}$
$\vec{B} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{sen}\,(47{,}1\,x - 6{,}37 \cdot 10^6\,t)\,\hat{k}$

c) $\vec{E} = 600\ \mathrm{V/m} \cdot \mathrm{sen}\,(0{,}838\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{j}$
$\vec{B} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{sen}\,(47{,}1\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

d) $\vec{E} = 600\ \mathrm{V/m} \cdot \mathrm{sen}\,(0{,}838\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{j}$
$\vec{B} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \mathrm{sen}\,(0{,}838\,x - 8\pi \cdot 10^7\,t)\,\hat{k}$

24.5. El campo magnético de una onda electromagnética plana polarizada linealmente viene dado por $\vec{B} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ \mathrm{sen}\,(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^4\,t)\,\hat{j}$. El campo eléctrico de esta onda es:

a) $\vec{E} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/C}\ \mathrm{sen}\,(0{,}84\,x + 8\pi \cdot 10^4\,t)\,\hat{k}$

b) $\vec{E} = 7{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{N/C}\ \mathrm{sen}\,(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^4\,t)\,\hat{k}$

c) $\vec{E} = -7{,}5 \cdot 10^2$ N/C sen $(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^4\,t)\,\hat{k}$

d) $\vec{E} = -8{,}3 \cdot 10^{-15}$ N/C sen $(0{,}84\,x - 8\pi \cdot 10^4\,t)\,\hat{k}$

24.6. Una onda plana electromagnética se propaga en el vacío en la dirección y sentido del eje x. La longitud de la onda es de $6{,}0 \cdot 10^{-7}$ m, y la amplitud del campo eléctrico es de 0,30 V/m. ¿Cuáles son las expresiones correctas del campo eléctrico y magnético de esta onda electromagnética?

a) $\vec{E}\,(x, t) = -0{,}30$ V/m · sen $[1{,}0 \cdot 10^7 (x - 3{,}0 \cdot 10^8\,t)]\,\hat{k}$
$\vec{B}\,(x, t) = 1{,}0$ nT · sen $[1{,}0 \cdot 10^7 (x - 3{,}0 \cdot 10^8\,t)]\,\hat{j}$

b) $\vec{E}\,(y, t) = -0{,}30$ V/m · sen $[6{,}0 \cdot 10^{-7} y - 10\,t]\,\hat{i}$
$\vec{B}\,(z, t) = 1{,}0$ nT · sen $[6{,}0 \cdot 10^{-7} z - 10\,t]\,\hat{i}$

c) $\vec{E}\,(z, t) = -0{,}30$ V/m · sen $[1{,}0 \cdot 10^7 (z - 3{,}0 \cdot 10^8\,t)]\,\hat{k}$
$\vec{B}\,(y, t) = 1{,}0$ nT · sen $[1{,}0 \cdot 10^7 (y - 3{,}0 \cdot 10^8\,t)]\,\hat{j}$

d) $\vec{E}\,(x, t) = -0{,}30$ V/m · sen $[6{,}0 \cdot 10^{-7} x - 10\,t]\,\hat{k}$
$\vec{B}\,(x, t) = 1{,}0$ nT · sen $[6{,}0 \cdot 10^{-7} x - 10\,t]\,\hat{j}$

24.7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) En una onda electromagnética las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales.

b) Las ondas electromagnéticas son ondas longitudinales.

c) En una onda electromagnética los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo módulo.

d) Las ecuaciones de Maxwell sólo se aplican si los campos son constantes en el tiempo.

24.8. Tanto las ondas de radio como los rayos X son ondas electromagnéticas. Las primeras tienen longitud de onda del orden de 1,0 m y las segundas del orden de 10^{-10} m. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) En el vacío, los rayos X se propagan más rápidamente que las ondas de radio.

b) En el vacío, ambas radiaciones se propagan a la misma velocidad.

c) Las ondas electromagnéticas no se propagan en el vacío.

d) En el vacío, los rayos X se propagan más lentamente que las ondas de radio.

24.9.1. El valor máximo del campo eléctrico de una onda plana es $E_0 = 120$ N/C. El valor máximo del campo magnético es:

a) $360 \cdot 10^8$ T *b)* 120 T *c)* 40 μT *d)* 400 nT

24.9.2. La intensidad promedio de esta onda es:

a) 19,1 W/m² *c)* 38,2 W/m²

b) $22{,}6 \cdot 10^3$ W/m² *d)* $45{,}2 \cdot 10^3$ W/m²

24.10. Una fuente puntual emite una onda electromagnética. En un punto dado la amplitud del campo eléctrico es 3,1 N/C. La intensidad media de la onda en este punto es:

a) 0,013 W/m² *b)* 1,2 W/m² *c)* 0,60 W/m² *d)* 0,035 W/m²

24.11. Una bombilla emite una potencia media de 60 W en forma de onda electromagnética, en todas direcciones. ¿Cuál es el valor máximo del campo eléctrico de esa onda electromagnética a una distancia de 3,0 m? (Nota: la intensidad de la onda electromagnética emitida por la bombilla está uniformemente distribuida por toda la superficie de radio 3,0 m).

a) 30V/m *c)* 10V/m

b) 20V/m *d)* 40V/m

SOLUCIONES

24.1. *d)*	**24.4.** *d)*	**24.7.** *a)*	**24.9.2.** *a)*
24.2. *c)*	**24.5.** *c)*	**24.8.** *b)*	**24.10.** *a)*
24.3. *c)*	**24.6.** *a)*	**24.9.1.** *d)*	**24.11.** *b)*

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 **Una onda electromagnética plana que se propaga en el espacio libre, en la dirección del eje x y en sentido positivo, tiene un campo eléctrico que viene dado por la expresión $\vec{E}(x, t) = -60$ V/m · sen $(kx - 3{,}14 \cdot 10^{14}\, t)\, \hat{k}$. Determinar:**

a) La longitud de onda.

b) La ecuación correspondiente al campo magnético.

Sol.: a) 6,0 μm; *b)* $\vec{B}(x, t) = 2{,}0 \cdot 10^{2}$ nT · sen $(1{,}05 \cdot 10^{6}\, x - 3{,}14 \cdot 10^{14}\, t)\, \hat{j}$

2 **El campo magnético de una onda electromagnética de frecuencia 600 MHz viene dado por la expresión $\vec{B}(x, t) = 3{,}10 \cdot 10^{-8}$ T cos $(kx - \omega t)\, \hat{j}$.**

a) Hallar valores de k y ω de la expresión del campo magnético.

b) Escribir la expresión correspondiente al campo eléctrico.

c) Calcular la intensidad media de la onda.

d) ¿Qué energía atraviesa durante 5,00 s una superficie plana, de 2,00 cm² de área, normal a la dirección de propagación de la onda?

Sol.: a) $k = 12{,}6$ m^{-1}, $\omega = 3{,}77 \cdot 10^{9}$ s^{-1}; *b)* $\vec{E}(x, t) = -9{,}30$ V/m cos $(12{,}6 \cdot x - 3{,}77 \cdot 10^{9}\, t)\, \hat{k}$; *c)* 0,115 W/m²; *d)* 115 μJ

3 **Una onda electromagnética avanza en la dirección y sentido del eje z. La ecuación del campo eléctrico es: $\vec{E}(z, t) = 0{,}30$ N/C · cos $[6{,}0 \cdot 10^{8}\, t - 2{,}0\, z]\, \hat{i}$. Determinar:**

a) La ecuación del campo magnético de esta onda electromagnética.

b) La intensidad media de esta onda electromagnética

Sol.: a) $\vec{B}(z, t) = 1{,}0$ nT · cos $[6{,}0 \cdot 10^{8}\, t - 2{,}0\, z]\, \hat{j}$; *b)* $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ W · m^{-2}

4 **Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 150 MHz y se propaga en el vacío. El campo eléctrico viene dado por $\vec{E}(x, t) = -6{,}0$ V/m · sen $(4 \cdot \pi \cdot x - 3{,}0 \cdot 10^{8} \cdot \pi \cdot t)\, \hat{k}$. Determinar:**

a) La longitud de la onda y la dirección de propagación de la onda.

b) El vector campo magnético de esta onda electromagnética.

c) La intensidad de esta onda.

Sol.: a) $\lambda = 0{,}50$ m, se desplaza en el sentido positivo del eje x; *b)* $\vec{B}(x, t) = 20$ nT · sen $(kx - \omega t)\, \hat{j}$; *c)* 48 mW/m²

5 **Una onda electromagnética plana que se propaga en el espacio libre, en la dirección del eje x y en sentido positivo, tiene un campo magnético que viene dado por la expresión $\vec{B}(x, t) = 200$ nT · sen $(kx - 3{,}14 \cdot 10^{14}\, t)\, \hat{j}$. Determinar:**

a) La densidad de energía de la onda.

b) La intensidad media de la onda.

c) La potencia media que incide sobre una superficie normal a la dirección de propagación de la onda de 2,00 cm² de área.

d) El vector de Poynting de esta onda.

Sol.: a) $15{,}9 \cdot 10^{-9}$ J/m³; *b)* 4,77 W/m²; *c)* $9{,}55 \cdot 10^{-4}$ W; *d)* $9{,}55\, \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \text{sen}^2\, (kx - 3{,}14 \cdot 10^{14}\, t)\, \hat{i}$